

ISSN 1683 - 4720

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
НАУК УКРАЇНИ

Наукове видання

ПРАЦІ
ІНСТИТУТУ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
І МЕХАНІКИ НАН УКРАЇНИ

Том 31

Том 31, 2017

Том 31

Підписано до друку 20.04.2018

Інститут прикладної математики і механіки
НАН України

84100, м. Слов'янск, вул. Добровольського, 1;
тел.: (0626) 66 55 00

Формат 60 x 84 1/8. Ум. адрук. арк. 10.
Друк лазерний. Зам № 5540. Тираж 100 прим.

Надруковано в ТОВ "ТехПринтЦентр"
Адреса: м. Слов'янск, вул. Батюка, 19,
тел.: +38 06262 3 20 99

Праці ІПММ НАН України,

ПРАЦІ

ІНСТИТУТУ
ПРИКЛАДНОЇ
МАТЕМАТИКИ І
МЕХАНІКИ
НАН УКРАЇНИ

2017

Науковий збірник "Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України" публікує оригінальні статті в галузі фундаментальної та прикладної математики. Всі статті проходять рецензування міжнародною редакційною колегією.

Обсяг: 10 друк. арк.

Згідно Наказу Міністерства освіти і науки України від 04.04.2018 року № 326 збірник включено до Переліку наукових фахових видань України.

Головний редактор: Скрипник І.І. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)

МІЖНАРОДНА РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Апанасов Б.М. (Університет Оклахоми, США)
Бракалова М.А. (Фордемський університет, США)
Бахтін О.К. (Інститут математики НАН України, Україна)
Бойчук О.А. (Інститут математики НАН України, Україна)
Водопьянов С.К. (Інститут математики ім. С.Л. Соболева СО РАН, Росія)
Гольберг А. (Технологічний інститут Холона, Ізраїль)
Гутляньський В. Я. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)
Діаконов К.М. (Університет Барселони, Іспанія)
Діблік Й. (Технічний університет Брно, Чеська Республіка)
Слізаров О.М. (Інститут математики і механіки ім. М.І. Лобачевського, Росія)
Зуєв О.Л. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)
Каранджулов Л.І. (Технічний університет - Софія, Болгарія)
Кісляков С.В. (Санкт-Петербурзьке відділення Математичного інституту ім. В.А. Стеклова РАН, Росія)
Кононов Ю.М. (Донецький національний університет ім. В.Стуса, Україна)
Кореновський А.О. (Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Україна)
Крушкаль С.Л. (Університет ім. Бар-Ілана, Ізраїль)
Ліфланд Е. (Університет ім. Бар-Ілана, Ізраїль)
Маркіна І. (Бергенський університет, Норвегія)
Махно С.Я. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)
Моторний В.П. (Дніпровський національний університет ім. О. Гончара, Україна)
Насиров С.Р. (Інститут математики і механіки ім. М.І. Лобачевського, Росія)
Несмелова О.В. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна) – **відповідальний секретар**
Плакса С.А. (Інститут математики НАН України, Україна)
Покровський А.В. (Інститут математики НАН України, Україна)
Прохоров Д.В. (Саратовський державний університет, Росія)
Рязанов В.І. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)
Севостьянов Є.О. (Житомирський державний університет ім. І. Франка, Україна)
Скляр Г. М. (Інститут математики Щецинського університету, Польща)
Ткаченко В.М. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)
Чайченко С.О. (Донбаський державний педагогічний університет, Україна)
Чуйко С.М. (Донбаський державний педагогічний університет, Україна)
Шевченко В.П. (Донецький національний університет ім. В.Стуса, Україна)
Шишков А.Є. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)
Щербак В.Ф. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна) – **заступник головного редактора**
Щербаков В.О. (Інститут математики і інформатики АНМ, Молдова)
Якубчик Б. (Інститут математики ПАН, Польща)

Адрес редколегії:
84100 Слов'янск, вул. Добровольського, 1
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Тел. (0626) 66 55 00

Затверджено до друку Вченою радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України
20.04.2018 протокол № 5

Свідоцтво про реєстрацію: серія KB № 22887-12787 ПР від 03.07.2017 р.

© Інститут прикладної математики і механіки НАН України, 2017

The journal "Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine" is devoted to the publication of original papers in pure and applied mathematics, and is reviewed and edited by an international editorial board.

Volume: 10 prints. the arch.

According to the Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated 04.04.2018 No. 326 the journal is included in the List of scientific professional editions of Ukraine

Editor-in-Chief: Skrypnik I. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)

INTERNATIONAL EDITORIAL BOARD

Apanasov B. (The University of Oklahoma, USA)
Brakalova M. (Fordham University, USA)
Bakhtin A. (Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Boichuk O. (Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Vodopyanov S. (Sobolev Institute of Mathematics SB of the RAS, Russia)
Golberg A. (HIT-Holon Institute of Technology, Israel)
Gutlyanskii V. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Dyakonov K. (University of Barcelona, Spain)
Diblik J. (Brno University of Technology, Czech Republic)
Elizarov A. (N.I. Lobocevskii Institute of Mathematics and Mechanics, Russia)
Zuyev O. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Karandzhulov L. (The Technical University of Sofia, Bulgaria)
Kislyakov S. (St. Petersburg Department of Steklov Mathematics Institute of the RAS, Russia)
Kononov Yu. (Vasyl' Stus Donetsk National University, Ukraine)
Korenovskiy A. (Odessa I.I. Mechnikov National University, Ukraine)
Krushkal S. (Bar-Ilan University, Israel)
Liflyand E. (Bar-Ilan University, Israel)
Markina I. (The University of Bergen, Norway)
Makhno S. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Motornyi V. (Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine)
Nasyrov S. (N.I. Lobocevskii Institute of Mathematics and Mechanics, Russia)
Nesmelova O. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine) – **Executive Secretary**
Plaksa S. (Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Pokrovskii A. (Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Prokhorov D. (Saratov State University, Russia)
Ryazanov V. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Sevost'yanov E. (Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine)
Sklyar G. (The Institute of Mathematics University of Szczecin, Poland)
Tkachenko V. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Chaichenko S. (Donbas State Pedagogical University, Ukraine)
Chuiko S. (Donbas State Pedagogical University, Ukraine)
Shevchenko V. (Vasyl' Stus Donetsk National University, Ukraine)
Shishkov A. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Shcherbak V. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine) – **Deputy Editor-in-Chief**
Shcherbacov V. (Institute of Mathematics and Computer Science of the ASM, Moldova)
Jakubczyk B. (Institute of Mathematics of the PAS, Poland)

Editorial Address:
84100 Slovyansk, Dobrovolsky str., 1
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine
Tel. (0626) 66 55 00

Approved for publication by the Academic Council of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, April 20, 2018 protocol 5

Certificate of registration: series KB No. 22887-12787 PIP from 07.03.2017.

© Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, 2017

Том 31

Слов'янськ, 2017

Заснований у 1997 р.

ПРАЦІ
ІНСТИТУТУ
ПРИКЛАДНОЇ
МАТЕМАТИКИ
І МЕХАНІКИ
НАН УКРАЇНИ

З М І С Т

<i>Е. С. Афанасьева, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов</i> О классах Соболева с критическим показателем	3
<i>В. В. Грушковская</i> Безградиентные алгоритмы управления для задач планирования движения с обходом препятствий	13
<i>V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. V. Nesmelova, V. I. Ryazanov</i> On the Dirichlet problem for quasilinear Poisson equations	28
<i>И. С. Дмитришин</i> Синхронизация угловых скоростей идентичных твердых тел	38
<i>М. В. Дзюба</i> Про наближене розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккати методом найменших квадратів	46
<i>Е. А. Евгеньева</i> Равномерная оценка семейства энергетических функций для квазилинейных параболических уравнений с сингулярными граничными данными	54
<i>Н. В. Жоголева, В. П. Шевченко</i> Анализ вторых гармоник локализованных SH волн в анизотропном слое между анизотропными полупространствами при проскальзывающем контакте материалов	63

<i>Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак</i> Синхронизация колебаний связанных осцилляторов Ван дер Поля	71
<i>А. А. Лимарь, Ю. Н. Кононов</i> Об уточнении условий устойчивости колебаний мембраны, разделяющей идеальные жидкости в прямоугольном канале с жесткими основаниями	81
<i>О. А. Новиков, О. Г. Ровенская, Ю. В. Козаченко</i> Приближение интегралов Пуассона линейными методами	92
<i>Т. М. Осипчук</i> Деякі зауваження про системи куль, які створюють тінь в точці	109
<i>V. I. Ryazanov</i> On the boundary behavior of conjugate harmonic functions	117
<i>С. В. Сапунов</i> О направленном перемещении графоходного автомата без компаса на бесконечной цепи	124
<i>С. М. Чуйко, О. В. Несмелова, Д. В. Сысоев</i> Нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга в критическом случае	140
<i>С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, В. О. Чечетенко</i> Оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі	151
<i>О. Д. Кичмаренко, Е. В. Платонова</i> Построение аппроксимации множества достижимости для линейных задач управления	163

УДК 517.5

©2017. Е. С. Афанасьева, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов

О КЛАССАХ СОБОЛЕВА С КРИТИЧЕСКИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В статье установлено, что любой гомеоморфизм f класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,n-1}$ с внешней дилатацией $K_O(x, f) \in L_{\text{loc}}^{n-1}$ является так называемым нижним Q -гомеоморфизмом с $Q(x) = K_O(x, f)$, а также кольцевым Q -гомеоморфизмом с $Q(x) = K_O^{n-1}(x, f)$. Это позволяет исследовать локальное и граничное поведение отображений класса $W_{\text{loc}}^{1,n-1}$.

MSC: Primary 30C62, 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35Q15; Secondary 30E25, 31C05, 34M50, 35F45.

Ключевые слова: классы Соболева, критический показатель, внешняя дилатация, нижние и кольцевые Q -гомеоморфизмы.

1. Введение.

Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Напомним, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leq K(x) \cdot J_f(x) \quad (1)$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geq 1$, где $f'(x)$ якобиева матрица f , $\|f'(x)\|$ – её операторная норма, $\|f'(x)\| := \sup_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$, и $J_f(x) = \det f'(x)$

– якобиан отображения f .

Напомним, что впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}$ в работе [4], см. также [5]. Впоследствии это условие было заменено требованием $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$, предполагавшим однако дополнительно, что $J_f \in L_{\text{loc}}^1$, см., напр., монографию [5], а также дальнейшие ссылки в монографии [7].

Заметим, что условие $J_f \in L_{\text{loc}}^1$ излишне в случае гомеоморфизмов. Действительно, для каждого гомеоморфизма f между областями D и D' в \mathbb{R}^n , имеющего п.в. частные производные в D , существует множество E лебеговой меры ноль, такое что f обладает (N) -свойством Лузина в $D \setminus E$ и

$$\int_A |J_f(x)| dm(x) = m(f(A)) \quad (2)$$

для каждого измеримого по Лебегу множества $A \subset D \setminus E$ (см., напр., пункты 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [23]). Здесь m обозначает меру Лебега в \mathbb{R}^n .

Пусть $J_f(x)$ – якобиан отображения f , имеющего все первые частные производные в точке x . Напомним, что *внешняя дилатация* отображения f в точке x определяется равенством

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J_f(x)|}, \quad (3)$$

если $J_f(x) \neq 0$; $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$; $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Внутренней дилатацией отображения f в точке x называется величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J_f(x)|}{l(f'(x))^n} \quad (4)$$

где $l(f'(x)) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|$, если $J_f(x) \neq 0$; $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$; $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Следуя разд. 9.2, гл. 9 в [7], далее k -мерной поверхностью S в \mathbb{R}^n называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, где ω – открытое множество в \mathbb{R}^k и $k = 1, \dots, n - 1$. Функцией кратности поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = \text{card } S^{-1}(y) = \text{card } \{x \in \omega : S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S . Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k , см., разд. 9.2 в [7].

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ ее интеграл по поверхности S определяется равенством

$$\int_S \rho dA := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) N(S, y) dH^k y. \quad (6)$$

Пусть Γ – семейство k -мерных поверхностей S . Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется допустимой для семейства Γ , пишут $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_S \rho^k dA \geq 1 \quad (7)$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$.

Модулем семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x) dm(x). \quad (8)$$

В дальнейшем через $\Delta(E, F; G)$ обозначаем совокупность всех кривых $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, соединяющих произвольные множества E и F в множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, т.е. $\gamma(0) \in E$, $\gamma(1) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ для всех $t \in (0, 1)$.

2. О кольцевых и нижних Q -гомеоморфизмах.

Пусть D и D' – области в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ является *кольцевым Q -гомеоморфизмом* в точке $x_0 \in \overline{D}$, если соотношение

$$M(\Delta(f(K_1), f(K_2); f(D))) \leq \int_{A \cap D} Q(x) \eta^n(|x - x_0|) dm(x) \quad (9)$$

выполнено для любых двух континуумов K_1, K_2 из D , которые принадлежат разным компонентам дополнения в \mathbb{R}^n кольца $A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$. Также говорим, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ есть *кольцевой Q -гомеоморфизм*, если f является кольцевым Q -гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Понятие кольцевого Q -гомеоморфизма впервые было введено в работе [9] в связи с исследованием уравнений Бельтрами на плоскости, а позднее было распространено на пространственный случай в работе [21], см. также монографии [3] и [7].

Говорят, см. разд. 9.2 в [7], что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ является *обобщенно допустимой* для семейства Γ , состоящего из $(n - 1)$ -мерных поверхностей S в \mathbb{R}^n , пишут $\rho \in \text{ext adm } \Gamma$, если

$$\int_S \rho^{n-1}(x) dA \geq 1 \quad (10)$$

для почти всех $S \in \Gamma$, т.е. за исключением подсемейства Γ нулевого модуля.

Гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ называется *нижним Q -гомеоморфизмом в точке x_0* , если

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \inf_{\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon} \int_{D \cap A_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)} dm(x) \quad (11)$$

для каждого кольца $A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где $d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$, а Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D , $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ является *нижним Q -гомеоморфизмом в области D* , если f является нижним Q -гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Понятие нижнего Q -гомеоморфизма введено в работе [14] и теория таких отображений нашла интересные приложения в изучении краевых задач для уравнений Бельтрами, а также локального и граничного поведения классов Орлича-Соболева, см., например, статьи [13, 16] и монографию [17].

Следующее утверждение устанавливает связь между нижними и кольцевыми Q -гомеоморфизмами в \mathbb{R}^n , см. следствие 5 в [16].

Предложение 1. Пусть D и D' – области в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, и функция $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ интегрируема в степени $n - 1$ в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{D}$. Если $f : D \rightarrow D'$ – нижний Q -гомеоморфизм в точке x_0 , то f является кольцевым Q_* -гомеоморфизмом в точке x_0 с $Q_*(x) = Q^{n-1}(x)$.

Замечание 1. В определениях нижних и кольцевых Q -гомеоморфизмов функцию Q достаточно задать только в области D или продолжить нулем вне D . По замечанию 8 в [16], заключение предложения 1 остается в силе, если функция

Q интегрируема в степени $n - 1$ лишь на почти всех сферах достаточно малых радиусов с центром в точке x_0 .

3. О некоторых свойствах отображений класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,n-1}$.

По теореме 1.1 из недавней работы [11] имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, и $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое дискретное отображение класса $W_{\text{loc}}^{1,n-1}(D)$ с локально интегрируемой внутренней дилатацией. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду.

При $n \geq 3$ этот результат был новым даже для гомеоморфизмов. При $n = 2$ по известной теореме Геринга-Лехто любое непрерывное открытое отображение, имеющее п.в. частные производные, дифференцируемо п.в., см., например, [2] или [6]. Заметим, что последний результат для гомеоморфизмов был доказан еще Меньшовым в работе [8] и его доказательство без изменений проходило и для непрерывных открытых отображений. По теореме Вайсяля заключение сохраняет силу для непрерывных открытых отображений класса $W_{\text{loc}}^{1,p}$ при любых $p > n - 1$ и $n \geq 3$, см. лемму 3 в [12]. В то же время, известны примеры функций $f \in W_{\text{loc}}^{1,n} \subset W_{\text{loc}}^{1,n-1}$, которые нигде не дифференцируемы, см., например, [10].

Следствие 1. Если открытое дискретное отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{\text{loc}}^{1,n-1}(D)$ имеет внешнюю дилатацию локально интегрируемую в степени $n - 1$, то f дифференцируемо почти всюду.

Далее, по теореме 1.3 работы [1] имеем следующий важный результат.

Предложение 3. Пусть $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – гомеоморфизм класса $W_{\text{loc}}^{1,n-1}(C)$ в единичном кубе $C := (0, 1)^n$. Тогда f обладает (N) -свойством Лузина относительно $(n - 1)$ -мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперплоскостях \mathcal{P} , параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости \mathcal{P}_0 , т.е., для любого множества $E \subset \mathcal{P}$, если $H^{n-1}(E) = 0$, то $H^{n-1}(f(E)) = 0$.

Этот результат был распространен на произвольные непрерывные открытые дискретные отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{\text{loc}}^{1,n-1}$, см. предложение 3.3 в [11]. Более того, любое непрерывное отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, класса $W_{\text{loc}}^{1,p}$ при $p > n - 1$ обладает указанным свойством, см., например, теорему 3 в [16]. Однако, это неверно даже для гомеоморфизмов $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ в классах $W_{\text{loc}}^{1,p}$ ни при каком $p < n - 1$. Действительно, известны примеры С.П. Пономарева гомеоморфизмов $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, принадлежащих классу $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ для произвольного $p < n$, и не обладающих (N) -свойством Лузина, см. [20]. Если теперь $g(x)$ – такой пример в \mathbb{R}^{n-1} , то $f(x, y) := (g(x), y)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$, не удовлетворяет (N) -свойству Лузина на всех гиперплоскостях $y = \text{const}$.

Лемма 1. Пусть D и D' – области в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $f : D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,n-1}(D)$ с $K_O \in L_{\text{loc}}^{n-1}(D)$. Тогда $\|f'\| \in L_{\text{loc}}^{n-1}(D)$.

Доказательство. Пусть V – компакт в D . Тогда, применяя неравенство Гёльдера

с показателями $p = n$ и $p' = \frac{n}{n-1}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_V \|f'(x)\|^{n-1} dm(x) &= \int_V K_O^{\frac{n-1}{n}}(x) \cdot J_f^{\frac{n-1}{n}}(x) dm(x) \leq \\ &\leq \left(\int_V K_O^{n-1}(x) dm(x) \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_V J_f(x) dm(x) \right)^{\frac{n-1}{n}} < \infty \end{aligned}$$

и заключение леммы следует, поскольку $J_f \in L_{\text{loc}}^1$. Действительно, для каждого гомеоморфизма f между областями D и D' в \mathbb{R}^n , имеющего п.в. частные производные в D , существует множество E лебеговой меры ноль, такое что f обладает (N) -свойством Лузина в $D \setminus E$ и

$$\int_A J_f(x) dm(x) = m(f(A)) \quad (12)$$

для каждого измеримого по Лебегу множества $A \subset D \setminus E$, см., например, пункты 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [23]. \square

4. Основная лемма.

Лемма 2. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,n-1}(D)$ с $K_O(\cdot, f) \in L_{\text{loc}}^{n-1}(D)$ и пусть C – куб в \mathbb{R}^n с гранями параллельными координатным гиперплоскостям, такой что $\bar{C} \subset D$. Тогда сужение отображения f на C абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперплоскостях \mathcal{P} , параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости \mathcal{P}_0 . Кроме того, на почти всех таких гиперплоскостях \mathcal{P} выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $f' = 0$ на измеримом множестве $E \subset \mathcal{P}$.

Доказательство. По лемме 1 $\|f'(x)\| \in L^{n-1}(C)$ и по теореме Фубини, см., например, теорему III(8.1) в [22], на почти всех гиперплоскостях \mathcal{P} , параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости \mathcal{P}_0 ,

$$\int_{C \cap \mathcal{P}} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A} < \infty,$$

а по следствию 1 и предложению 3 можно считать дополнительно, что отображение f дифференцируемо в почти всех точках множества $C \cap \mathcal{P}$ и обладает там (N) -свойством Лузина относительно $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа. Зафиксируем произвольную гиперплоскость \mathcal{P}_* с указанными свойствами.

Тогда каждое измеримое множество $E \subset C \cap \mathcal{P}_*$ допускает разложение $E = E_0 \cup E_*$, где $H^{n-1}(E_0) = 0$, и $E_* := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k , $k = 1, 2, \dots$, – измеримые множества, такие, что отображения $f_k := f|_{E_k}$ являются липшицевыми, см. теорему

3.1.8 в [23]. По построению $H^{n-1}(f(E_0)) = 0$, а каждое отображение f_k допускает липшицево продолжение на всю гиперплоскость \mathcal{P}_* по теореме Кирсбрауна, см., например, теорему 2.10.43 в [23]. Таким образом, по теореме 3.2.5 в [23] и счетной аддитивности интеграла имеем равенство:

$$H^{n-1}(f(E)) = \int_{E_*} J_{n-1}(x) dA,$$

где J_{n-1} обозначает $(n-1)$ -мерный якобиан отображения f на гиперплоскости \mathcal{P}_* и, наконец, по пункту 1.7.6 в [23] получаем оценку

$$H^{n-1}(f(E)) \leq \int_E \|f'(x)\|^{n-1} dA.$$

Отсюда приходим к абсолютной непрерывности отображения f на гиперплоскости \mathcal{P}_* в силу абсолютной непрерывности неопределенного интеграла, а также – ко второму заключению леммы. \square

Заметим тот очевидный факт, что хаусдорфовы меры квазиинвариантны при квазиизометриях, а классы Соболева $W_{\text{loc}}^{1,p}$ инвариантны, см., например, секцию 1.1.7 в монографии [19]. По свойству Линделефа в \mathbb{R}^n , см., например, секцию I.5.XI в [18], множество $D \setminus \{x_0\}$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ может быть покрыто счетным числом открытых сегментов сферических колец в $D \setminus \{x_0\}$ с центром в точке x_0 , и каждый такой сегмент может быть отображен на единичный куб в \mathbb{R}^n посредством квазиизометрии, переводящих куски сфер в куски гиперплоскостей.

Таким образом, на основе предложений 2 и 3, а также применяя лемму 2, приходим к следующим выводам.

Следствие 2. Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, и $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,n-1}(D)$. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду и обладает (N) -свойством Лузина относительно $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа на почти всех сферах S с центром в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Более того, если дополнительно $K_O(\cdot, f) \in L_{\text{loc}}^{n-1}(D)$, то отображение f на почти всех таких сферах S локально абсолютно непрерывно и, кроме того, $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $f' = 0$ на измеримом множестве $E \subset S$.

5. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть D и D' – области в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $f : D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,n-1}$ с $K_O \in L_{\text{loc}}^{n-1}(D)$. Тогда гомеоморфизм f является нижним Q -гомеоморфизмом в произвольной точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q(x) = K_O(x, f)$.

Доказательство. Обозначим через B (борелевское) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J_f(x) \neq 0$. Применяя теорему Кирсбрауна и используя единственность аппроксимативного дифференциала, см., например, соответственно теоремы 2.10.43 и 3.1.2 в [23], заключаем, что множество B представляет собой счетное объединение борелевских множеств B_i ,

$l = 1, 2, \dots$, таких что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., напр., лемму 3.2.2 и теоремы 3.1.4 и 3.1.8 в [23]. Без ограничения общности можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также через B_* оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако, $f' = 0$.

По следствию 1 множество $B_0 := D \setminus (B \cup B_*)$ имеет лебегову меру нуль. Поэтому $\mathcal{A}_S(B_0) = 0$ для почти всех гиперповерхностей S в \mathbb{R}^n и, в частности, для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in \overline{D}$, см., например, теорему 2.4 в [15] или теорему 9.1 в [7]. Таким образом, по следствию 2 получаем, что $\mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_0)) = 0 = \mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_*))$ для почти всех S_r , где $S_r^* = f(S_r)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех пересечений сфер S_r , $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$, с областью D . Для произвольной функции $\rho_* \in \text{adm } f(\Gamma)$, $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho(x) := \rho_*(f(x)) \|f'(x)\|$ при $x \in D \setminus B_0$ и $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0 .

Рассуждая покусочно на каждом B_l , $l = 1, 2, \dots$, согласно 1.7.6 в [23], получаем, что

$$\int_{S_r} \rho^{n-1} d\mathcal{A} = \int_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A} \geq \int_{S_r^*} \rho_*^{n-1} d\mathcal{A}_* \geq 1 \quad (13)$$

для почти всех S_r , и, следовательно, $\rho \in \text{ext adm } \Gamma$.

Наконец, используя замену переменных на каждом B_l , $l = 1, 2, \dots$, см., напр., теорему 3.2.5 в [23], ввиду счетной аддитивности интеграла, приходим к оценке

$$\int_D \frac{\rho^n(x)}{K_O(x, f)} dm(x) \leq \int_{f(D)} \rho_*^n(y) dm(y), \quad (14)$$

что и завершает доказательство. \square

Комбинируя предложение 1 и теорему 1, получаем еще одно важное следствие.

Следствие 3. Пусть $f : D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1, n-1}(D)$ с $K_O(\cdot, f) \in L_{\text{loc}}^{n-1}(D)$. Тогда f является кольцевым Q_* -гомеоморфизмом с $Q_*(x) = K_O^{n-1}(x, f)$.

Ввиду ограничений на объём данной публикации, приложения полученных результатов к теории локального и граничного поведения отображений классов Соболева с критическим показателем будут опубликованы отдельно.

Цитированная литература

1. Csörnyei M., Hencl S., Maly J. Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1, n-1}$ // J. Reine Angew. Math. – 2010. – No. 644. – P. 221–235.
2. Gehring F.W., Lehto O. On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1959. – No. 272. – P. 3–8.
3. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami Equation: A Geometric Approach. Developments of Mathematics, V. 26. – New York etc.: Springer, 2012.
4. Iwaniec T., Šverák V. On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – V. 118. – P. 181–188.

5. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
6. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. – New York: Springer-Verlag, 1973.
7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer, 2009.
8. *Menchoff D.* Sur les differentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – V. 105. – P. 75–85.
9. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – V. 96. – P. 117–150.
10. *Serrin J.* On the differentiability of functions of several variables // Arch. Rational Mech. Anal. – 1961. – V. 7. – P. 359–372.
11. *Tengvall V.* Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // Calc. Var. Partial Differential Equations. – 2014. – V. 51, No. 1–2. – P. 381–399.
12. *Väisälä J.* On quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1961. – No. 298. – P. 1–36.
13. *Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанова В.И., Салимов Р.Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и анализ. – 2013. – Т. 25, No. 4. – С. 101–124.
14. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* К теории нижних Q -гомеоморфизмов // Укр. мат. вестник. – 2008. – Т. 5, № 2. – С. 159–184.
15. *Kovtonyuk D., Ryazanov R.* On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. – 2008. – V. 104. – P. 291–306.
16. *Ковтонюк Д.А., Рязанова В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* К теории классов Орлича–Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – Т. 25, № 6. – С. 50–102.
17. *Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева (под общей ред. Рязанова В.И.). – К.: Наукова думка, 2013.
18. *Куратовский К.* Топология 1. – Москва: Мир, 1966.
19. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Ленинград: ЛГУ, 1985.
20. *Пonomарёв С.П.* Об N -свойстве гомеоморфизмов класса W_p^1 // Сиб. матем. ж. – 1987. – Т. 28, № 2. – С. 140–148.
21. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q -гомеоморфизмов // Сиб. матем. ж. – 2007. – Т. 48, № 6. – С. 1361–1376.
22. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949.
23. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.

References

1. *Csörnyei, M., Hencl, S., Malý, J.* (2010). Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. J. Reine Angew. Math., no. 644, pp. 221–235.
2. *Gehring, F.W., Lehto, O.* (1959). On the total differentiability of functions of a complex variable. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., no. 272, pp. 3–8.
3. *Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E.* (2012). The Beltrami Equation: A Geometric Approach. Developments of Mathematics. V. 26. New York etc.: Springer.
4. *Iwaniec, T., Šverák, V.* (1993). On mappings with integrable dilatation. Proc. Amer. Math. Soc., 118, pp. 181–188.
5. *Iwaniec, T., Martin, G.* (2001). Geometrical Function Theory and Non-linear Analysis. Oxford: Clarendon Press.
6. *Lehto, O., Virtanen, K.* (1973). Quasiconformal Mappings in the Plane. New York: Springer-Verlag.
7. *Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E.* (2009). Moduli in Modern Mapping Theory. New York: Springer.
8. *Menchoff, D.* (1931). Sur les differentielles totales des fonctions univalentes. Math. Ann., 105, pp. 75–85.

9. *Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E.* (2005). On ring solutions of Beltrami equation. *J. Anal. Math.*, 96, pp. 117–150.
10. *Serrin, J.* (1961). On the differentiability of functions of several variables. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 7, pp. 359–372.
11. *Tengvall, V.* (2014). Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 51, no. 1–2, pp. 381–399.
12. *Väisälä, J.* (1961). On quasiconformal mappings in space. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math.*, no. 298, pp. 1–36.
13. *Kovtonyuk, D.A., Petkov, I.V., Ryazanov, V.I., Salimov, R.R.* (2014). The boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations. *St. Petersburg Math. J.*, 25, no. 4, pp. 587–603.
14. *Kovtonyuk, D., Ryazanov, R.* (2008). On the theory of lower Q -homeomorphisms. *Ukr. Math. Bull.*, 5, no. 2, pp. 157–181.
15. *Kovtonyuk, D., Ryazanov, R.* (2008). On the theory of mappings with finite area distortion. *J. Anal. Math.*, 104, pp. 291–306.
16. *Kovtonyuk, D.A., Ryazanov, R.R., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A.* (2014). Toward the theory of the Orlicz–Sobolev classes. *St. Petersburg Math. J.*, 25, no. 6, pp. 929–963.
17. *Kovtonyuk, D.A., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (ed. Ryazanov, V.I.)* (2013). *Toward the Mapping Theory of the Classes of Sobolev and Orlicz-Sobolev*, Kiev: Naukova dumka (in Russian).
18. *Kuratowski, K.* (1968). *Topology*, V. 1. New York: Academic Press.
19. *Maz'ya, V.* (1985). *Sobolev Classes*. Berlin: Springer-Verlag.
20. *Ponomarev, S.P.* (1987). On the N -property of homeomorphisms of the class W_p^1 . *Siberian Math. J.*, 28, no. 2, pp. 291–298.
21. *Ryazanov, V.I., Sevost'yanov, E.A.* (2007). Equicontinuous classes of ring Q -homeomorphisms. *Siberian Math. J.*, 48, no. 6, pp. 1093–1105.
22. *Saks, S.* (1964). *Theory of the Integral*. Second revised edition. English translation by L. C. Young. With two additional notes by Stefan Banach. Dover Publications, Inc., New York.
23. *Federer, H.* (1969). *Geometric Measure Theory*. Springer.

O. S. Afanas'eva, V. I. Ryazanov, R. R. Salimov

On Sobolev classes with critical exponent.

It is established in the present paper that an arbitrary homeomorphism $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ of a domain in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, in the Sobolev class $W_{loc}^{1,n-1}$ with the outer dilatation $K_O(x, f) \in L_{loc}^{n-1}$ is the so-called ring Q -homeomorphism with $Q(x) = K_O^{n-1}(x, f)$ and also the so-called lower Q -homeomorphism with $Q(x) = K_O(x, f)$. These facts make possible to apply the theory of the local and boundary behavior of ring and lower homeomorphisms to the study of the Sobolev mappings with the critical exponent. Recall, given bounded domains D and D' in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, and a measurable function $Q : D \rightarrow (0, \infty)$, a homeomorphism $f : D \rightarrow D'$ is called a **ring Q -homeomorphism at a point $x_0 \in \overline{D}$** if $M(f(\Delta(C_1, C_2, D))) \leq \int_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|) dm(x)$ for all continua C_1 and C_2 in D from different components of the complement of any ring $A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \delta_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$, and for every measurable function $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ such that $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1$. Here $\Delta(C_1, C_2, D)$ denotes the collection of all paths joining C_1 and C_2 in D and $M(\Gamma)$ is the conformal modulus of the family Γ of paths γ in D (for a ring, it coincides with its capacity). A homeomorphism $f : D \rightarrow D'$ is said to be a **ring Q -homeomorphism in the domain in D** if f is so at every point $x_0 \in \overline{D}$. The conception of ring Q -homeomorphisms was first introduced in the paper Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equations // *J. Anal.*

Math. 96 (2005), 117–150; in the connection of investigations of the Beltrami equations in the plane and, later on, it was extended to the spatial case in the paper Ryazanov V.I., Sevost'yanov E.A. Equicontinuous classes of ring Q -homeomorphisms // Sibirsk. Mat. Zh. 48 (2007), no. 6, 1361–1376; transl. in Siberian Math. J. 48 (2007), no. 6, 1093–1105; see also the monographs Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation. A geometric approach. Developments in Mathematics, 26. Springer, New York, 2012; and Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2009. The ring Q -homeomorphisms are also studied in metric spaces by Smolovaya E.S. (at present Afanas'eva E.S.) in the paper Boundary behavior of ring Q -homeomorphisms in metric spaces // Ukrain. Mat. Zh., 62 (2010), no. 5, 682–689 (Russian); transl. in Ukrainian Math. J. 62 (2010), no. 5, 785–793. The conception of lower Q -homeomorphisms was introduced in the paper D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, On the theory of lower Q -homeomorphisms // Ukr. Mat. Visn. 5, no. 2 (2008), 159–184; transl. in Ukr. Math. Bull. 5, no. 2 (2008), 157–181; and the theory of these mappings has found interesting applications to the study of boundary value problems for the Beltrami equations, and also to the theory of the local and boundary behavior for the Orlicz–Sobolev classes, see e.g. the papers Kovtonyuk D.A., Petkov I.V., Ryazanov V.I., Salimov R.R. Boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Algebra i Analiz 25 (2013), no. 4, 101–124; transl. in St. Petersburg Math. J. 25 (2014), no. 4, 587–603; and Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On the theory of Orlicz–Sobolev classes // Algebra i Analiz 25 (2013), no. 6, 50–102; transl. in St. Petersburg Math. J. 25 (2014), no. 6, 929–963; see also the monograph Kovtonyuk D.A., Salimov R.R. Sevost'yanov E.A. (ed. Ryazanov V.I.). Toward the Mapping Theory of the Classes of Sobolev and Orlicz–Sobolev. – Kiev: Naukova dumka, 2013 (in Russian).

Keywords: Sobolev's classes, critical exponent, outer dilatation, lower and ring Q -homeomorphisms.

О. С. Афанасьєва, В. І. Рязанов, Р. Р. Салимов

Щодо класів Соболева з критичним показником.

У статті встановлено, що будь-який гомеоморфізм f класа Соболева $W_{\text{loc}}^{1,n-1}$ із зовнішньою ділятцією $K_O(x, f) \in L_{\text{loc}}^{n-1}$ є так званім нижнім Q -гомеоморфізмом із $Q(x) = K_O(x, f)$ та кільцевим Q -гомеоморфізмом із $Q(x) = K_O^{n-1}(x, f)$.

Ключові слова: класи Соболева, критичний показник, зовнішня ділятція, нижні і кільцеві Q -гомеоморфізми.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск;
Ин-т математики НАН Украины, Киев
es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com,
ruslan.salimov1@gmail.com

Получено 11.12.17

УДК 531.36, 517.977

©2017. В. В. Грушкова

БЕЗГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ С ОБХОДОМ ПРЕПЯТСТВИЙ

В работе исследуется задача поиска экстремума выпуклой функции при наличии ограничений в пространстве состояний системы. Предполагается, что аналитическое выражение функции, а также расположение и форма препятствий могут быть частично или полностью неизвестны. Основным результатом работы является новый класс функций управления для системы с динамикой интегратора. Полученные управления реализуют движение системы в окрестности градиентного потока соответствующей навигационной функции, используя только ее значения (но не производные), и таким образом обеспечивают свободное от столкновений с препятствиями движение системы к точке экстремума функции качества. Представленный класс управлений обобщает некоторые известные результаты и позволяет генерировать новые управления с разнообразными свойствами. Также показано, что использование безградиентных алгоритмов управления в задачах планирования движения с обходом препятствий позволяет избежать проблемы притяжения траекторий системы к нежелательному положению равновесия. Полученные результаты проиллюстрированы на нескольких примерах.

MSC: 34H15; 93C40; 93C41; 70Q05.

Ключевые слова: безградиентные алгоритмы управления; задача обхода препятствий; планирование движения; поиск экстремума; навигационная функция; аппроксимация со скобками Ли.

1. Введение.

Задачи поиска экстремума, целью которых является стабилизация управляемой системы в точке минимума или максимума некоторой функции, возникают во многих областях науки и имеют разнообразные практические применения [9]. Классические подходы к решению таких задач используют градиентные методы синтеза управлений, для которых требуется вычисление производных функции качества. Однако такие подходы не применимы в случаях частично или полностью неизвестного аналитического выражения функции качества и неизвестной точки экстремума, то есть в ситуациях, когда градиент функции качества не может быть явно вычислен. В связи с этим важной проблемой является получение безградиентных алгоритмов управления, использующих только значения функции качества. Существуют различные подходы к решению этой задачи (см., например, [18, 6]). В частности, эффективным подходом является использование метода аппроксимаций со скобками Ли, с помощью которого получено несколько типов управлений [3, 14, 15] для задач поиска экстремума. В работах [6, 5] получено описание общего класса функций управления, который как включает результаты, полученные в вышеуказанных работах, так и позволяет генерировать новые управления

Автор выражает благодарность профессору А. Л. Зуеву за содержательные обсуждения.

с различными свойствами. В данной статье такие управления будут применены к задаче поиска экстремума в областях с препятствиями для широкого класса функций качества. Отметим, что большинство методов стабилизации и планирования движения с обходом препятствий основаны на использовании градиентных алгоритмов управления, как, например, в работах [1, 4, 7, 8, 13, 17, 20, 19, 23] и др. Задача поиска экстремума при наличии препятствий рассмотрена только для частного случая функции качества, заданной как квадрат расстояния до искомой точки [2, 12].

Статья построена следующим образом. В разделе 2 описана постановка задачи и приведены некоторые вспомогательные результаты. В разделе 3 представлен класс функций управления, решающих поставленную задачу. Полученные результаты проиллюстрированы на нескольких примерах в разделе 4.

2. Постановка задачи и вспомогательные результаты.

В данной статье рассматривается система управления, описываемая уравнением интегратора. Будет представлен новый класс функций управления, которые решают задачу поиска экстремума функции J при наличии ограничений (препятствий). Введем следующие обозначения:

$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{\beta}_0 \leq 0\}$ – рабочее пространство с границей, заданной функцией $\beta_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\partial\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{\beta}_0 = 0\}$;

$\mathcal{O}_j = \{x \in \mathcal{W} : \beta_j \leq 0\}$ – препятствие, функции $\beta_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определяют границы препятствий: $\partial\mathcal{O}_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \beta_j = 0\}$, $j = \overline{1, N}$, $N \geq 1$;

$D = \mathcal{W} \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j$ – свободное от препятствий пространство (см. [8]).

Предположим, что функция J является строго выпуклой, и пусть $x^* \in \mathcal{W}$ удовлетворяет свойствам

$$J(x) > J^* = J(x^*) \text{ для всех } x \neq x^*, \beta_j(x^*) > 0, \quad j = \overline{0, N},$$

где $\beta_0(x) = -\tilde{\beta}_0(x)$.

Необходимо *построить такое управление* $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$, *что траектории* $x(t)$ *системы* $\dot{x} = u$ *с начальными значениями* $x(0) = x^0$ ($\beta_j(x^0) > 0$) *удовлетворяют следующим условиям:*

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow x^* \text{ при } t \rightarrow +\infty, \\ \beta_j(x(t)) &> 0 \text{ для всех } t \in [0, +\infty), \quad j = \overline{0, N}. \end{aligned} \tag{1}$$

Отметим, что аналитические выражения функций J, β_j и значения x^*, J^* могут быть неизвестны, но известны значения функций $J(x), \beta_j(x)$ для каждого $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, необходимо построить управление $u = u(t, J(x), \beta_0(x), \dots, \beta_N(x))$, использующее только значения функций $J(x), \beta_j(x)$, с которым траектории системы стремились бы к точке минимума функции $J(x)$, оставаясь при этом в свободном от препятствий пространстве.

Будем рассматривать сферическое рабочее пространство и препятствия:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{\beta}_0(x) = \|x\|^2 - r_0^2 \leq 0\}, \\ \mathcal{O}_j &= \{x \in \mathbb{R}^n : \beta_j(x) = \|x - x_o^j\|^2 - r_j^2 \leq 0\}, \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r_0, r_j > 0$ обозначают радиусы соответствующих сфер, $x_o^j \in \mathbb{R}^n$ – центр j -го препятствия. Предполагается, что препятствия не пересекаются, $\overline{\mathcal{O}_i} \subset \text{int } \mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{O}_i} \cap \overline{\mathcal{O}_j} = \emptyset$ для всех $i \neq j$, $i, j = \overline{1, N}$, то есть

$$\|x_o^j\| + r_j < r_0, \quad \|x_o^j - x_o^l\| > r_j + r_l, \quad j, l = \overline{1, N}, \quad (3)$$

Для обеспечения движения системы в свободном от препятствий пространстве будет использован метод навигационных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8]. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ является компактным связным аналитическим многообразием с краем. Отображение $\varphi_\mu : D \rightarrow [0, 1]$ называется *навигационной функцией* в D , если оно обладает следующими свойствами:

- дифференцируемость: $\varphi_\mu \in C^2(D; [0, 1])$;
- полярность в x^* : φ_μ имеет единственный минимум в $x^* \in \text{int } D$;
- морсовость в D : все критические точки φ_μ в D являются невырожденными;
- допустимость: $\partial D = \varphi_\mu^{-1}(1)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1 [13]. Пусть пространство \mathcal{W} и множества \mathcal{O}_j имеют вид (2), выполнено условие (3), D является свободным от препятствий пространством, то есть $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x) = \prod_{j=0}^N \beta_j(x) \geq 0\}$, и пусть функция $\varphi_\mu : D \rightarrow [0, 1]$ определены следующим образом:

$$\varphi_\mu(x) = \frac{J(x)}{(J^\mu(x) + \beta(x))^{1/\mu}}, \quad \mu > 0. \quad (4)$$

Предположим, что $J \in C^2(D; \mathbb{R}^n)$ является строго выпуклой функцией, собственные значения матрицы $\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$ содержатся в интервале $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ ($\lambda_{\min} > 0$), $x^* = \arg \min_x J(x) \in \text{int } D$, $J(x^*) \geq 0$. Предположим также, что

$$\lambda_{\max}/\lambda_{\min} < 1 + \min_{i=\overline{1, N}} \frac{1}{r_i} \|x_o^i - x^*\|.$$

Тогда для любого $\Delta > 0$ существует такая константа $\bar{\mu}(\Delta)$, что для всех $\mu > \bar{\mu}(\Delta)$ функция φ_μ является навигационной функцией с минимумом в точке \bar{x} , где $\|\bar{x} - x^*\| < \Delta$. Кроме того, если $J(x^*) = 0$ или $\nabla \beta(x^*) = 0$, то $\bar{x} = x^*$.

Таким образом, можно показать (см. например [13]), что если функция $\varphi_\mu(x)$ удовлетворяет условиям теоремы с достаточно большим $\mu > 0$, то траектории системы

$$\dot{x}(t) = -\nabla \varphi_\mu(x(t)), \quad 0 \leq t < t^* \leq +\infty \quad (5)$$

при почти всех начальных условиях $x(0) = x^0 \in \text{int } D$ стремятся асимптотически к бесконечно малой окрестности точки минимума функции $J(x)$, оставаясь при этом в свободном от препятствий пространстве D . Однако аналитические выражения функций J, β_j могут быть неизвестными, поэтому важной задачей является построение управляющих алгоритмов, которые зависят только от значений этих функций и не используют их производные (и, соответственно, производные навигационной функции φ_μ). В этой статье будет представлен класс *безградиентных* управляющих алгоритмов, решающих такую задачу путем аппроксимации траекторий системы (5).

Одним из основных подходов к решению задачи поиска экстремума является метод аппроксимаций со скобками Ли (см., например, [3]). В статьях [5, 6] предложено развитие этого подхода на основании методов стабилизации и планирования движения неголономных систем, используемых, например, в [21, 22, 24]. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{\ell} f_i(x)u_i(t), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f_i : D \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Обозначим производную Ли как $L_{f_j} f_i(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_i(x + s f_j(x)) - f_i(x)}{s}$.

Лемма 2.1 [6]. *Предположим, что векторные f_i удовлетворяют условию Липшица в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f_i \in C^2(D \setminus \Xi; \mathbb{R})$, где $\Xi = \{x \in D : f_i(x) = 0 \text{ для всех } 1 \leq i \leq \ell\}$. Предположим также, что $L_{f_j} f_i, L_{f_l} L_{f_j} f_i \in C(D; \mathbb{R}^n)$, для всех $i, j, l = \overline{1, \ell}$. Если $x(t) \in D, t \in [0, \tau]$, является решением системы (6) с $u \in C([0, \tau]; \mathbb{R}^m)$ и $x(0) = x^0 \in D$, то $x(t)$ представимо в виде ряда Вольтерры следующим образом:*

$$x(t) = x^0 + \sum_{i=1}^{\ell} f_i(x^0) \int_0^t u_i(v) dv + \sum_{i,j=1}^{\ell} L_{f_j} f_i(x^0) \int_0^t \int_0^v u_i(v) u_j(s) ds dv + R(t), \quad t \in [0, \tau], \quad (7)$$

где

$$R(t) = \sum_{i,j,l=1}^{\ell} \int_0^t \int_0^v \int_0^s L_{f_l} L_{f_j} f_i(x(p)) u_i(v) u_j(s) u_l(p) dp ds dv$$

является остаточным членом ряда Вольтерры.

Отметим, что в отличие от других работ, использующих ряды Вольтерры (например, [10, 21]), лемма 2.1 позволяет разложить в ряд Вольтерры решения системы, векторные поля которой могут не являться непрерывно дифференцируемыми. Будем использовать также следующий результат.

Лемма 2.2 [6, 21]. *Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n, x^* \in D$, и пусть $x(t) \in D, 0 \leq t \leq \tau$, является решением системы (6). Предположим, что существует такие константы $M, L > 0$, что*

$$\|f_i(x)\| \leq M, \quad \|f_i(x) - f_i(y)\| \leq L\|x - y\|,$$

для всех $x, y \in D$, $i = \overline{1, \ell}$. Тогда

$$\|x(t) - x(0)\| \leq \frac{1}{L} \max_{1 \leq i \leq n} f_i(x(0))(e^{\nu Lt} - 1) \leq \frac{M}{L}(e^{\nu Lt} - 1), \quad t \in [0, \tau], \quad (8)$$

$$c \nu = \max_{t \in [0, \tau]} \sum_{i=1}^{\ell} |u_i(t)|.$$

3. Основные результаты.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{2n} (g_i \circ \varphi_\mu)(x) u_i^\varepsilon(t) e_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

где e_i – единичный вектор в \mathbb{R}^n с ненулевой i -ой компонентой при $i \leq n$, и ненулевой $(i - n)$ -ой компонентой при $n + 1 \leq i \leq 2n$, $\varepsilon > 0$, $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \neq k_j$ для всех $i \neq j$,

$$u_i^\varepsilon(t) = \begin{cases} 2\sqrt{\pi k_i \varepsilon^{-1}} \cos(2\pi k_i t \varepsilon^{-1}), & \text{для всех } i = \overline{1, n}, \\ 2\sqrt{\pi k_{i-n} \varepsilon^{-1}} \sin(2\pi k_{i-n} t \varepsilon^{-1}), & \text{для всех } i = \overline{n+1, 2n}, \end{cases} \quad (10)$$

и функция φ_μ задана формулой (4). В следующей теореме сформулированы условия, при которых траектории системы (9) обладают свойствами (1).

Теорема 3.1. *Предположим, что функция $J \in C^2(D; \mathbb{R})$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 с $x^* \in \text{int} D$, $J(x^*) = 0$, и пусть дана такая константа $\mu > 0$, что функция φ_μ , заданная формулой (4), является навигационной функцией с минимумом в $x^* \in \text{int} D$. Пусть функции g_i связаны соотношениями*

$$g_{i+n}(z) = -\alpha g_i(z) \int \frac{dz}{g_i(z)^2}, \quad \alpha > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

и выполнены следующие условия:

C1.1 функции $g_i \circ \varphi_\mu \in C^2(D \setminus x^*; \mathbb{R})$, функции $L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu$, $L_{g_l} L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu \in C(D; \mathbb{R})$, для всех $i, j, l = \overline{1, 2n}$;

C1.2 функции $g_i \circ \varphi_\mu$ удовлетворяют условию Липшица на любом компакте $\chi \subset D$, и $g_i \circ \varphi_\mu(x) = 0 \iff x = x^*$;

C1.3 существует такое $H \geq 0$, что $\sum_{i,j,l=1}^{2n} \|L_{g_l} L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu(x)\| \leq H \|\nabla \varphi_\mu(x)\|$ для всех $x \in D$.

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что все решения системы (9) с функциями $u_i^\varepsilon(t)$, заданными формулой (10), и начальными условиями $x(0) = x^0 \in \text{int} D$ корректно определены для всех $t \in [0, +\infty)$ и обладают свойствами (1):

$$\begin{aligned} x(t) &\in \text{int} D \quad \text{для всех } t \geq 0, \\ x(t) &\rightarrow x^* \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in \text{int } D$. Определим $\varepsilon_0 > 0$ таким образом, чтобы соответствующие решения $x(t)$ системы (9) с функциями $u_i^\varepsilon(t)$, заданными формулой (10), были корректно определены для всех $t \in [0, \varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Обозначим $D_0 = \mathcal{L}_{\varphi_\mu(x^0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_\mu(x) \leq \varphi_\mu(x^0)\} \subset D$, $d_0 = \rho(D_0, \partial D) > 0$, $d_1 \in (0, d_0)$, $M_g = \sup_{\substack{x \in D \\ 1 \leq i \leq 2n}} |g_i \circ \varphi_\mu(x)|$,

$$\nu = \max_t \sum_{i=1}^{2n} |u_i^\varepsilon(t)| = 2\sqrt{2\pi}\varepsilon^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sqrt{k_i}, \quad (12)$$

и положим

$$0 < \varepsilon_0 < \left(2\sqrt{2\pi}L \sum_{i=1}^n \sqrt{k_i}\right)^{-2} \ln^2 \left(\frac{Ld_1}{M_g} + 1\right). \quad (13)$$

Тогда из леммы 2.2 следует, что $\|x(t) - x^0\| < d_1$, для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $t \in [0, \varepsilon]$, т.е. $x(t) \in D$ для всех $t \in [0, \varepsilon]$.

Используя лемму 2.1, запишем разложение в ряд Вольтерры решений системы (9) с управлениями $u_i^\varepsilon(t)$, заданными формулой (10):

$$\begin{aligned} x(\varepsilon) &= x^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [g_i e_i, g_{i+n} e_i] \circ \varphi_\mu(x^0) \int_0^\varepsilon \int_0^\tau (u_{i+n}(\tau)u_i(\theta) - u_i(\tau)u_{i+n}(\theta)) d\theta d\tau + R(\varepsilon) \\ &= x^0 - \varepsilon \alpha \nabla \varphi_\mu(x^0) + R(\varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

где $R(\varepsilon)$ – остаточный член ряда Вольтерры,

$$R(\varepsilon) = \sum_{i,j,l=1}^{2n} \int_0^\varepsilon \int_0^v \int_0^s L_{g_l} L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu(x(p)) u_i(v) u_j(s) u_l(p) dp ds dv. \quad (15)$$

Из условия С1.3 и оценки (12) следует, что

$$\|R(\varepsilon)\| \leq \frac{H\nu^3 \varepsilon^3}{6} \|\nabla \varphi_\mu(x)\| = H_R \varepsilon^{3/2} \|\nabla \varphi_\mu(x)\|, \quad (16)$$

с $H_R = \frac{8}{3} H \pi \sqrt{2\pi} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{k_i}\right)^3$. Применим к функции $\varphi_\mu(x(\varepsilon))$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(x(\varepsilon)) &= \varphi_\mu(x^0) + \langle \nabla \varphi_\mu^T(x^0), x(\varepsilon) - x^0 \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x^2} \Big|_\theta (x(\varepsilon) - x^0), x(\varepsilon) - x^0 \right\rangle \\ &\leq \varphi_\mu(x^0) - \varepsilon \alpha \left(1 - \frac{m_\varphi \varepsilon \alpha}{2}\right) \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\|^2 \\ &\quad + (1 + m_\varphi \varepsilon \alpha) \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\| \cdot \|R(\varepsilon)\| + \frac{m_\varphi}{2} \|R(\varepsilon)\|^2, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\|\theta - x^0\| \leq \|x(\varepsilon) - x^0\|$, $m_\varphi = \sup_{x \in D} \left\| \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x^2} \right\|$. Покажем, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что

$$\left((1 + \alpha m_\varphi \varepsilon) \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\| + \frac{m_\varphi}{2} \|R(\varepsilon)\| \right) \|R(\varepsilon)\| < \alpha \varepsilon \left(1 - \frac{\alpha m_\varphi \varepsilon}{2} \right) \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\|^2, \quad (18)$$

для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и $x^0 \in D$: $\nabla \varphi_\mu(x^0) \neq 0$. Тогда из неравенства (17) будет следовать, что

$$\varphi_\mu(x(\varepsilon)) < \varphi_\mu(x^0). \quad (19)$$

Действительно, из оценки (16) следует, что

$$\begin{aligned} & \left((1 + \alpha m_\varphi \varepsilon) \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\| + \frac{m_\varphi}{2} \|R(\varepsilon)\| \right) \|R(\varepsilon)\| \\ & \leq \left((1 + \alpha m_\varphi \varepsilon) + \frac{m_\varphi}{2} H_R \varepsilon^{3/2} \right) H_R \varepsilon^{3/2} \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\|^2. \end{aligned}$$

Определяя $\varepsilon_1 > 0$ из условия $\frac{m_\varphi H_R^2}{2\alpha} \varepsilon_1^2 + \frac{m_\varphi}{2} \varepsilon_1 + \left(\frac{1}{\alpha} + m_\varphi \varepsilon_1 \right) H_2 \sqrt{\varepsilon_1} < 1$, имеем, что неравенство (18) выполнено для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$.

Таким образом, доказано, что $\varphi_\mu(x(\varepsilon)) < \varphi_\mu(x^0)$ при условии, что $\nabla \varphi_\mu(x^0) \neq 0$. Итерируя полученное неравенство для всех $x^0 \in D_0$, получаем

$$\varphi_\mu(x((j+1)\varepsilon)) \leq \varphi_\mu(x(j\varepsilon)) \quad \text{для } j = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

и кроме того, $x((j+1)\varepsilon) \in D_0$ для всех $j = 0, 1, 2, \dots$ по построению D_0 . Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$x^j = h(x^{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где отображение $h : D_0 \rightarrow D_0$ ставит в соответствие точке $\xi \in D_0$ решение $x(t)$, $t \in [0, \varepsilon]$, системы (9) с начальным условием $x|_{t=0} = \xi$ и управлениями $u^\varepsilon(t)$ заданными формулой (10); предполагается, что $h(\xi) = \xi$ если $(g_i \circ \varphi_\mu)(\xi) = 0$. Можно показать, что $x^j = x(j\varepsilon)$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Как показано ранее, $x(t)$ корректно определено на каждом интервале $I_j = [\varepsilon j, \varepsilon(j+1))$ и $x(t) \in \text{int } D$ для всех $t \geq 0$.

Из принципа инвариантности [11, 16], свойств отображения h и (20) следует, что

$$x^j \rightarrow S_0 \quad \text{при } j \rightarrow +\infty, \quad (22)$$

где S_0 является наибольшим инвариантным подмножеством множества $S = \{x \in D_0 : \nabla \varphi_\mu(x) = 0\}$ динамической системы (21). Из условия C1.2, $S_0 = x^*$, то есть

$$x^j = x(j\varepsilon) \rightarrow x^* \quad \text{при } j \rightarrow +\infty. \quad (23)$$

Для произвольного $t \geq 0$ обозначим целую часть $\frac{t}{\varepsilon}$ как t_{in}^ε . Отметим, что $0 \leq t - t_{in}^\varepsilon \varepsilon < \varepsilon$. Используя неравенство треугольника и лемму 2.2, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*\| &= \|x(t) - x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon) + x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon) - x^*\| \leq \|x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon) - x^*\| + \|x(t) - x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon)\| \\ &\leq \|x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon) - x^*\| + \frac{1}{L} \max_{1 \leq i \leq 2n} \|g_i \circ \varphi_\mu(x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon))\| (e^{\nu L \varepsilon} - 1). \end{aligned}$$

Из С1.2 следует, что $g_i \circ \varphi_\mu(x(t_{in}^\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Принимая во внимание свойство (23), получаем $x(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow +\infty$. \square

Отметим, что для доказательства теоремы важными являются условия С1.2 и С1.3, которые, однако, сужают класс допустимых функций g_i и J . Подобно подходу статьи [6], при отсутствии этих условий можно показать, что траектории системы (9) с функциями $u_i^\varepsilon(t)$, заданными формулой (10), стремятся к некоторой окрестности множества критических точек S , радиус которой уменьшается с ростом ε . Этот результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3.2. *Предположим, что функция $J \in C^2(D; \mathbb{R})$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 с $x^* \in \text{int}D$, навигационная функция φ_μ задана формулой (4) с некоторым $\mu > 0$. Пусть функции g_i связаны соотношениями (11) и удовлетворяют условию*

С2.1 функции $g_i \circ \varphi_\mu \in C^2(D \setminus S; \mathbb{R})$, где $S = \{x \in D_0 : \nabla \varphi_\mu(x) = 0\}$, $D_0 = \mathcal{L}_{\varphi_\mu(x^0)} = \{x \in D : \varphi_\mu(x) \leq \varphi_\mu(x^0)\}$, функции $L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu$, $L_{g_l} L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu \in C(D; \mathbb{R})$, для всех $i, j, l = \overline{1, 2n}$;

Тогда для каждого $\eta > 0$ такого, что $\mathcal{L}_\eta = \{x \in D_0 : \varphi_\mu(x) \leq \eta\} \supset S$ существуют такие $\varepsilon, T > 0$, что все решения системы (9) с функциями $u_i^\varepsilon(t)$, заданными формулой (10), и начальными условиями $x^0 \in \text{int}D$ корректно определены для всех $t \in [0, +\infty)$ и обладают следующими свойствами:

$$x(t) \in \text{int}D \text{ для всех } t \geq 0, \quad x(t) \in \mathcal{L}_\eta \text{ для всех } t \geq T.$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in \text{int}D$. Аналогично доказательству теоремы 3.1, определим $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы соответствующие решения $x(t)$ системы (9) с управлениями $u^\varepsilon(t)$ (10) были корректно определены для всех $t \in [0, \varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Пусть дано такое $\eta > 0$, что $S \subset \mathcal{L}_\eta$, и пусть $x^0 \in \text{int}D \setminus \mathcal{L}_\eta$ (случай $x^0 \in \mathcal{L}_\eta$ будет рассмотрен позднее). Зафиксируем η_0, η_{\min} так, чтобы $S \subset \mathcal{L}_{\eta_{\min}/2} \subset \mathcal{L}_{\eta_{\min}} \subset \mathcal{L}_{\eta_0} \subset \mathcal{L}_\eta$, и положим $\tilde{d} = \min\{\rho(\mathcal{L}_{\eta_{\min}/2}, \mathcal{L}_{\eta_{\min}}), \rho(\mathcal{L}_{\eta_{\min}}, \mathcal{L}_{\eta_0}), \rho(\mathcal{L}_{\eta_0}, \mathcal{L}_\eta)\}$,

$$0 < \tilde{\varepsilon}_0 < \left(2\sqrt{2\pi}L \sum_{i=1}^n \sqrt{k_i}\right)^{-2} \ln^2 \left(\frac{L\tilde{d}_1}{M_g} + 1\right).$$

Тогда в силу леммы 2.2 справедливы следующие утверждения:

- P1) если $x^0 \in \mathcal{L}_{\eta_0}$, то $x(t) \in \mathcal{L}_\eta$ для всех $t \in [0, \varepsilon]$;
- P2) если $x^0 \in D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$ то $x^0 \in D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}/2}$ для всех $t \in [0, \varepsilon]$.
- P3) если $x^0 \in \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$ то $x^0 \in \mathcal{L}_{\eta_0}$ для всех $t \in [0, \varepsilon]$.

Из С2.1, P2) и леммы 2.1 следует, что представление (14) справедливо для всех $x^0 \in \text{int}D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$. Кроме того, справедлива следующая оценка остаточного члена $R(\varepsilon)$:

$$\|R(\varepsilon)\| \leq \frac{H\nu^3\varepsilon^3}{6} \|\nabla \varphi_\mu(x)\| = \tilde{H}_R \varepsilon^{3/2},$$

с $\tilde{H}_R = \frac{8}{3}H\pi\sqrt{2\pi}\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{k_i}\right)^3 \sup_{x \in D} \|\nabla\varphi_\mu(x)\|$. Аналогично (17), имеем

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(x(\varepsilon)) \leq & \varphi_\mu(x^0) - \varepsilon\alpha\left(1 - \frac{\alpha m_\varphi \varepsilon}{2}\right) \|\nabla\varphi_\mu(x^0)\|^2 \\ & - (1 + \alpha m_\varphi \varepsilon) \|\nabla\varphi_\mu(x^0)\| \tilde{H}_R \sqrt{\varepsilon} - \frac{m_\varphi}{2} \tilde{H}_R^2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

В силу непрерывности $\nabla\varphi_\mu(x)$, существуют такие λ_1, λ_2 , что

$$0 < \lambda_1 \leq \|\nabla\varphi_\mu(x^0)\| \leq \lambda_2 \text{ для всех } x^0 \in \overline{D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}/2}}.$$

Тогда

$\varphi_\mu(x(\varepsilon)) \leq \varphi_\mu(x^0) - \varepsilon\alpha\left(\left(1 - \frac{\alpha m_\varphi \varepsilon}{2}\right)\lambda_1^2 - (1 + \alpha m_\varphi \varepsilon)\lambda_2\tilde{H}_R\sqrt{\varepsilon} - \frac{m_\varphi}{2}\tilde{H}_R^2\varepsilon^2\right)$. Определяя $\tilde{\varepsilon}_1 > 0$ из условия

$$\frac{m_\varphi}{2\alpha\lambda_1^2}\tilde{H}_R^2\tilde{\varepsilon}_1^2 + \frac{m_\varphi\tilde{\varepsilon}_1}{2} + \left(\frac{1}{\alpha} + m_\varphi\tilde{\varepsilon}_1\right)\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\tilde{H}_R\sqrt{\tilde{\varepsilon}_1} < 1,$$

имеем, что для всех $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_1]$ решения системы (9) с функциями u_i^ε , заданными формулой (10) и начальными условиями $x^0 \in \text{int } D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$ обладают свойством $\varphi_\mu(x(\varepsilon)) < \varphi_\mu(x^0)$.

Итерируя полученное неравенство для $x^0 \in \text{int } D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$, в силу непрерывности функции φ_μ получаем, что существует такое $N \geq 0$, что

$$x(j\varepsilon) \in D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}} \text{ для всех } j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad x(N\varepsilon) \in \mathcal{L}_{\eta_{\min}}.$$

В силу P2, $x(j\varepsilon) \in D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}/2}$ для $j = 0, 1, 2, \dots, N$. Таким образом, представление (14) остается справедливым для всех $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Кроме того, в силу P3, $x(t) \in \mathcal{L}_{\eta_0}$ для всех $t \in [N\varepsilon; (N+1)\varepsilon]$. Возможны два случая:

i) $x((N+1)\varepsilon) \in \mathcal{L}_{\eta_0} \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$. Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к выводу, что $x(t) \in \mathcal{L}_\eta$ для всех $t \in [(N+1)\varepsilon; (N+2)\varepsilon]$. Кроме того, $\varphi_\mu((N+2)\varepsilon) \leq \varphi_\mu((N+1)\varepsilon)$, следовательно, $x((N+2)\varepsilon) \in \mathcal{L}_{\eta_0}$.

ii) $x((N+1)\varepsilon) \in \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$. Тогда из P3 следует, что $x(t) \in \mathcal{L}_{\eta_0}$ для всех $t \in [(N+1)\varepsilon; (N+2)\varepsilon]$.

Таким образом, в обоих случаях $x(t) \in \mathcal{L}_\eta$ для всех $t \in [(N+1)\varepsilon; (N+2)\varepsilon]$, и $x((N+2)\varepsilon) \in \mathcal{L}_{\eta_0}$. Итерируя i), ii), приходим к выводу, что $x(t) \in \mathcal{L}_\eta$ для всех $t \geq (N+1)\varepsilon$. \square

4. Примеры.

Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 3.5\}$, $J(x) = (x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2$, $x^* \in W$. Тогда система (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2\sqrt{\pi k_1 \varepsilon^{-1}} \left(g_1 \circ \varphi_\mu(x) \cos(2\pi k_1 \varepsilon^{-1} t) + g_3 \circ \varphi_\mu(x) \sin(2\pi k_1 \varepsilon^{-1} t) \right), \\ \dot{x}_2 &= 2\sqrt{\pi k_2 \varepsilon^{-1}} \left(g_2 \circ \varphi_\mu(x) \cos(2\pi k_2 \varepsilon^{-1} t) + g_4 \circ \varphi_\mu(x) \sin(2\pi k_2 \varepsilon^{-1} t) \right). \end{aligned} \tag{24}$$

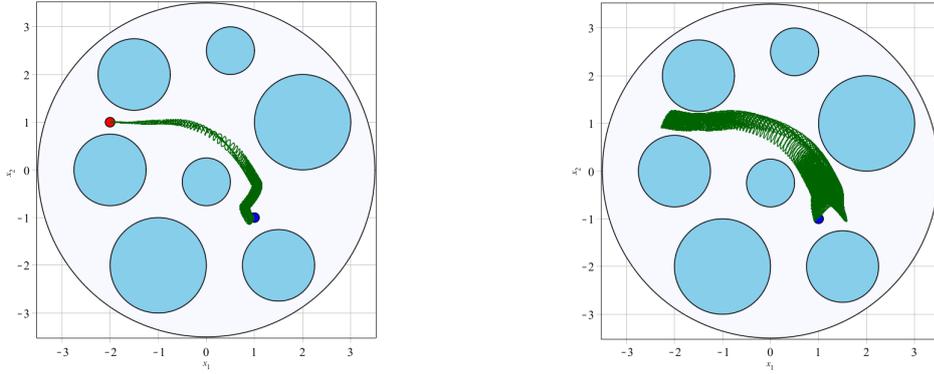


Рис. 1. Графики траекторий системы (24) с функциями g_i вида (25) (слева) и (26) (справа), $x^0 = (1, 1)^T$, $x^* = (-2, 1)^T$, $\varepsilon = 0.1$, $\mu = 5$.

Для всех примеров полагаем $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. На рисунке 1 (слева) приведен график траектории системы (24) в пространстве с семью препятствиями, с функциями

$$\begin{aligned} g_1(z) = g_2(z) &= \sqrt{\frac{1-e^{-z}}{1+e^{z}}} \sin(e^{z}+2 \ln(e^{z}-1)), \\ g_3(z) = g_4(z) &= \sqrt{\frac{1-e^{-z}}{1+e^{z}}} \cos(e^{z}+2 \ln(e^{z}-1)). \end{aligned} \quad (25)$$

В рассмотренном случае функции g_i удовлетворяют условиям теоремы 3.1, что обеспечивает затухание колебаний траекторий системы при приближении к x^* . Для сравнения рассмотрим управления, аналогичные предложенным в [14], то есть возьмем

$$g_1(z) = g_2(z) = \sin(z), \quad g_3(z) = g_4(z) = \cos(z). \quad (26)$$

Поскольку $g_1, g_2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^*$, такие управления обеспечивают притяжение траекторий системы только к некоторой окрестности x^* , см. рис. 1 (справа). Следует также отметить, что использование градиентных управлений позволяет избежать проблемы нежелательных положений равновесия, возникающих в следствии наличия отличных от x^* точек, в которых $\nabla \phi_\mu(x) = 0$ при определенном расположении препятствий (например, в случае симметричного расположения препятствий относительно прямой, соединяющей x^0 и x^*). На рисунке 2 приведены графики траекторий системы (24) и системы (5) с градиентным алгоритмом управления, иллюстрирующие это свойство.

Теоремы 3.1–3.2 доказаны в предположении, что потенциальная функция удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Отметим, что, как описывается, например, в [13], не всегда возможно построить навигационную функцию вида (4). Кроме того, время, за которое траектории системы с управлением, использующим функции ви-

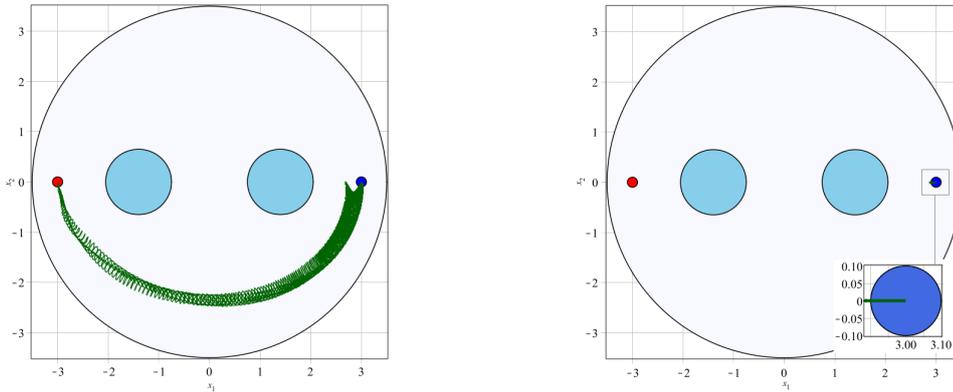


Рис. 2. Графики траекторий системы (24) с функциями g_i вида (25) (слева) и системы (5) (справа), $x^0 = (3, 0)^T$, $x^* = (-3, 0)^T$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 2$.

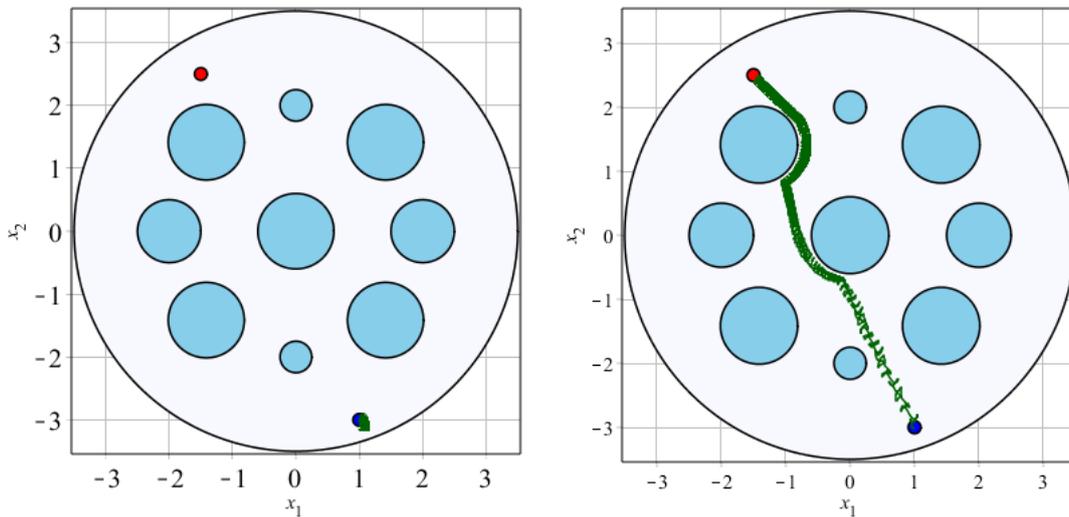


Рис. 3. Графики траекторий системы (24) функциями g_i вида (26), $x^0 = (-3, 1)^T$, $x^* = (-1.5, 2.5)^T$, $\varepsilon = 0.025$. Слева: с функциями $g_i \circ \varphi_\mu$, φ_μ задана формулой (4), $\mu = 2$, $t \in [0, 1000]$; справа: с функциями $g_i \circ P_\alpha$, P_α задана формулой (27), $\alpha = 20$, $t \in [0, 10]$.

да (4), достигают заданной окрестности x^* , значительно возрастает с увеличением количества препятствий. В таких случаях целесообразным является использование других потенциальных функций, поэтому дальнейший интерес представляет обобщение предложенного в статье подхода на более широкие классы потенциальных функций. Для примера, на рис. 3 показаны графики траекторий системы (24)

в пространстве с девятью препятствиями при использовании навигационной функции вида (4) и потенциальной функции, предложенной в [7, 19]:

$$P_\alpha(x) = J(x) \left(1 + \frac{\alpha}{\beta(x)} \right), \alpha > 0. \quad (27)$$

5. Выводы.

В данной статье представлен новый класс безградиентных алгоритмов управления для задачи планирования движения с обходом препятствий. С одной стороны, полученные результаты позволяют гарантировать свободное от столкновений с препятствиями движение системы к точке экстремума для широкого класса функций качества. С другой стороны, использование безградиентных алгоритмов планирования движения системы с обходом препятствий позволяет получить более простые формулы для функций управления. Кроме того, такие управления используют только значения функции качества и расстояния до препятствий, и могут быть использованы в случаях неизвестного расположения и формы препятствий.

Цитированная литература

1. *Dimarogonas D.V., Loizou S.G., Kyriakopoulos K.J., Zavlanos M.M.* A feedback stabilization and collision avoidance scheme for multiple independent non-point agents // *Automatica*. – 2005. – Vol. 42, No. 2. – P. 229–243.
2. *Dürr H.-B., Stanković M. S., Dimarogonas D.V., Ebenbauer C., Johansson K. H.* Obstacle avoidance for an extremum seeking system using a navigation function // *Proc. of 2013 American Control Conference*. – 2013. – P. 4062–4067.
3. *Dürr H.-B., Stanković M. S., Ebenbauer C., Johansson K. H.* Lie Bracket Approximation of Extremum Seeking Systems // *Automatica*. – 2013. – Vol. 49. – P. 1538–1552.
4. *Ge S.S., Cui Y.J.* Dynamic motion planning for mobile robots using potential field method // *Autonomous Robots*. – 2001. – Vol. 13, No. 3. – P. 207–222.
5. *Grushkovskaya V., Michalowsky S., Zuyev A., May M., Ebenbauer C.* A family of extremum seeking laws for a unicycle model with a moving target: theoretical and experimental studies // *Proc. of 17th annual European Control Conference*. – 2018. – 6 p. (to appear).
6. *Grushkovskaya V., Zuyev A., Ebenbauer C.* On a class of generating vector fields for the extremum seeking problem: Lie bracket approximation and stability properties // *Automatica*. – 2018. – Vol. 94. – P. 151–160.
7. *Khatib O.* Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots // *The International Journal of Robotics Research*. – 1986. – Vol. 5, No. 1. P. 90–98.
8. *Koditschek D.E., Rimon E.* Robot navigation functions on manifolds with boundary // *Advances in applied mathematic*. – 1990. – Vol. 11, No. 4. – P. 412–442.
9. *Krstić M., Ariyur K.B.* Real-Time optimization by Extremum Seeking Control. – Wiley-Interscience, 2003.
10. *Lamnabhi-Lagarigue F.* Volterra and Fliess series expansions for nonlinear systems. In W. S. Levine, editor, *The Control Handbook*. – 1995. – P. 879–888.
11. *LaSalle J.P.* The stability and control of discrete processes. – Springer Science & Business Media, 2012.
12. *Montenbruck J.M., Dürr H.-B., Ebenbauer C., Allgöwer F.* Extremum seeking and obstacle avoidance on the special orthogonal group // *IFAC Proceedings Volumes*. – 2014. – Vol. 47, No. 3. – P. 8229–8234.

13. *Paternain S., Koditschek D.E., Ribeiro A.* Navigation functions for convex potentials in a space with convex obstacles // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2017.
14. *Scheinker A., Krstić M.* Extremum seeking with bounded update rates // Systems & Control Letters. – 2014. – Vol. 63. – P. 25–31.
15. *Scheinker A., Krstić M.* Non-C2 Lie bracket averaging for nonsmooth extremum seekers // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 2014. – Vol. 136, No. 1. – P. 011010-1–011010-10.
16. *Sundarapandian V.* An invariance principle for discrete-time nonlinear systems // Applied Mathematics Letters. – 2003. – Vol. 16, No. 1. – P. 85–91.
17. *Tanner H.G., Loizou S.G., Kyriakopoulos K.J.* Nonholonomic stabilization with collision avoidance for mobile robots // IROS. – 2001. – P. 1220–1225.
18. *Tan Y., Moase W.H., Manzie C., Nešić D, Mareels I.* Extremum seeking from 1922 to 2010 // Proc. 29th Chinese Control Conf. – 2010. – P. 14–26.
19. *Vanualailaia J., Bibhya S., Nakagiri S.* An asymptotically stable collision-avoidance system // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2008. – Vol. 43. – P. 925–932.
20. *Urukubo T.* Stability analysis and control of nonholonomic systems with potential fields // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 1–2. – P. 121–137.
21. *Zuyev A.* Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls // SIAM J. on Control and Optimization. – 2016. – Vol. 54, No. 3. – P. 1678–1696.
22. *Zuyev A., Grushkovskaya V.* Motion planning for control-affine systems satisfying low-order controllability conditions // International Journal of Control. – 2017. – Vol. 90, No. 11. – P. 2517–2537.
23. *Zuyev A., Grushkovskaya V.* Obstacle Avoidance Problem for Driftless Nonlinear Systems with Oscillating Controls // SIFAC-PapersOnLine. – 2017. – Vol. 50, No. 1. – P. 10476–10481.
24. *Zuyev A., Grushkovskaya V., Benner P.* Time-varying stabilization of a class of driftless systems satisfying second-order controllability conditions // Proc. of European Control Conference 2016. – 2016. – P. 575–580.

References

1. *Dimarogonas, D.V., Loizou, S.G., Kyriakopoulos, K.J., Zavlanos, M.M.* (2005). A feedback stabilization and collision avoidance scheme for multiple independent non-point agents. *Automatica*, 42, No. 2, pp. 229–243.
2. *Dürr, H.-B., Stanković, M.S., Dimarogonas, D.V., Ebenbauer, C., Johansson, K.H.* (2013). Obstacle avoidance for an extremum seeking system using a navigation function. *Proc. of 2013 American Control Conference*, pp. 4062–4067.
3. *Dürr, H.-B., Stanković, M.S., Ebenbauer, C., Johansson, K.H.* (2013). Lie Bracket Approximation of Extremum Seeking Systems. *Automatica*, 49, pp. 1538–1552.
4. *Ge, S.S., Cui, Y.J.* (2001). Dynamic motion planning for mobile robots using potential field method. *Autonomous Robots*, 13, No. 3, pp. 207–222.
5. *Grushkovskaya, V., Michalowsky, S., Zuyev, A., May, M., Ebenbauer, C.* (2018). A family of extremum seeking laws for a unicycle model with a moving target: theoretical and experimental studies. *Proc. of European Control Conference 2018*, 6 p. (to appear).
6. *Grushkovskaya, V., Zuyev, A., Ebenbauer, C.* (2018). On a class of generating vector fields for the extremum seeking problem: Lie bracket approximation and stability properties. *Automatica*, 94, pp. 151–160.
7. *Khatib, O.* (1986). Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, 5, No. 1, pp. 90–98.
8. *Koditschek, D.E., Rimon, E.* (1990). Robot navigation functions on manifolds with boundary. *Advances in applied mathematics*, 11, No. 4, pp. 412–442.
9. *Krstić, M., Ariyur, K.B.* (2003). *Real-Time optimization by Extremum Seeking Control*. Wiley-Interscience.
10. *Lamnabhi-Lagarrique, F.* (1995). Volterra and Fliess series expansions for nonlinear systems. In W. S. Levine, editor, *The Control Handbook*, pp. 879–888.

11. LaSalle, J.P. (2012). The stability and control of discrete processes. Springer Science & Business Media.
12. Montenbruck, J.M., Dürr, H.-B., Ebenbauer, C., Allgöwer, F. (2014). Extremum seeking and obstacle avoidance on the special orthogonal group. IFAC Proceedings Volumes, 47, No. 3, pp. 8229–8234.
13. Paternain, S., Koditschek, D.E., Ribeiro, A. (2017). Navigation functions for convex potentials in a space with convex obstacles. IEEE Transactions on Automatic Control.
14. Scheinker, A., Krstić, M. (2014). Extremum seeking with bounded update rates. Systems & Control Letters, 63, pp. 25–31.
15. Scheinker, A., Krstić, M. (2014). Non-C2 Lie bracket averaging for nonsmooth extremum seekers. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 136, No. 1, pp. 011010-1–011010-10.
16. Sundarapandian, V. (2003). An invariance principle for discrete-time nonlinear systems. Applied Mathematics Letters, 16, No. 1, pp. 85–91.
17. Tanner, H.G., Loizou, S.G., Kyriakopoulos, K.J. (2001). Nonholonomic stabilization with collision avoidance for mobile robots. IROS, pp. 1220–1225.
18. Tan, Y., Moase, W.H., Manzie, C., Nešić, D., Mareels, I. (2010). Extremum seeking from 1922 to 2010. Proc. 29th Chinese Control Conf., pp. 14–26.
19. Vanualailaia, J., Bibhya, S., Nakagiri, S. (2008). An asymptotically stable collision-avoidance system. International Journal of Non-Linear Mechanics, 43, pp. 925–932.
20. Urakubo, T. (2018). Stability analysis and control of nonholonomic systems with potential fields. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 89, No. 1–2, pp. 121–137.
21. Zuyev, A. (2016). Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls. SIAM J. on Control and Optimization, 54, No. 3, pp. 1678–1696.
22. Zuyev, A., Grushkovskaya, V. (2017). Motion planning for control-affine systems satisfying low-order controllability conditions. International Journal of Control, 90, No. 11, pp. 2517–2537.
23. Zuyev, A., Grushkovskaya, V. (2017). Obstacle Avoidance Problem for Driftless Nonlinear Systems with Oscillating Controls. IFAC-PapersOnLine, 50, No. 1, pp. 10476–10481.
24. Zuyev, A., Grushkovskaya, V., Benner, P. (2016). Time-varying stabilization of a class of driftless systems satisfying second-order controllability conditions. Proc. of European Control Conference 2016, pp. 575–580.

V. V. Grushkovskaya

Gradient-free control algorithms for motion planning with obstacle avoidance.

The paper studies the extremum seeking problem under the presence of constraints in the state space of a system. It is assumed that the analytical expression of the function as well as the locations and shapes of the obstacles may be partially or completely unknown. The main result of the paper provides a novel class of control functions for a system with integrator dynamics. The obtained controls ensure the motion of the system in a neighbourhood of the gradient flow of the corresponding navigation function by using only the values of the navigation function (but not its derivatives), and thus realize collision-free motion of the system to the extremum point of the cost function. The presented class of controls generalizes some known results and allows to construct new controls with variable properties. It is also shown that the use of gradient-free control algorithms in obstacle avoidance problems allows to avoid the problem of attraction of the trajectories to an undesirable equilibrium. The obtained results are illustrated with several examples.

Keywords: *gradient-free control algorithms; obstacle avoidance problem; motion planning; extremum seeking; navigation function; Lie brackets approximation.*

В. В. Грушковська

Безградиентні алгоритми керування для задач планування руху з уникненням перешкод.

У роботі досліджується задача пошуку екстремуму опуклої функції за наявності обмежень у просторі станів системи. Припускається, що аналітичний вираз функції, а також розташування та форма перешкод можуть бути частково або повністю невідомими. Основним результатом роботи є новий клас функцій керування для системи з динамікою інтегратора. Отримані керування реалізують рух системи в околі градієнтного потоку відповідної навігаційної функції, використовуючи лише її значення (але не похідні), і таким чином забезпечують вільний від зіткнень з перешкодами рух системи до точки екстремуму функції якості. Представлений клас керувань узагальнює деякі відомі результати і дозволяє генерувати нові керування з різноманітними властивостями. Також показано, що використання безградиєнтних алгоритмів керування в задачах планування руху з обходом перешкод дозволяє уникнути проблеми притягання траєкторій системи до небажаного стану рівноваги. Отримані результати проілюстровано на декількох прикладах.

Ключові слова: безградиєнтні алгоритми керування; задача уникнення перешкод; планування руху; пошук екстремуму; навігаційна функція; апроксимація з дужками Лі.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск,
Institute for Systems Theory and Automatic Control, University of
Stuttgart, Germany
vi.grushkovskaya@gmail.com

Получено 26.02.18

UDK 517.5

©2017. V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. V. Nesmelova, V. I. Ryazanov

ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR QAUSILINEAR POISSON EQUATIONS

We study the Dirichlet problem for the quasilinear partial differential equations of the form $\Delta u(z) = h(z) \cdot f(u(z))$ in the unit disk $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ with functions $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ in the class $L^p(\mathbb{D})$, $p > 1$, and continuous functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with nondecreasing $|f|$ of $|t|$ such that $f(t)/t \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. On the basis of the potential theory and applying the Leray–Schauder approach, under arbitrary continuous boundary data $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ we prove the existence of continuous solutions u of the problem in the class $W_{loc}^{2,p}$. Moreover, $u \in W_{loc}^{1,q}(\mathbb{D})$ for some $q > 2$ and u is locally Hölder continuous. If in addition φ is Hölder continuous, then u is Hölder continuous in \mathbb{D} . Furthermore, $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$ with $\alpha = (p-2)/p$ if $p > 2$.

MSC: Primary 30C62, 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35J61. Secondary 30E25, 31C05, 34M50, 35F45, 35Q15.

Keywords: semi-linear elliptic equations, quasilinear Poisson equation, logarithmic potential, Leray–Schauder approach.

1. Introduction.

Let \mathbb{D} be the unit disk in the complex plane \mathbb{C} . For z and $w \in \mathbb{D}$ with $z \neq w$, set

$$G(z, w) := \log \left| \frac{1 - z\bar{w}}{z - w} \right| \quad \text{and} \quad P(z, e^{it}) := \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2} \quad (1)$$

be the **Green function** and **Poisson kernel** in \mathbb{D} . If $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$ and $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$, then a solution to the **Poisson equation**

$$\Delta f(z) = g(z) \quad (2)$$

satisfying the boundary condition $f|_{\partial\mathbb{D}} = \varphi$ is given by the formula

$$f(z) = \mathcal{P}_\varphi(z) - \mathcal{G}_g(z) \quad (3)$$

where

$$\mathcal{P}_\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) \varphi(e^{-it}) dt, \quad \mathcal{G}_g(z) = \int_{\mathbb{D}} G(z, w) g(w) dm(w), \quad (4)$$

see e.g. [8], p. 118–120. Here $m(w)$ denotes the Lebesgue measure in \mathbb{C} .

In the next section, we give the representation of solutions of the Poisson equation in the form of the Newtonian (normalized antilogarithmic) potential that is more convenient for our research and, on this basis, we prove the existence and representation theorem for solutions of the Dirichlet problem to the Poisson equation under the corresponding conditions of integrability of sources g .

2. Potentials and the Poisson equation.

Correspondingly to 3.1.1 in [18], given a finite Borel measure ν on \mathbb{C} with compact support, its **potential** is the function $p_\nu : \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, \infty)$ defined by

$$p_\nu(z) = \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| d\nu(w) . \quad (5)$$

Remark 1. Note that the function p_ν is subharmonic by Theorem 3.1.2 and, consequently, it is locally integrable on \mathbb{C} by Theorem 2.5.1 in [18]. Moreover, p_ν is harmonic outside of the support of ν .

This definition can be extended to finite **charges** ν with compact support (named also **signed measures**), i.e., to real valued sigma-additive functions on Borel sets in \mathbb{C} , because of $\nu = \nu^+ - \nu^-$ where ν^+ and ν^- are Borel measures by the well-known Jordan decomposition, see e.g. Theorem 0.1 in [14].

The key fact is the following statement, see e.g. Theorem 3.7.4 in [18].

Proposition 1. *Let ν be a finite charge with compact support in \mathbb{C} . Then*

$$\Delta p_\nu = 2\pi \cdot \nu \quad (6)$$

in the distributional sense, i.e.,

$$\int_{\mathbb{C}} p_\nu(z) \Delta \psi(z) dm(z) = 2\pi \int_{\mathbb{C}} \psi(z) d\nu(z) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{C}) . \quad (7)$$

Here as usual $C_0^\infty(\mathbb{C})$ denotes the class of all infinitely differentiable functions $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ with compact support in \mathbb{C} , $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ is the Laplace operator and $dm(z)$ corresponds to the Lebesgue measure in \mathbb{C} .

Corollary 1. *In particular, if for every Borel set B in \mathbb{C}*

$$\nu(B) := \int_B g(z) dm(z) \quad (8)$$

where $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ is an integrable function with compact support, then

$$\Delta N_g = g , \quad (9)$$

where

$$N_g(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| g(w) dm(w) , \quad (10)$$

in the distributional sense, i.e.,

$$\int_{\mathbb{C}} N_g(z) \Delta \psi(z) dm(z) = \int_{\mathbb{C}} \psi(z) g(z) dm(z) \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{C}) . \quad (11)$$

Here the function g is called a **density of charge** ν and the function N_g is said to be the **Newtonian potential** of g .

The next statement on continuity in the mean of functions $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ in $L^q(\mathbb{C})$, $q \in [1, \infty)$, with respect to shifts is useful for the study of the Newtonian potential, see e.g. Theorem 1.4.3 in [20], cf. also Theorem III(11.2) in [19]. Here we give its direct proof arguing by contradiction.

Lemma 1. *Let $\psi \in L^q(\mathbb{C})$, $q \in [1, \infty)$, have a compact support. Then*

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}} |\psi(z + \Delta z) - \psi(z)|^q dm(z) = 0. \quad (12)$$

The shift of a set $E \subset \mathbb{C}$ by a complex vector $\Delta z \in \mathbb{C}$ is the set

$$E + \Delta z := \{ \xi \in \mathbb{C} : \xi = z + \Delta z, z \in E \}.$$

Proof. Let us assume that there is a sequence $\Delta z_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, such that $\Delta z_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ and, for some $\delta > 0$ and $\psi_n(z) := \psi(z + \Delta z_n)$, $n = 1, 2, \dots$,

$$I_n := \left[\int_{\mathbb{C}} |\psi_n(z) - \psi(z)|^q dm(z) \right]^{\frac{1}{q}} \geq \delta \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Denote by K the closed disk in \mathbb{C} centered at 0 with the minimal radius R that contains the support of ψ . By the Luzin theorem, see e.g. Theorem 2.3.5 in [5], for every prescribed $\varepsilon > 0$, there is a compact set $C \subset K$ such that $g|_C$ is continuous and $m(K \setminus C) < \varepsilon$. With no loss of generality, we may assume that $C \subset K_*$ where K_* is a closed disk in \mathbb{C} centered at 0 with a radius $r \in (0, R)$ and, moreover, that $C_n \subset K$, where $C_n := C - \Delta z_n$, for all $n = 1, 2, \dots$. Note that $m(C_n) = m(C)$ and then $m(K \setminus C_n) < \varepsilon$ and, consequently, $m(K \setminus C_n^*) < 2\varepsilon$, where $C_n^* := C \cap C_n$, because $K \setminus C_n^* = (K \setminus C_n) \cup (K \setminus C)$.

Next, setting $K_n = K - \Delta z_n$, we see that $K \cup K_n = C_n^* \cup (K \setminus C_n^*) \cup (K_n \setminus C_n^*)$ and that $K_n \setminus C_n^* + \Delta z_n = K \setminus C_n^*$. Hence by the triangle inequality for the norm in L^p the following estimate holds

$$I_n \leq 4 \cdot \left[\int_{K \setminus C_n^*} |\psi(z)|^q dm(z) \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\int_{C_n^*} |\psi_n(z) - \psi(z)|^q dm(z) \right]^{\frac{1}{q}} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

By construction the both terms from the right hand side can be made to be arbitrarily small, the first one for small enough ε because of absolute continuity of indefinite

integrals and the second one for all large enough n after the choice of the set C . Thus, the assumption (13) is disproved. \square

Theorem 1. *Let $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ be in $L^p(\mathbb{C})$, $p > 1$, with compact support. Then N_g is continuous. A collection $\{N_g\}$ is equicontinuous on compacta if the collection $\{g\}$ is bounded by the norm in $L^p(\mathbb{C})$ with supports in a fixed disk K . Moreover, under these conditions, on each compact set in \mathbb{C}*

$$\|N_g\|_C \leq M \cdot \|g\|_p . \quad (14)$$

The corresponding statement on the continuity of integrals of potential type in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, can be found in [20], Theorem 1.6.1.

Proof. By the Hölder inequality with $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ we have that

$$\begin{aligned} |N_g(z) - N_g(\zeta)| &\leq \frac{\|g\|_p}{2\pi} \cdot \left[\int_K |\log|z - w| - \log|\zeta - w||^q dm(w) \right]^{\frac{1}{q}} = \\ &= \frac{\|g\|_p}{2\pi} \cdot \left[\int_{\mathbb{C}} |\psi_\zeta(\xi + \Delta z) - \psi_\zeta(\xi)|^q dm(\xi) \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

where $\xi = \zeta - w$, $\Delta z = z - \zeta$, $\psi_\zeta(\xi) := \chi_{K+\zeta}(\xi) \log|\xi|$. Thus, the first conclusion follows by Lemma 1 because $\log|\xi| \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ for all $q \in [1, \infty)$.

The second conclusion follows by the continuity of the integral from the right hand side in the above estimate with respect to the parameter $\zeta \in \mathbb{C}$. Indeed,

$$\|\psi_\zeta - \psi_{\zeta_*}\|_q = \left\{ \int_{\Delta} |\log|\xi||^q dm(\xi) \right\}^{\frac{1}{q}}$$

where Δ denotes the symmetric difference of the disks $K + \zeta$ and $K + \zeta_*$. Thus, the statement follows from the absolute continuity of the indefinite integral.

The third conclusion similarly follows through the direct estimate

$$|N_g(\zeta)| \leq \frac{\|g\|_p}{2\pi} \cdot \left[\int_K |\log|\zeta - w||^q dm(w) \right]^{\frac{1}{q}} = \frac{\|g\|_p}{2\pi} \cdot \left[\int_{\mathbb{C}} |\psi_\zeta(\xi)|^q dm(\xi) \right]^{\frac{1}{q}} .$$

\square

Proposition 2. *There exist functions $g \in L^1(\mathbb{C})$ with compact support whose potentials N_g are not continuous, furthermore, $N_g \notin L^\infty_{\text{loc}}$.*

Proof. Indeed, let us consider the function

$$g(z) = \omega(|z|), \quad z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad g(z) \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}},$$

where

$$\omega(t) = 1/t^2(1 - \ln t)^\alpha, \quad t \in (0, 1], \quad \alpha \in (1, 2), \quad \omega(0) = 0.$$

Setting $\Omega(t) = t \cdot \omega(t)$, we see that, firstly,

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} |g(w)| \, dm(w) = 2\pi \int_0^1 \Omega(t) \, dt = 2\pi \int_0^1 \frac{d \ln t}{(1 - \ln t)^\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha - 1}$$

and, secondly,

$$\begin{aligned} \text{I} := N_g(0) &= \int_0^1 \Omega(t) \ln t \, dt = \left[\ln t \int_0^t \Omega(\tau) \, d\tau \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t \Omega(\tau) \, d\tau \right) dt = \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \left(\left[\frac{\ln t}{(1 - \ln t)^{\alpha-1}} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dt}{t(1 - \ln t)^{\alpha-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \left[(1 - \ln t)^{1-\alpha} - \frac{3-\alpha}{2-\alpha} \cdot (1 - \ln t)^{2-\alpha} \right]_0^1 = -\infty. \end{aligned}$$

□

The following theorem on the Newtonian potentials is important to obtain solutions of the Dirichlet problem to the Poisson equation of higher regularities.

Theorem 2. *Let $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ have compact support. If $g \in L^1(\mathbb{C})$, then $N_g \in L^r_{\text{loc}}$ for all $r \in [1, \infty)$, $N_g \in W_{\text{loc}}^{1,q}$ for all $q \in [1, 2)$, moreover, $N_g \in W_{\text{loc}}^{2,1}$ and*

$$4 \cdot \frac{\partial^2 N_g}{\partial z \partial \bar{z}} = \Delta N_g = 4 \cdot \frac{\partial^2 N_g}{\partial \bar{z} \partial z} = g. \quad (15)$$

If $g \in L^p(\mathbb{C})$, $p > 1$, then $N_g \in W_{\text{loc}}^{2,p}$, $\Delta N_g = g$ a.e. and, moreover, $N_g \in W_{\text{loc}}^{1,q}$ for $q > 2$, consequently, N_g is locally Hölder continuous. If $g \in L^p(\mathbb{C})$, $p > 2$, then $N_g \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}$ where $\alpha = (p - 2)/p$.

In this connection, recall the definition of the formal complex derivatives:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \quad z = x + iy.$$

The elementary algebraic calculations show that the Laplacian

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Proof. Note that N_g is the convolution $\varphi * g$, where $\varphi(\zeta) = \log |\zeta|$, and that

$$\frac{\partial}{\partial z} \log |z - w| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - w}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log |z - w| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\bar{z} - \bar{w}}.$$

Note also that $N_g \in L^r_{\text{loc}}$ for all $r \in [1, \infty)$, see e.g. Corollary 4.5.2 in [9]. Moreover, $\frac{\partial \varphi * g}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} * g$ and $\frac{\partial \varphi * g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} * g$, see e.g. (4.2.5) in [9]. Hence

$$\frac{\partial N_g(z)}{\partial z} = \frac{1}{4} \cdot Tg(z), \quad \frac{\partial N_g(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \cdot \bar{T}g(z),$$

where Tg and $\bar{T}g$ are the well-known integral operators

$$Tg(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g(w) \frac{dm(w)}{z - w}, \quad \bar{T}g(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g(w) \frac{dm(w)}{\bar{z} - \bar{w}}.$$

Thus, all conclusions for $g \in L^1(\mathbb{C})$ follow by Theorems 1.13–1.14 in [21]. If $g \in L^p(\mathbb{C})$, $p > 1$, then $N_g \in W^{1,q}_{\text{loc}}$, $q > 2$, by Theorem 1.27, (6.27) in [21], consequently, N_g is locally Hölder continuous, see e.g. Theorem 8.22 in [6], and $N_g \in W^{2,p}_{\text{loc}}$ by Theorems 1.36–1.37 in [21]. If $g \in L^p(\mathbb{C})$, $p > 2$, then $N_g \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}$ with $\alpha = \frac{p-2}{p}$ by Theorem 1.19 in [21]. \square

By Theorem 2 and the known Poisson formula, see e.g. I.D.2 in [12], we come to the following consequence on the existence, regularity and representation of solutions for the Dirichlet problem to the Poisson equation in the unit disk \mathbb{D} where we assume the charge density g to be extended by zero outside \mathbb{D} .

Corollary 2. *Let $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function and $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ belong to the class $L^p(\mathbb{D})$, $p > 1$. Then the function $U := N_g - \mathcal{P}_{N_g^*} + \mathcal{P}_\varphi$, $N_g^* := N_g|_{\partial\mathbb{D}}$, is continuous in $\bar{\mathbb{D}}$ with $U|_{\partial\mathbb{D}} = \varphi$, belongs to the class $W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathbb{D})$ and $\Delta U = g$ a.e. in \mathbb{D} . Moreover, $U \in W^{1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{D})$ for some $q > 2$ and U is locally Hölder continuous. If in addition φ is Hölder continuous, then U is Hölder continuous in $\bar{\mathbb{D}}$. If $g \in L^p(\mathbb{D})$, $p > 2$, then $U \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{D})$, where $\alpha = (p-2)/p$.*

Remark 2. The Hölder continuity of U for Hölder continuous φ follows from the corresponding result for the integral of the Cauchy type over the unit circle, see e.g. Theorem 1.10 in [21], because of the Poisson kernel $P(z, e^{it}) = \text{Re} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$. Note also by the way that a generalized solution of the Dirichlet problem to the Poisson equation in the class $C(\bar{\mathbb{D}}) \cap W^{1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{D})$ is unique at all, see e.g. Theorem 8.30 in [6]. One can show that the integral operators in Theorem 2 and Corollary 2 are completely continuous (it is clear from the corresponding theorems in [21] mentioned under the proof of Theorem 2), cf. e.g. [10] and [11]. However, for our goals it is sufficient that the operator $N_g : L^p(\mathbb{D}) \rightarrow C(\bar{\mathbb{D}})$ is completely continuous by Theorem 1 for $p > 1$, see the proof of Theorem 3 further.

3. The case of the quasilinear Poisson equations.

The case is reduced to the Poisson equation by the Leray–Schauder approach.

Theorem 3. *Let $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function, $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function in the class $L^p(\mathbb{D})$, $p > 1$, and let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function with the nondecreasing function $|f|$ of $|t|$ such that*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0. \quad (16)$$

Then there is a continuous function $U : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ with $U|_{\partial\mathbb{D}} = \varphi$, $U|_{\mathbb{D}} \in W_{\text{loc}}^{2,p}$ and

$$\Delta U(z) = h(z) \cdot f(U(z)) \quad \text{for a.e. } z \in \mathbb{D}. \quad (17)$$

Moreover, $U \in W_{\text{loc}}^{1,q}(\mathbb{D})$ for some $q > 2$ and U is locally Hölder continuous. If in addition φ is Hölder continuous, then U is Hölder continuous in $\overline{\mathbb{D}}$. Furthermore, if $p > 2$, then $U \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$, where $\alpha = (p - 2)/p$.

In particular, the latter statement in Theorem 3 implies that $U \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$ for all $\alpha = (0, 1)$ if h is bounded.

Proof. If $\|h\|_p = 0$ or $\|f\|_C = 0$, then the Poisson integral \mathcal{P}_φ gives the desired solution of the Dirichlet problem for equation (17), see e.g. I.D.2 in [12]. Hence we may assume further that $\|h\|_p \neq 0$ and $\|f\|_C \neq 0$.

By Theorem 1 and the maximum principle for harmonic functions, we obtain the family of operators $F(g; \tau) : L^p(\mathbb{D}) \rightarrow L^p(\mathbb{D})$, $\tau \in [0, 1]$:

$$F(g; \tau) := \tau h \cdot f(N_g - \mathcal{P}_{N_g^*} + \mathcal{P}_\varphi), \quad N_g^* := N_g|_{\partial\mathbb{D}}, \quad \forall \tau \in [0, 1] \quad (18)$$

which satisfies all groups of hypothesis H1–H3 of Theorem 1 in [15].

H1). First of all, $F(g; \tau) \in L^p(\mathbb{D})$ for all $\tau \in [0, 1]$ and $g \in L^p(\mathbb{D})$ because by Theorem 1 $f(N_g - \mathcal{P}_{N_g^*} + \mathcal{P}_\varphi)$ is a continuous function and, moreover, by (14)

$$\|F(g; \tau)\|_p \leq \|h\|_p |f(2M \|g\|_p + \|\varphi\|_C)| < \infty \quad \forall \tau \in [0, 1].$$

Thus, by Theorem 1 in combination with the Arzela–Ascoli theorem, see e.g. Theorem IV.6.7 in [4], the operators $F(g; \tau)$ are completely continuous for each $\tau \in [0, 1]$ and even uniformly continuous with respect to the parameter $\tau \in [0, 1]$.

H2). The index of the operator $F(g; 0)$ is obviously equal to 1.

H3). By inequality (14) and the maximum principle for harmonic functions, we have the estimate for solutions $g \in L^p$ of the equations $g = F(g; \tau)$:

$$\|g\|_p \leq \|h\|_p |f(2M \|g\|_p + \|\varphi\|_C)| \leq \|h\|_p |f(3M \|g\|_p)|$$

whenever $\|g\|_p \geq \|\varphi\|_C/M$, i.e. then it should be

$$\frac{|f(3M \|g\|_p)|}{3M \|g\|_p} \geq \frac{1}{3M \|h\|_p} \quad (19)$$

and hence $\|g\|_p$ should be bounded in view of condition (16).

Thus, by Theorem 1 in [15] there is a function $g \in L^p(\mathbb{D})$ such that $g = F(g; 1)$ and, consequently, by Corollaries 2 the function $U := N_g - \mathcal{P}_{N_g^*} + \mathcal{P}_\varphi$ gives the desired solution of the Dirichlet problem for the quasilinear Poisson equation (17). \square

Remark 3. As it is clear from the proof, condition (16) can be replaced by the weaker one

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{t} < \frac{1}{3M\|h\|_p} \quad (20)$$

where M is the constant from estimate (14). Moreover, Theorem 3 is valid if f is an arbitrary continuous bounded function.

Theorem 3 together with Remark 3 can be applied to many physical problems. The first circle of such applications is relevant to reaction-diffusion problems. Problems of this type are discussed detaily in [1]. A nonlinear system is obtained for the density u and the temperature T of the reactant. Upon eliminating T the system can be reduced to the equation (17) with $h(z) \equiv \lambda > 0$ and, for isothermal reactions, $f(u) = u^q$ where $q > 0$ is called the order of the reaction. It turns out that the density of the reactant u may be zero in a subdomain called a **dead core**. A particularization of results in Chapter 1 of [3] shows that a dead core may exist just if and only if $0 < q < 1$ and λ is large enough, see also the corresponding examples in [7]. Certain mathematical models of a thermal evolution of a heated plasma also lead to the equation of the type (17), for instance with $f(u) = |u|^{q-1}u$, $0 < q < 1$. Finally, in the theory of the stationary combustion, see e.g. [2, 17] and the references therein, the equation (17) arose with $h \equiv \delta > 0$ and the bounded functions $f(u) = e^{-\beta \cdot u}$, $\beta > 0$, as in Remark 3.

Thus, in Theorem 3 we have established the existence of solutions of more high regularities of the Dirichlet problem for quasilinear Poisson equations than in the monographs [3, 6] and [16], having significant applications. Our approach makes possible to extend the main part of the above results to arbitrary Jordan's domains whose boundaries are smooth, Lipschitz and the so-called quasiconformal boundaries that can be even even locally not rectifiable, and also with the quasihyperbolic boundary condition that, generally speaking, not implying the standard (A)-condition and the known outer cone condition, see e.g. [13]. Furthermore, thanking to a factorization theorem established by us earlier in [7], we are able to extend them to the semi-linear partial differential equations, the linear part of which is written in a divergence (anisotropic !) form. Such extensions of these results will be published elsewhere.

References

1. *Aris, R.* (1975). The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts. Volumes I and II, Oxford: Clarendon Press.
2. *Barenblatt, G.I., Zel'dovic, Ja.B., Librovich, V.B., Mahviladze, G.M.* (1980). Matematicheskaya teoriya goreniya i vzryva, Moscow: Nauka (in Russian); (1985) The mathematical theory of combustion and explosions, New York: Consult. Bureau.
3. *Diaz, J.I.* (1985). Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Volume I Elliptic equations. Research Notes in Mathematics. Vol. 106. Boston: Pitman.

4. *Dunford, N., Schwartz, J.T.* (1958). Linear Operators. I. General Theory, Pure and Applied Mathematics. Vol. 7. New York, London: Interscience Publishers; (1962). Lineinye operatory. Chast' I: Obshchaya teoriya. Moscow: Inostran. Lit.
5. *Federer, H.* (1969). Geometric Measure Theory. Berlin: Springer-Verlag; (1987). Geometricheskaya teoriya mery. Moscow: Nauka.
6. *Gilbarg, D., Trudinger, N.* (1983). Elliptic partial differential equations of second order. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Vol. 224. Berlin: Springer-Verlag; (1989). Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka. Moscow: Nauka.
7. *Gutlyanskiĭ, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I.* (2017). On quasiconformal maps and semi-linear equations in the plane. Ukr. Mat. Visn., 14, No. 2, pp. 161–191; (2018). J. Math. Sci., 229, No. 1, pp. 7–29.
8. *Hörmander, L.* (1994). Notions of convexity, Progress in Mathematics. Vol. 127. Boston: Birkhäuser Boston Inc.
9. *Hörmander, L.* (1983). The analysis of linear partial differential operators. V. I. Distribution theory and Fourier analysis. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Vol. 256. Berlin: Springer-Verlag; (1986). Analiz lineinykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Moscow: Mir.
10. *Kalaj, D.* (2012). On some integral operators related to the Poisson equation. Integral Equations Operator Theory. 72, No. 4, pp. 563–575.
11. *Kalaj, D., Vujadinovich, D.* (2016). The solution operator of the inhomogeneous Dirichlet problem in the unit ball. Proc. Amer. Math. Soc. 144, No. 2, pp. 623–635.
12. *Koosis, P.* (1998). Introduction to H^p spaces. Cambridge Tracts in Mathematics. Vol. 115. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
13. *Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N.* (1968). Linear and quasilinear elliptic equations. New York-London: Academic Press; (1964). Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa, Moscow: Nauka.
14. *Landkof, N.S.* (1966). Foundations of modern potential theory. Moscow: Nauka; (1972). Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 180. New York–Heidelberg: Springer-Verlag.
15. *Leray, J., Schauder, Ju.* (1934). Topologie et equations fonctionnelles. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 51, No. 3, pp. 45–78 (in French); (1946). Topology and functional equations. Uspehi Matem. Nauk (N.S.), 1, No. 3–4 (13–14), pp. 71–95.
16. *Marcus, M., Veron, L.* (2014). Nonlinear second order elliptic equations involving measures. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications Moscow. Vol. 21. Berlin: De Gruyter.
17. *Pokhozhaev, S.I.* (2010). On an equation of combustion theory. Mat. Zametki. 88, No. 1, pp. 53–62; (2010). Math. Notes. 88, No. 1–2, pp. 48–56.
18. *Ransford, T.* (1995). Potential theory in the complex plane, London Mathematical Society Student Texts. Vol. 28. Cambridge: Cambridge University Press.
19. *Saks, S.* (1937). Theory of the integral. Warsaw; (1964). New York: Dover Publications Inc.; (1949). Teoria integrala. Moscow: Inostran. Lit.
20. *Sobolev, S.L.* (1991). Some applications of functional analysis in mathematical physics. Transl. Math. Mon. Vol. 90. Providence, RI: AMS; (1988). Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike. Moscow: Nauka.
21. *Vekua, I.N.* (1962). Generalized analytic functions. London-Paris-Frankfurt: Pergamon Press; Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading; (1959). Obobshchennye analiticheskie funktsii. Moscow: Fiz.-Mat. Lit.

В. Я. Гутлянский, О. В. Несмелова, В. И. Рязанов

О задаче Дирихле для квазилинейных уравнений Пуассона.

Изучается задача Дирихле для квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных вида $\Delta u(z) = h(z) \cdot f(u(z))$ в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ с функциями $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ из класса

$L^p(\mathbb{D})$, $p > 1$, и непрерывными функциями $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с неубывающими $|f|$ от $|t|$, такими, что $f(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. На основе теории потенциала, и применяя подход Лере–Шаудера, при произвольных непрерывных граничных данных $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, доказано существование непрерывных решений u поставленной задачи в классе $W_{\text{loc}}^{2,p}$. Кроме того, показано, что $u \in W_{\text{loc}}^{1,q}(\mathbb{D})$ для некоторых $q > 2$ и что u локально непрерывно по Гёльдеру. Если дополнительно φ непрерывно по Гёльдеру, то u непрерывно по Гёльдеру в \mathbb{D} . Более того, $u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$ с $\alpha = (p-2)/p$, если $p > 2$.

Ключевые слова: полулинейные эллиптические уравнения, квазелинейные уравнения Пуассона, логарифмический потенциал, подход Лере–Шаудера.

В. Я. Гутлянский, О. В. Несмелова, В. И. Рязанов

Про задачу Діріхле для квазілінійних рівнянь Пуассона.

Вивчається задача Діріхле для квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних виду $\Delta u(z) = h(z) \cdot f(u(z))$ в одиничному колі $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ з функціями $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ із класу $L^p(\mathbb{D})$, $p > 1$, і неперервними функціями $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ з неспадаючими $|f|$ від $|t|$, такими, що $f(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. На основі теорії потенціалу, і застосовуючи підхід Лере–Шаудера, при довільних неперервних граничних даних $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, доведено існування неперервних розв'язків u поставленої задачі в класі $W_{\text{loc}}^{2,p}$. Крім того, показано, що $u \in W_{\text{loc}}^{1,q}(\mathbb{D})$ для деяких $q > 2$ і що u локально неперервне по Гельдеру. Якщо додатково φ неперервне по Гельдеру, то u неперервне по Гельдеру в \mathbb{D} . Більш того, $u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{D})$ з $\alpha = (p-2)/p$, якщо $p > 2$.

Ключові слова: напівлінійні еліптичні рівняння, квазілінійні рівняння Пуассона, логарифмічний потенціал, підхід Лере–Шаудера.

Institute of Applied Mathematics and Mechanics
of National Academy of Sciences of Ukraine,
Slavyansk, Ukraine
vgutlyanski@gmail.com, star-o@ukr.net,
vlryazanov1@rambler.ru

Received 26.12.17

УДК 531.38

©2017. И. С. Дмитришин

СИНХРОНИЗАЦИЯ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ИДЕНТИЧНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассмотрена задача синхронизации угловых скоростей вращений двух и более идентичных твердых тел, соединенных по схеме ведущее–ведомое тело (master–slave). В предположении, что ведомое тело является управляемым, приведен закон управления по состоянию, который решает задачу синхронизации. В случае, если информация о движении ведущего тела неполная, изучается возможность использования в законе управления вместо компонент фазового вектора их оценок, полученных в результате решения задачи наблюдения. Для получения этих оценок в работе используется метод синтеза инвариантных соотношений в задачах наблюдения, который эффективен в случае систем дифференциальных уравнений, правые части которых являются линейными относительно неизмеряемых компонент фазового вектора. С помощью второго метода Ляпунова показано, что полученное таким образом модифицированное управление по выходу решает исходную задачу синхронизации.

MSC: 34A60, 34D20, 34N05.

Ключевые слова: синхронизация, нелинейный наблюдатель, инвариантные соотношения, асимптотическая устойчивость.

1. Введение.

Для многих приложений математической теории управления характерной является ситуация когда объектом управления является совокупность активных взаимосвязанных подсистем. К таким, в частности, относят задачу о согласованном движении космических, авиационных, наземных и других движущихся аппаратов. Поиск алгоритмов управления такими объектами по выходу является достаточно сложной задачей, для которой до сих пор нет эффективного общего решения.

В работе рассматривается механическая система, состоящая из двух твердых тел, одно из которых ведущее (master), а другое – ведомое (slave) [1]. Предполагается, что ведомое тело имеет управление, зависящее от собственного состояния и состояния ведущего тела. Предложено управление, решающее задачу синхронизации угловых скоростей тел, в виде обратной связи по состоянию этих систем. Так как многие практические приложения теории управления сталкиваются с задачами, в которых невозможно измерить все компоненты переменных состояния, актуальной является задача построения обратной связи по выходу. В работе рассмотрена такая ситуация, а именно, предполагается, что отсутствует информация об одной из компонент вектора угловой скорости ведущего тела. Отметим, что ранее была рассмотрена задача синхронизации угловых скоростей идентичных гироскопов в случае “потери” информации о двух компонентах вектора угловой скорости гироскопа [2].

Используемое управление по выходу в нашем случае – это управление, полу-

чаемое из найденной ранее обратной связи заменой неизвестной компоненты состояния ведущей системы ее оценкой, найденной в результате решения задачи наблюдения. При этом возникает вопрос: будет ли такое “приближенное” управление решением исходной задачи? Подобные вопросы в теории стабилизации рассматривались, например, в работе [3], где сформулирован соответствующий принцип разделения.

Основной целью работы является построение нелинейного наблюдателя для неизвестной компоненты вектора угловой скорости ведущего тела и определение возможности использования управления по выходу для синхронизации угловых скоростей тел. Нелинейный наблюдатель построен с помощью метода инвариантных соотношений, который разработан в аналитической механике для поиска точных решений задач динамики твердого тела [4]. Схема синтеза вспомогательных инвариантных соотношений для построения нелинейного наблюдателя описана в [5]. С применением второго метода Ляпунова установлено, что использование в управлении вместо состояния системы ее оценки при одновременном решении задач наблюдения и синхронизации приводит к решению рассматриваемой задачи.

2. Задача синхронизации угловых скоростей идентичных твердых тел.

Рассмотрим два идентичных твердых тела, одно из которых является управляемым. В качестве уравнений их движения рассмотрим уравнения Эйлера, описывающие вращение твердого тела в системе координат, связанной с самим телом. Тогда для ведущего тела имеем:

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3, \quad A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1, \quad A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2, \quad (1)$$

где A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела. Введем обозначения

$$a_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2}, \quad a_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}.$$

В этом случае, система (1) примет вид:

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = a_2\omega_3\omega_1, \quad \dot{\omega}_3 = a_3\omega_1\omega_2. \quad (2)$$

Рассмотрим ведомое тело, которое имеет такие же моменты инерции, поэтому описывается такими же уравнениями, но содержащими дополнительное управление $u = (u_1, u_2, u_3)$. Обозначив $p = (p_1, p_2, p_3)$ – вектор угловой скорости ведомого тела, получаем

$$\dot{p}_1 = a_1p_2p_3 + u_1, \quad \dot{p}_2 = a_2p_3p_1 + u_2, \quad \dot{p}_3 = a_3p_1p_2 + u_3. \quad (3)$$

Сформулируем задачу синхронизации.

Задача 1. Требуется найти закон управления $u = (u_1, u_2, u_3)$ таким образом, чтобы решение систем (2) и (3) асимптотически стремились друг к другу, т.е.:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p_i(t) - \omega_i(t)) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Естественно предположить, что при реальном движении угловые скорости тел ограничены.

Предположение 1. Далее будем считать, что $\|\omega\|, \|p\| \leq M$ для некоторого конечного M . При этом будем предполагать, что при любых построенных нами управлениях u_1, u_2, u_3 это предположение справедливо.

Введем обозначения для отклонений соответствующих компонент фазовых векторов каждого из тел: $e_1 = p_1 - \omega_1$, $e_2 = p_2 - \omega_2$, $e_3 = p_3 - \omega_3$. С учетом сделанных обозначений, продифференцировав разности $\dot{e}_1 = \dot{p}_1 - \dot{\omega}_1$, $\dot{e}_2 = \dot{p}_2 - \dot{\omega}_2$, $\dot{e}_3 = \dot{p}_3 - \dot{\omega}_3$, получаем уравнения для отклонений:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a_1(p_2 p_3 - \omega_2 \omega_3) + u_1, \\ \dot{e}_2 &= a_2(p_1 p_3 - \omega_1 \omega_3) + u_2, \\ \dot{e}_3 &= a_3(p_1 p_2 - \omega_1 \omega_2) + u_3, \end{aligned} \quad (4)$$

Если найдется управление $u(\cdot)$ такое, что $\|e\| \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$, то Задача 1 будет решена. В случае, когда все компоненты векторов угловой скорости ведущего и ведомого тел измеряются в процессе движения, таким управлением $u(\cdot)$ может быть, в частности:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1(\omega_2 \omega_3 - p_2 p_3) + k_1(\omega_1 - p_1), \\ u_2 &= a_2(\omega_1 \omega_3 - p_1 p_3) + k_2(\omega_2 - p_2), \\ u_3 &= a_3(\omega_1 \omega_2 - p_1 p_2) + k_3(\omega_3 - p_3), \end{aligned} \quad (5)$$

где постоянные $k_i < 0$, $i = 1, 2, 3$.

Действительно, в этом случае, уравнения для отклонений принимают тривиальный вид

$$\dot{e}_i(t) = k_i e_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

откуда следует, что нулевое решение системы дифференциальных уравнений (4) является экспоненциально устойчивым.

3. Нелинейный наблюдатель ω_3 .

Предположим, что одна из компонент вектора угловой скорости ведущего тела, например $\omega_3(t)$, недоступна непосредственному измерению т.е. известными величинами, которые могут быть аргументами управления (5), являются: $\omega_1, \omega_2, p_1, p_2, p_3, e_1, e_2$. Как уже отмечалось, основная цель работы состоит в проверке возможности использования вместо ω_3 его оценки $\hat{\omega}_3$, полученной в результате решения следующей задачи наблюдения.

Задача 2. Требуется найти асимптотически точные оценки $\hat{\omega}_3(t)$ компоненты угловой скорости ω_3 по информации о $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$.

В соответствии с [5], для решения задачи наблюдения воспользуемся методом синтеза дополнительных инвариантных соотношений, выражающих неизвестные через известные величины. А именно: представим наше неизвестное в виде суммы двух неопределенных величин:

$$\omega_3(t) = \Phi(\omega_1, \omega_2) + \xi(t). \quad (6)$$

Равенство (6) определяет некоторую поверхность в пространстве ω_1 , ω_2 , ω_3 , поэтому, в общем случае, имеем

$$\omega_3(t) = \Phi(\omega_1, \omega_2) + \xi(t) + \varepsilon, \quad (7)$$

где ε – характеризует отклонение от этой поверхности. Запишем дифференциальное уравнение для такого отклонения:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\omega}_3 - \Phi_{\omega_1} \dot{\omega}_1 - \Phi_{\omega_2} \dot{\omega}_2 - \dot{\xi}(t). \quad (8)$$

Тогда равенство (6) может иметь место для таких функций Φ, ξ , для которых дифференциальное уравнение (8) имеет тривиальное решение $\varepsilon \equiv 0$. С учетом (2) и (7), дифференциальное уравнение (8) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\omega}_3 - \Phi_{\omega_1} \dot{\omega}_1 - \Phi_{\omega_2} \dot{\omega}_2 - \dot{\xi}(t) = a_3 \omega_1 \omega_2 - \Phi_{\omega_1} a_1 \omega_2 \omega_3 - \Phi_{\omega_2} a_2 \omega_1 \omega_3 - \dot{\xi}(t) = \\ &= a_3 \omega_1 \omega_2 - (\Phi_{\omega_1} a_1 \omega_2 + \Phi_{\omega_2} a_2 \omega_1) (\Phi(\omega_1, \omega_2) + \xi(t) + \varepsilon) - \dot{\xi}(t). \end{aligned}$$

Для того, чтобы уравнение (8) стало однородным, т.е. допускало нулевое решение, потребуем чтобы неопределенные пока функции Φ, ξ удовлетворяли следующим соотношениям:

$$\lambda = -(\Phi_{\omega_1} a_1 \omega_2 + \Phi_{\omega_2} a_2 \omega_1), \quad (9)$$

где λ – отрицательная постоянная, и,

$$\dot{\xi}(t) = a_3 \omega_1 \omega_2 - (\Phi_{\omega_1} a_1 \omega_2 + \Phi_{\omega_2} a_2 \omega_1) (\Phi + \xi). \quad (10)$$

В результате уравнение для отклонений принимает вид

$$\dot{\varepsilon}(t) = \lambda \varepsilon,$$

откуда следует, что при соответствующих $\Phi(\omega_1, \omega_2), \xi(t)$, неопределенная составляющая в соотношении (7), $\varepsilon(t)$ экспоненциально убывает с ростом t .

Рассмотрим полученные условия на имеющиеся свободные функции. Равенство (10) является обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $\xi(t)$ и при выбранной тем или иным способом функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ его правая часть

является известной функцией времени. Поэтому в формуле (6) качестве $\xi(t)$ может быть использовано любое частное решение задачи Коши для этого уравнения.

Условие (9) определяет для возможных функций $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ уравнение в частных производных первого порядка. Вид общего решения (9) зависит от знаков a_1, a_2 . Далее будем полагать, что $A_3 \neq A_1, A_3 \neq A_2$, т.е. $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$. При этом возможны два случая: знаки параметров a_1, a_2 могут быть различными либо одинаковыми. Первый из них имеет место, когда A_3 является либо максимальным, либо минимальным моментом инерции твердого тела. Тогда общее решение (9) имеет вид

$$\Phi_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{a_1 a_2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a_1 a_2} \omega_1}{a_1 \omega_2} \right) + F(.). \quad (11)$$

Если же A_3 не является экстремальным моментом инерции, то общее решение задается выражением

$$\Phi_2 = -\frac{\lambda}{\sqrt{a_1 a_2}} \ln(\omega_1 \sqrt{a_1 a_2} + a_1 \omega_2) + F(.). \quad (12)$$

В формулах (11), (12) $F(.)$ – произвольная дифференцируемая функция, имеющая следующий вид

$$F \left(\omega_2^2 - \frac{a_2}{a_1} \omega_1^2 \right).$$

Таким образом определение функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$, позволяет получить асимптотическую оценку для переменной $\omega_3(t)$. Для этого достаточно выполнение условий по следующей схеме:

- 1) В семействе решений (11) или (12) выбираем функцию $F(.)$, например $F(.) = 0$, и тем самым, в зависимости от известного распределения масс в твердом теле, получаем конкретную функцию $\Phi(e_1, e_2, \omega_1, \omega_2)$.
- 2) Находим частное решение дифференциального уравнения (10).
- 3) По формуле (6) получаем искомую оценку $\hat{\omega}_3(t)$, которая отличается от $\omega_3(t)$ на величину $\varepsilon(t)$.

4. Синхронизация по выходу.

Как уже отмечалось выше, основной целью работы является определение возможности использования в найденном законе управления вместо неизвестной компоненты фазового вектора ω_3 его оценки $\hat{\omega}_3(t) = \omega_3(t) - \varepsilon(t)$. В этом случае управление (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= a_1(\omega_2(\omega_3 - \varepsilon) - p_2 p_3) + k_1(\omega_1 - p_1), \\ \hat{u}_2 &= a_2(\omega_1(\omega_3 - \varepsilon) - p_1 p_3) + k_2(\omega_2 - p_2), \\ \hat{u}_3 &= a_3(\omega_1 \omega_2 - p_1 p_2) + k_3((\omega_3 - \varepsilon) - p_3). \end{aligned} \quad (13)$$

В результате использования такого управления зависимость от времени отклонений траекторий систем (2), (3) и ошибки в решении задачи наблюдения $\varepsilon(t)$ будет удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= k_1 e_1 - a_1 \omega_2 \varepsilon, \\ \dot{e}_2 &= k_2 e_2 - a_2 \omega_1 \varepsilon, \\ \dot{e}_3 &= k_3 e_3 - k_3 \varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} &= \lambda \varepsilon.\end{aligned}\tag{14}$$

В случае, если параметры $\lambda, k_i, i = 1, 2, 3$ могут быть подобраны так, что тривиальное решение системы (14) окажется асимптотически устойчивым, то соответствующее им управление (13) решит поставленную задачу синхронизации. Для определения условий на эти параметры воспользуемся теоремой:

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. *Если для системы дифференциальных уравнений вида $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, существует положительно определенная функция Ляпунова $V(t, x)$, допускающая бесконечно малый высший предел и имеющая отрицательно определенную производную $\dot{V}(t, x)$ по времени в силу данной системы, то нулевое решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

В качестве функции Ляпунова возьмем положительно определенную функцию

$$V = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \varepsilon^2).\tag{15}$$

Очевидно, что V непрерывна в нуле и имеет бесконечно малый предел в нуле. Покажем, что производная в силу системы (14) от положительно определенной функции V выбором постоянной $\varepsilon > 0$ может быть выбрана определено отрицательной. Действительно,

$$\dot{V} = \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \dot{e}_3 e_3 + \dot{\varepsilon} \varepsilon,\tag{16}$$

где после подстановки из (11) получаем следующую оценку производной:

$$\dot{V} \leq \left(k_1 + \left|\frac{a_1 \omega_2}{2}\right|\right) e_1^2 + \left(k_2 + \left|\frac{a_2 \omega_1}{2}\right|\right) e_2^2 + \frac{k_3}{2} e_3^2 + \left(\lambda + \left|\frac{a_1 \omega_2}{2}\right| + \left|\frac{a_2 \omega_1}{2}\right| - \frac{k_3}{2}\right) \varepsilon^2,\tag{17}$$

В силу сделанного предположения об ограниченности угловых скоростей тел, можно записать:

$$\dot{V} \leq (k_1 + |a_1| M) e_1^2 + (k_2 + |a_2| M) e_2^2 + \frac{k_3}{2} e_3^2 + \left(\lambda + |a_1| M + |a_2| M - \frac{k_3}{2}\right) \varepsilon^2.\tag{18}$$

Утверждение Пусть на константы наложены следующие ограничения:

$$|k_1| > |a_1| M, \quad |k_2| > |a_2| M, \quad |\lambda| > |a_1| M + |a_2| M - \frac{k_3}{2}.\tag{19}$$

Тогда (15) является отрицательно определенной функцией Ляпунова. Тем самым, согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, установлен факт стремления переменных $e_1(t), e_2(t), e_3(t), \varepsilon(t)$ к нулю.

Таким образом установлено, что управления

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= a_1(\omega_2\hat{\omega}_3 - p_2p_3) + k_1(\omega_1 - p_1), \\ \hat{u}_2 &= a_2(\omega_1\hat{\omega}_3 - p_1p_3) + k_2(\omega_2 - p_2), \\ \hat{u}_3 &= a_3(\omega_1\omega_2 - p_1p_2) + k_3(\hat{\omega}_3 - p_3),\end{aligned}\tag{20}$$

где

$$\hat{\omega}_3(t) = \Phi(\omega_1, \omega_2) + \xi(t),$$

а $\xi(t)$ – произвольное частное решение задачи Коши для уравнения (10), которое с учетом ограничений (19), приводит к решению исходной Задачи 1. Отметим, что при этом, с помощью частного решения дифференциального уравнения (10), одновременно решается Задача 2.

Цитированная литература

1. *Усик Е.В.* Синтез алгоритмов управления на основе пассивации для каскадных систем с возмущениями // Автореферат диссертации. – 2015. – С. 2–18.
2. *Щербак В.Ф., Дмитренко И.С.* Определение угловой скорости гиростата по ее проекции // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40.– С. 192–199.
3. *Freeman R.* Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances // IEEE Transactions on Automatic. Control. – 1995. – V. 40, № 12. – P.2119–2122.
4. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6.– С. 15–24.
5. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29.– С. 69–76.
6. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. – 216 с.

References

1. *Usik, E. V.* (2015). Synthesis of control algorithms based on passivation for cascade systems with disturbances. The author's abstract of dissertations, pp. 2–18 (in Russian).
2. *Shcherbak, V.F., Dmytrenko, I.S.* (2010). Determination of a gyrostat angular velocity on its projection. *Mehanika tverdogo tela*, is. 40, pp. 196–199 (in Russian).
3. *Freeman, R.* (1995). Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances. *IEEE Transactions on Automatic. Control*, 40, No. 12, pp. 2119–2122.
4. *Kharlamov, P. V.* (1974). On invariant relations of a system of differential equations, is. 6, pp. 15–24 (in Russian).
5. *Zhogoleva, N. V., Shcherbak, V.F.* (2015). Synthesis of additional relations in inverse control problems. *Trudy IPMM NAN Ukrainy*, 29, pp. 69–76 (in Russian).
6. *Bellman, R.* (1954). The theory of stability of solutions of differential equations. M.: Izdatel'stvo inostranoj literatury, 216 p. (in Russian).

I. S. Dmytryshyn

The synchronization of the angular velocities of identical rigid bodies.

The search of algorithms for coordinating movement for a group of identical objects (space, aviation, ground and other moving machines) on output is a difficult task, for which there is still no found effective common solution. Consider a mechanical system consisting of two solid bodies, one of which is the master, and the other is the slave. It is assumed that the slave body has control, depending on its own state and the state of the leading body. We propose control in the form of feedback on the state of these systems. Since many practical applications of control theory are confronted with problems where it is impossible to measure all components of state variables, the problem of constructing feedback on the output is actual. In this paper, we construct a control obtained from the feedback found earlier, in which instead of the initial states of the system, their estimates obtained as a result of constructing the observer are used. The main purpose of the work is to find such an output control. The observer is a specially constructed dynamic system whose state asymptotically approaches the state of the initial system. A natural question arises: will such “approximate” control of the solution of the original problem? Similar questions in the theory of stabilization were considered early. The case of “loss” of information of one of the components of the angular velocity vector of the leading body is considered in this paper. We note that the problem of synchronization of the angular velocities of identical gyrostats in the case of “loss” of information on two components of the angular velocity vector of the gyrostat was considered. To obtain estimates of unknown phase vector components, a nonlinear observer was constructed using the method of invariant relations, which was developed in analytical mechanics to find exact solutions of the problems of rigid body dynamics. With the use of Lyapunov’s second method, it is established that the use of control in the control instead of the state of the system, while solving the problems of observation and synchronization, leads to the solution of the problem under consideration.

Keywords: *synchronization, nonlinear observer, invariant relations, asymptotic stability.*

І. С. Дмитришин

Синхронізація кутових швидкостей ідентичних твердих тіл.

Розглянуто задачу синхронізації кутових швидкостей обертань двох і більше ідентичних твердих тіл, з’єднаних за схемою ведуче–ведене тіло (master–slave), яка залежить від всіх компонент фазового вектора. У разі, якщо інформація про рух одного з тіл неповна, вивчається можливість використання замість компонент фазового вектора їх оцінок, отриманих в результаті розв’язання задачі спостереження. Для отримання цих оцінок використовується метод синтезу інваріантних співвідношень в задачах спостереження, який ефективний у разі систем диференціальних рівнянь, праві частини яких є лінійними щодо невимірних компонент фазового вектора. Основною метою роботи є пошук управління по виходу. За допомогою другого методу Ляпунова показано, що запропонована конструкція вирішує вихідну задачу синхронізації.

Ключові слова: *синхронізація, нелінійний спостерігач, інваріантні співвідношення, асимптотична стійкість.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
dmirishin.ira@gmail.com*

Получено 27.04.18

UDK 517.9

©2017. М. В. Дзюба

ПРО НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОГО АЛГЕБРАЇЧНОГО РІВНЯННЯ РІККАТІ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

У статті для наближеного розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккати побудовано ітераційну схему за класичною схемою методу найменших квадратів, а також знайдені умови її збіжності до розв'язку матричного алгебраїчного рівняння Ріккати. Запропоновану схему наближеного розв'язання та перевірку умов збіжності до розв'язку матричного алгебраїчного рівняння Ріккати детально проілюстровано на прикладі. Крім того, запропонована схема розв'язання та отримані умови збіжності до розв'язку матричного алгебраїчного рівняння Ріккати можуть бути перенесені на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, у тому числі, у частинних похідних.

MSC: 34B15, 15A24.

Ключові слова: матричне алгебраїчне рівняння Ріккати, метод найменших квадратів, матриця Грама.

1. Вступ. Лінійні та нелінійні матричні алгебраїчні рівняння широко використовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь Ріккати та Бернуллі, в теорії стійкості руху, у теорії оптимального керування, а також у задачах на відновлення та покращення зображень. Ключовими проблемами при розв'язанні лінійних та нелінійних матричних рівнянь є визначення умов розв'язності та побудова схеми знаходження розв'язків таких рівнянь. У 2001 р. О.А. Бойчук та С.А. Кривошея з використанням теорії узагальнених обернених операторів встановили критерій розв'язності матричних рівнянь вигляду $AX - XB = D$ та $X - AXB = D$ типу Ляпунова та дослідили структуру сім'ї розв'язків цього рівняння, при цьому суттєвим було псевдообернення лінійного матричного оператора, відповідного до однорідної частини рівнянь $AX - XB = D$ та $X - AXB = D$ типу Ляпунова. У роботах С.М. Чуйка визначено оператор M , який перетворює лінійне матричне рівняння загального вигляду до традиційного лінійного матричного рівняння з прямокутною матрицею і таким чином встановлено критерій розв'язності лінійних матричних рівнянь загального вигляду та побудовано сім'ю розв'язків таких рівнянь. У роботах О.А. Бойчука, С.А. Кривошеї та С.М. Чуйка суттєво використовується техніка псевдообернених (за Муром-Пенроузом) матриць і проекторів. У данній роботі суттєво використовується також класичний метод найменших квадратів, побудований К.Ф. Гаусом та А.М. Лежандром і розвинутий А.А. Марковим та Н.І. Ахієзером. Таким чином, досліджуємо задачу про знаходження розв'язків

$$Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України. Номер державної реєстрації 0115U003182.

матричного алгебраїчного рівняння Ріккати

$$A Z Z^* + B Z + C = 0; \quad (1)$$

тут $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – сталі $(n \times n)$ – вимірні матриці. Визначимо оператор

$$\mathcal{M}[\mathcal{A}] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n},$$

як оператор, який ставить у відповідність матриці $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор $b := \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, утворений з n стовпців матриці \mathcal{A} , а також обернений оператор [8]:

$$\mathcal{M}^{-1}[b] : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

який ставить у відповідність вектору $b \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ матрицю $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Визначений оператор приводить матричне алгебраїчне рівняння Ріккати (1) до рівнозначного

$$f(z) = 0, \quad f(z) := \mathcal{M}[A Z Z^* + B Z + C], \quad z := \mathcal{M}[Z]. \quad (2)$$

Для побудови ітераційної схеми $\{z_k\}$, збіжної до розв'язку $\tilde{z} \in \mathbb{R}^{n^2}$ рівняння (2), використовуємо класичний метод найменших квадратів [9, 10]. Припустимо, що знайдено наближення z_k , досить близьке до точного розв'язку \tilde{z} рівняння (2). У малому околі точного розв'язку \tilde{z} рівняння (2) має місце наближена рівність

$$f(z_k) + J_k (\tilde{z} - z_k) \approx 0, \quad J_k := f'(z_k) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2},$$

тому для знаходження наступного наближення z_{k+1} до точного розв'язку \tilde{z} природно покласти

$$f(z_k) + J_k x_{k+1} = 0, \quad x_{k+1} := z_{k+1} - z_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

2. Ітераційна схема. Вимагаючи [9, 10]

$$\varphi(z_k) := \|f(z_k) + J_k x_{k+1}\|_{\mathbb{R}^{n^2}} \rightarrow \min,$$

за умови невідродженості матриці Грама [9, 10]

$$\Gamma_k := J_k^* J_k \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2},$$

отримуємо ітераційну схему $\{z_k\}$

$$z_{k+1} = z_k + x_{k+1}, \quad x_{k+1} = -\Gamma_k^{-1} J_k^* f(z_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

збіжну до розв'язку \tilde{z} рівняння (2), якщо оператор

$$\psi(z) := z - \Gamma^{-1}(z) J^*(z) f(z), \quad J(z) := f'(z), \quad \Gamma(z) := J(z)^* J(z) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$$

є оператором стиснення [11] у малому околі наближення z_k , досить близького до точного розв'язку \tilde{z} рівняння (2). Таким чином, у малому околі точного розв'язку рівняння (2) за умови

$$\det \Gamma_k \neq 0, \|\psi'(z_k)\|_{\mathbb{R}^{n^2 \times n^2}} < p < 1, k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

ітераційна схема

$$Z_{k+1} := \mathcal{M}[z_{k+1}], z_{k+1} = z_k - \Gamma_k^{-1} J_k^* f(z_k), k \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

збігається до розв'язку рівняння (2), а отже, і рівняння (1).

Теорема. *Припустимо, що для матричного алгебраїчного рівняння Ріккати (1) виконуються наступні умови.*

1. Рівняння (1) має розв'язок \tilde{Z} .
2. У малому околі точного розв'язку \tilde{Z} рівняння (2) виконується умова (3).

У такому разі для знаходження розв'язку \tilde{Z} рівняння (1) застосовна ітераційна схема (4) яка збігається до розв'язку рівняння (1).

Зазначимо, що для знаходження розв'язку матричного алгебраїчного рівняння Ріккати (1) застосовний також метод Ньютона–Канторовича [11, 12]. Запропонована у статті техніка розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккати (1) аналогічно [14, 15, 16] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, у тому числі, у частинних похідних [17, 18].

3. Приклад побудови ітераційної схеми. Запропонована у теоремі схема дослідження застосовна до матричного алгебраїчного рівняння Ріккати

$$Z Z^* + Z + C = 0, C := - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для нульового наближення

$$Z_0 := \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \|f(z_0)\| = \frac{\sqrt{157}}{36} \approx 0,348\,055$$

умова (3) виконується:

$$\det \Gamma_0 = 1 \neq 0, \Gamma_0 = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 15 \\ 30 & 0 & 68 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 43 \end{pmatrix},$$

крім того

$$\|\psi'(z_0)\|_{\mathbb{R}^4} = \frac{1}{108} \sqrt{\frac{37}{2} (79 + \sqrt{3649})} \approx 0,470\,223 < 1.$$

Для першого наближення

$$Z_1 = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1 & 36 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \|f(z_1)\| = \frac{37}{1296} \approx 0,0285\ 494$$

умова (3) також виконується:

$$\det \Gamma_1 = \frac{494\ 209}{419\ 904} \neq 0, \Gamma_1 = \frac{1}{648} \begin{pmatrix} 722 & 0 & 1368 & 0 \\ 0 & 685 & 18 & 684 \\ 1368 & 18 & 3240 & 648 \\ 0 & 684 & 648 & 1944 \end{pmatrix},$$

крім того

$$\|\psi'(z_1)\|_{\mathbb{R}^4} \approx 0,0766\ 725 < 1.$$

Для другого наближення

$$Z_2 = \frac{1}{1368} \begin{pmatrix} 1 & 1368 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \|f(z_2)\| = \frac{1\ 369}{1\ 871\ 424} \approx 0,000\ 731\ 529$$

умова (3) також виконується:

$$\det \Gamma_2 = \frac{879\ 403\ 195\ 225}{875\ 556\ 946\ 944} \neq 0,$$

крім того

$$\|\psi'(z_2)\|_{\mathbb{R}^4} \approx 0,00\ 220\ 254 \ll 1;$$

тут

$$\Gamma_2 = \frac{1}{935\ 712} \begin{pmatrix} 938\ 450 & 0 & 1\ 874\ 160 & 0 \\ 0 & 937\ 081 & 684 & 937\ 080 \\ 1\ 874\ 160 & 684 & 4\ 678\ 560 & 935\ 712 \\ 0 & 937\ 080 & 935\ 712 & 2\ 807\ 136 \end{pmatrix}.$$

Для третього наближення

$$Z_3 = \frac{1}{1\ 874\ 160} \begin{pmatrix} 1 & 1\ 874\ 160 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \|f(z_3)\| = \frac{1\ 369}{1\ 871\ 424} \approx 0,000\ 731\ 529$$

умова (3) також виконується:

$$\det \Gamma_3 = \frac{3\ 084\ 381\ 270\ 031\ 172\ 630\ 449\ 681}{3\ 084\ 371\ 395\ 607\ 554\ 467\ 840\ 000} \neq 0,$$

крім того

$$\|\psi'(z_3)\|_{\mathbb{R}^4} \approx 1,61\ 162 \times 10^{-6} \ll 1;$$

тут

$$\Gamma_3 = \frac{1}{1\ 756\ 237\ 852\ 800} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1\ 756\ 241\ 601\ 122 & 0 & 3\ 512\ 479\ 453\ 920 & 0 \\ 0 & 1\ 756\ 239\ 726\ 961 & 937\ 080 & 1\ 756\ 239\ 726\ 960 \\ 3\ 512\ 479\ 453\ 920 & 937\ 080 & 8\ 781\ 189\ 264\ 000 & 1\ 756\ 237\ 852\ 800 \\ 0 & 1\ 756\ 239\ 726\ 960 & 1\ 756\ 237\ 852\ 800 & 5\ 268\ 713\ 558\ 400 \end{pmatrix}.$$

Для четвертого

$$Z_4 = \frac{1}{3\ 512\ 479\ 453\ 920} \begin{pmatrix} 1 & 3\ 512\ 479\ 453\ 920 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|f(z_4)\| \approx 2,84\ 699 \times 10^{-13}$$

і п'ятого наближень

$$Z_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12\ 337\ 511\ 914\ 217\ 166\ 362\ 274\ 240} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|f(z_5)\| \approx 8,10\ 536 \times 10^{-26}$$

умова (3) також виконується

$$\det \Gamma_4 \neq 0, \quad \det \Gamma_5 \neq 0,$$

крім того

$$\|\psi'(z_4)\|_{\mathbb{R}^4} \approx 8,59\ 919 \times 10^{-13} \ll 1, \quad \|\psi'(z_5)\|_{\mathbb{R}^4} \approx 2,44\ 818 \times 10^{-25} \ll 1.$$

Про збіжність до розв'язку рівняння (5) знайденої послідовності наближень, визначених ітераційною схемою (4), свідчить послідовне зменшення величин

$$\|f(z_k)\|, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Рівняння (5) має точний розв'язок

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тому про збіжність до розв'язку рівняння (5) знайденої послідовності наближень, визначених ітераційною схемою (4), свідчить послідовне зменшення величин

$$\|Z_k - \tilde{Z}\|, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

зокрема

$$\|Z_0 - \tilde{Z}\| = \frac{1}{6}, \quad \|Z_1 - \tilde{Z}\| = \frac{1}{36}, \quad \|Z_2 - \tilde{Z}\| = \frac{1}{1368}, \quad \|Z_3 - \tilde{Z}\| = \frac{1}{1\ 874\ 160},$$

$$\|Z_4 - \tilde{Z}\| = \frac{1}{3\ 512\ 479\ 453\ 920} \approx 2,84\ 699 \times 10^{-13},$$

$$\|Z_5 - \tilde{Z}\| = \frac{1}{12\ 337\ 511\ 914\ 217\ 166\ 362\ 274\ 240} \approx 8,10\ 536 \times 10^{-26}.$$

Цитована література

1. *Boichuk A.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – Т. 50, № 8. – P. 1162–1169.
2. *Palin V. V.* Solvability of Quadratic Matrix Equations // Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika. Mekhanika. – 2008. – **63**, № 6. – P. 36–41.
3. *Кувшинов В. М.* Особенности численного решения матричного алгебраического уравнения Риккати методом установления // Ученые записки ЦАГИ. – 1979. – **X**, № 1. – С. 69–87.
4. *Boichuk A.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – Т. 37, № 4. – P. 464–471.
5. *Зеликин М.И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. – М.: Факториал, 1998. – 350 с.
6. *Справочник по теории автоматического управления* / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987.
7. *Годунов С.К.* Нормы решений матричных уравнений Лурье–Риккати как критерии качества стабилизируемости и детектируемости // Вычислительные проблемы в задачах математической физики (Труды Института математики СО РАН ; т. 22). – Новосибирск : Наука, 1992. – С. 3–21.
8. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – **210**, № 1. – P. 9–21.
9. *Азиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
10. *Chuiko S.M.* About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods // Nonlinear oscillation. – 2009. – **12**, № 4. – P. 556–573.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
12. *Chuiko S.M.* To the generalization of the Newton–Kantorovich theorem // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2017. – **85**. – P. 62–68.
13. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1958. – 334 р.
14. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
15. *Chuiko S.M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. – 2015. – **56**, № 4. – P. 752–760.
16. *Chuiko S.M.* Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – **38 (2)**. – P. 236–244.
17. *Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Yakubov E.H.* The Beltrami equations and prime ends // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – **210**. – P. 22–51.
18. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption // Israel Journal of Mathematics. – 2016. – **215**, No. 1. – P. 163–179.

References

1. *Boichuk, A.A.* (1998). Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. Ukrainian Mathematical Journal, 50, No. 8, pp. 1162–1169.
2. *Palin, V.V.* (2008). Solvability of Quadratic Matrix Equations. Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika. Mekhanika, 63, No. 6, pp. 36–41.
3. *Kuvshinov, V.M.* (1979). Peculiarities of the numerical solution of the matrix algebraic Riccati equation by the establishment method. Uchenye zapiski TsAGI, X, No. 1, pp. 69–87 (in Russian).
4. *Boichuk, A.A.* (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations. Differential Equations, 37, No. 4, pp. 464–471.
5. *Zelikin, M.I.* (1998). Homogeneous spaces and the Riccati equation in the calculus of variations. M.: Factorial, 350 p. (in Russian).
6. *Handbook on the theory of automatic control*, ed. A.A. Krasovskiy. M.: Science, 1987 (in Russian).
7. *Godunov, S.K.* (1992). Norms of solutions to the Lurie–Riccati matrix equations as criteria of the quality of stabilizability and detectability. Siberian Advances in Mathematics, 2, No. 3, pp. 135–

- 157 (in Russian).
8. *Chuiko, S.M.* (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.)*, 210, No. 1, pp. 9–21.
 9. *Akhiezer, N.I.* (1965). *Lectures on approximation theory*. M.: Science, 408 p. (in Russian).
 10. *Chuiko, S.M.* (2009). About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods. *Nonlinear oscillation*, 12, № 4, pp. 556–573.
 11. *Kantorovich, L.V., Akilov, G.P.* (1977). *Functional analysis*. M.: Science, 744 p. (in Russian).
 12. *Chuiko, S.M.* (2017). To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, 85, pp. 62–68.
 13. *Linnik, Yu. V.* (1958). *The method of least squares and the foundations of the mathematical and statistical theory of processing observations*. M.: Fizmatgiz, 334 p. (in Russian).
 14. *Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M.* (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition)*, Berlin; Boston: De Gruyter, 298 p.
 15. *Chuiko, S.M.* (2015). The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem. *Siberian Mathematical Journal*, 56, № 4, pp. 752–760.
 16. *Chuiko, S.M.* (2017). Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 38 (2), pp. 236–244.
 17. *Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yakubov, E.H.* (2015). The Beltrami equations and prime ends. *Journal of Mathematical Sciences*, 210, pp. 22–51.
 18. *Skrypnik, I.I.* (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics*, 215, № 1, pp. 163–179.

M. V. Dzuba

On approximate solution of Riccati equation by the least square method.

Linear and nonlinear matrix algebraic equations are widely used in solving the Riccati and Bernoulli differential equations, in the theory of motion stability, in the theory of optimal control, as well as in problems for the restoration and improvement of images. The key problems in solving linear and nonlinear matrix equations is the definition of solvability conditions and the construction of a scheme for finding solutions of such equations. In 2001 O. A. Boichuk and S. A. Krivoshey using the theory of generalized inverse operators, established the criterion of solvability of the matrix equations of the form $AX - XB = D$ and $X - AXB = D$ of Lyapunov type, and investigated the family structure of the solutions of this equation, while the pseudo-inversion of the linear matrix operator corresponding to the homogeneous part of the equations $AX - XB = D$ and $X - AXB = D$ type Lyapunov. In works S. M. Chuiko the operator \mathcal{M} , which transforms the linear matrix equation of a general form into a traditional linear matrix equation with a rectangular matrix, is defined as a chute, and thus the criterion of solvability of linear matrix equations of general form is established and the family of solutions of such equations is constructed. In works O. A. Boychuk, S. A. Krivoshei and S. M. Chuiko essentially uses the technique of pseudo-turned (by Moore–Penrose) matrices and projectors. In this paper, the classic method of least squares, used by K.F. Gauss and A.M. Legendre, is also considerably used and developed A. A. Markov and N. I. Ahiezer In the article for an approximate solution of the matrix algebraic Riccati equation, an iterative scheme is constructed according to the classical scheme of the least squares method, and the conditions of its convergence are found for the solution of the matrix algebraic Riccati equation. The proposed scheme of an approximate solution and the verification of the convergence conditions to the solution of the matrix algebraic Riccati equation is illustrated in detail in the example. In addition, the proposed solution scheme and the convergence conditions obtained to

the solution of the matrix algebraic Riccati equation can be transferred to nonlinear matrix differential algebraic boundary value problems, including partial derivatives.

Keywords: matrix algebraic Riccati equation, least square method, Gram matrix.

М. В. Дзюба

О приближенном решении матричного алгебраического уравнения Риккати методом наименьших квадратов.

Линейные и нелинейные матричные алгебраические уравнения широко используются при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли, в теории устойчивости движения, в теории оптимального управления, а также в задачах на восстановление и улучшение изображений. Ключевыми проблемами при решении линейных и нелинейных матричных уравнений является определение условий разрешимости и построение схемы нахождения решений таких уравнений. В 2001 г. А. А. Бойчук и С. А. Кривошея с использованием теории обобщенных обратных операторов установили критерий разрешимости матричных уравнений вида $AX - XB = D$ и $X - AXB = D$ типа Ляпунова и исследовали структуру семьи решений этого уравнения, при этом существенно было псевдообращение линейного матричного оператора, относительно однородной части уравнений $AX - XB = D$ и $X - AXB = D$ типа Ляпунова. В работах С. М. Чуйко определено оператор \mathcal{M} , который преобразует линейное матричное уравнение общего вида к традиционному линейному матричному уравнению с прямоугольной матрицей и таким образом установлен критерий разрешимости линейных матричных уравнений общего вида и построено семью решений таких уравнений. В работах А. А. Бойчука, С. А. Кривошеи и С. М. Чуйко существенно используется техника псевдообратных (по Муру–Пенроузу) матриц и проекторов. В данной работе существенно используется также классический метод наименьших квадратов, построенный К. Ф. Гауссом и А. М. Лежандром и развитый А. А. Марковым и Н. И. Ахиезером. В статье для приближенного решения матричного алгебраического уравнения Риккати построено итерационную схему по классической схеме метода наименьших квадратов, а также найдены условия ее сходимости к решению матричного алгебраического уравнения Риккати. Предложенную схему приближенного решения и проверку условий сходимости к решению матричного алгебраического уравнения Риккати подробно проиллюстрировано на примере. Кроме того, предложенная схема решения и полученные условия сходимости к решению матричного алгебраического уравнения Риккати могут быть перенесены на нелинейные матричные дифференциально-алгебраические краевые задачи, в том числе, в частных производных.

Ключевые слова: матричное алгебраическое уравнение Риккати, метод наименьших квадратов, матрица Грама.

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
chujko-slav@inbox.ru

Отримано 27.12.17

УДК 517.9

©2017. Е. А. Евгеньева

РАВНОМЕРНАЯ ОЦЕНКА СЕМЕЙСТВА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ДАННЫМИ

Изучение асимптотического поведения решений квазилинейных параболических уравнений в окрестности времени сингулярного обострения граничного режима основано на введении бесконечного семейства энергетических функций, связанных с последовательностью областей пространственно-временных слоев со стремящимися к 0 высотами. Эти энергетические функции удовлетворяют некоторой специальной бесконечной системе дифференциальных неравенств. Анализ свойств этой системы в зависимости от начальных данных, определяемых исходным сингулярным граничным режимом, является одним из ключевых моментов при изучении поведения решений описанной задачи. В работе получена равномерная оценка для решений этих систем при различных граничных режимах, приведено несколько примеров, иллюстрирующих результат.

MSC: 35K59, 35B44, 35K58, 35K65.

Ключевые слова: квазилинейные параболические уравнения, энергетические решения, режимы с обострением, энергетические функции, дифференциальные неравенства.

1. Введение и формулировка основного результата.

В цилиндре $Q := (0, T) \times \Omega$, где Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$, рассмотрим задачу для квазилинейного параболического уравнения:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p(u) = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad p > q > 0 \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad u_0 \in L_{q+1}(\Omega). \quad (2)$$

Будем изучать асимптотическое поведение энергетических (слабых) решений $u(t, x)$ задачи (1)–(2) с сингулярно обостряющимся условием на энергию:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &:= \int_{\Omega} |u(t, x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla_x u(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau \leq \\ &\leq F_{\omega}(t) := \omega(T-t) \cdot (T-t)^{-\alpha_0} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T, \quad \alpha_0 := \frac{q+1}{p-q}, \end{aligned} \quad (3)$$

где функция ω – абсолютно непрерывная монотонно возрастающая на $(0, +\infty)$ функция, удовлетворяющая следующим требованиям:

- 1) $\omega(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$;
- 2) $h^{-\alpha}\omega(h) \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0 \quad \forall \alpha > 0$;

Это исследование финансируется проектом №0117U006353 Отдела целевой подготовки Киевского национального университета им. Тараса Шевченко при НАН Украины.

3) $\frac{h\omega'(h)}{\omega(h)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Условие (3) может порождаться граничными данными задачи. Так например, при изучении решений u задачи (1)–(2) с граничным условием Дирихле

$$u(t, x) \Big|_{\partial\Omega} = f(t, x) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T, \quad (4)$$

условие (3) возникает в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) \leq F(t) := & \sup_{0 < \tau < t} \int_{\Omega} |f(\tau, x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla_x f(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau + \\ & + \left(\int_0^t \left(\int_{\Omega} |f(\tau, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau \right)^{q+1} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T, \end{aligned} \quad (5)$$

где $F(t)$ описывает, так называемый, характер обострения граничной функции $f(t, x)$ из (4).

Известно, что при условии на энергию (3) имеет место локализация множества сингулярности Ω_{bl} (blow-up set) на границе ([4]), а именно

$$\Omega_{bl} := \{x : u(t, x) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow T\} \subset \partial\Omega.$$

Для изучения асимптотического поведения профиля энергетического решения u задачи (1)–(3) используется метод энергетических оценок ([1, 2, 3]). Суть метода заключается в эффективной оценке перетоков энергии, связанной с решением задачи, на бесконечном семействе полос, накапливающихся около времени обострения T . Исходя из этих соображений, разбиваем промежуток $[0, T)$ бесконечной последовательностью точек $\{t_j\}$ ($t_j \rightarrow T$ при $j \rightarrow \infty$) на промежутки $[t_{j-1}, t_j]$ длиной $\varepsilon_j := t_j - t_{j-1}$. Выбор такого разбиения проводится специальным образом и зависит от вида функции $F_{\omega}(t)$. Так как эта процедура не входит в круг исследований данной работы, то приводить ее мы не будем. Также необходимо параметризовать область Ω , введя в рассмотрение параметр $s > 0$, характеризующий расстояние до границы области, а именно

$$\Omega(s) := \{x \in \Omega : d(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega) > s\}.$$

Таким образом получаем последовательность пространственно-временных слоев $Q_j(s) := [t_{j-1}, t_j] \times \Omega(s)$. На этих слоях вводим бесконечное семейство энергетических функций:

$$\mathcal{E}_j(s) := \sup_{t_{j-1} \leq \tau < t_j} \int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^{q+1} dx + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

При анализе этого семейства возникают системы дифференциальных неравенств следующего вида:

$$\begin{aligned} M_j(s) & \leq \lambda M_{j-1}(s) + (1 - \lambda) \max \left\{ k_j^{(1)} (-M_j'(s))^{1+\gamma_1}; k_j^{(2)} (-M_j'(s))^{1+\gamma_2} \right\} \quad \forall s > 0, \\ M_j(0) & \leq K_j \quad \forall j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\lambda \in (0, 1)$, $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$,

$$k_j^{(1)} = c_1 \varepsilon_j^{\gamma_1 \delta}, \quad k_j^{(2)} = c_2 \varepsilon_j^{\gamma_2 \delta}, \quad K_j = c_3 \varepsilon_j^{-\delta} \omega(c_4 \varepsilon_j), \quad \delta > 0,$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, $\{\varepsilon_j\} : \varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Функция ω из (3).

Исследование этих систем является одним из ключевых этапов при изучении асимптотического поведения энергетических решений $u(t, x)$ задачи (1)–(3). При этом важно получить равномерную оценку для решений $M_j(s)$, так как она формирует вид окончательной оценки решения $u(t, x)$.

Основной результат работы заключен в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть некоторое семейство неотрицательных абсолютно непрерывных монотонно невозрастающих функций $\{M_j(s)\}$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяет системе дифференциальных неравенств (7). Тогда для решений $M_j(s)$ справедлива следующая равномерная оценка:

$$M_j(s) \leq B s^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \left[\omega^{-1} \left(b s^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \right) \right]^{-\delta} \quad \forall s \in (0, \epsilon), \forall j \in \mathbb{N} : j \geq j_\infty, \quad (8)$$

где ω^{-1} – обратная функция к ω , $\epsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная, $j_\infty = j_\infty(\epsilon) \rightarrow \infty$ при $\epsilon \rightarrow 0$,

$$B = \frac{r_{11} c_4^\delta \bar{\epsilon}}{1 - \bar{\epsilon}}, \quad b = \left(\frac{\gamma_1}{(1 + \gamma_1)(1 - \bar{\epsilon})} \right)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} c_1^{-\frac{1}{\gamma_1}} c_3^{-1}, \quad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\epsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \epsilon \rightarrow 0.$$

2. Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим последовательность задач Коши для семейства функций $\{\bar{M}_j(s)\}$:

$$\begin{aligned} \bar{M}_j(s) &= \max \left\{ k_j^{(1)} (-\bar{M}_j'(s))^{1+\gamma_1}; k_j^{(2)} (-\bar{M}_j'(s))^{1+\gamma_2} \right\} \quad \forall s > 0, \\ \bar{M}_j(0) &= K_j \quad \forall j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, k_j^{(1)}, k_j^{(2)}, K_j$ из (7). В силу леммы 1 решения задач могут быть записаны в виде:

$$\bar{M}_j(s) = \begin{cases} r_{11} \varepsilon_j^{-\delta} \left(r_{12} \omega(c_4 \varepsilon_j)^{\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}} - s \right)_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall j \geq j_0, \forall s > 0, \\ r_{11} \varepsilon_j^{-\delta} \left(r_{22} + r_{23} \omega(c_4 \varepsilon_j)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - s \right)_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall j < j_0, \forall s \geq \bar{s}_{\varepsilon_j}, \\ r_{31} \varepsilon_j^{-\delta} \left(r_{23} \omega(c_4 \varepsilon_j)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - s \right)_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} & \forall j < j_0, \forall s \in (0, \bar{s}_{\varepsilon_j}), \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= \left(\frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1} \right)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} c_1^{-\frac{1}{\gamma_1}}, \quad r_{12} = \frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1} (c_1 c_3^{\gamma_1})^{\frac{1}{1+\gamma_1}}, \quad r_{22} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_2} \left(\frac{c_1^{\gamma_2}}{c_2^{\gamma_1}} \right)^{\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \\
 r_{23} &= \frac{1 + \gamma_2}{\gamma_2} (c_2 c_3^{\gamma_2})^{\frac{1}{1+\gamma_2}}, \quad r_{31} = \left(\frac{\gamma_2}{1 + \gamma_2} \right)^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} c_2^{-\frac{1}{\gamma_2}}, \\
 j_0 &= \max_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \omega(c_4 \varepsilon_j) \geq B_0 := c_3^{-1} \left(c_1^{1+\gamma_2} c_2^{-(1+\gamma_1)} \right)^{\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}} \right\}, \\
 \bar{s}_{\varepsilon_j} &= r_{23} \left[\omega(c_4 \varepsilon_j)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - B_0^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} \right]_+.
 \end{aligned}$$

Теперь по последовательности $\{\bar{M}_j(s)\}$ построим монотонную последовательность $\widetilde{M}_j(s)$:

$$\widetilde{M}_j(s) := \max_{1 \leq i \leq j} \{\bar{M}_i(s)\} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall s > 0. \quad (11)$$

Можно показать (аналогично доказательству лемм 9.2.3 и 9.2.4 из [4]), что для любого номера j существует положительная строго монотонно возрастающая последовательность точек $\{s_l^{(j)}\}$ ($l = 1, 2, \dots, l_j \leq j$) такая, что функцию $\widetilde{M}_j(s)$ можно записать в виде:

$$\widetilde{M}_j(s) = \bar{M}_{i_l}(s) \quad \forall s \in [s_{l+1}^{(j)}, s_l^{(j)}) \quad \forall l \leq l_j, \quad s_{l_j+1}^{(j)} = 0, \quad (12)$$

$\{i_l\}$ ($l = 1, 2, \dots, l_j \leq j$) – положительная строго возрастающая последовательность индексов. Рассмотрим теперь более широкое, чем $\{\bar{M}_j(s)\}$ семейство функций $\bar{N}_\tau(s)$, зависящее от непрерывного параметра $\tau > 0$:

$$\bar{N}_\tau(s) := \begin{cases} r_{11} \tau^{-\delta} \left(r_{12} \omega(c_4 \tau)^{\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}} - s \right)_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall \tau \leq B_1, \forall s > 0, \\ r_{11} \tau^{-\delta} \left(r_{22} + r_{23} \omega(c_4 \tau)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - s \right)_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall \tau > B_1, \forall s \geq \bar{s}_\tau, \\ r_{31} \tau^{-\delta} \left(r_{23} \omega(c_4 \tau)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - s \right)_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} & \forall \tau > B_1, \forall s \in (0, \bar{s}_\tau), \end{cases} \quad (13)$$

где

$$B_1 = \min_{\tau > 0} \{\omega(c_4 \varepsilon_j) \geq B_0\}, \quad \bar{s}_\tau = r_{23} \left[\omega(c_4 \tau)^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - B_0^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} \right]_+, \quad B_0 \text{ из (10)}.$$

Очевидно, что $\bar{N}_{\varepsilon_j}(s) = \bar{M}_j(s) \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Поэтому справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{M}_j(s) &= \max_{i \leq j} \{\bar{M}_i(s)\} \leq \max_{i \in \mathbb{N}} \{\bar{M}_i(s)\} \leq \max_{\tau > 0} \{\bar{N}_\tau(s)\} \leq \\
 &\leq \max \left\{ \max_{\tau < B_0} \{\bar{N}_\tau^{(1)}(s)\}, \max_{\tau \geq B_0} \{\bar{N}_\tau^{(2)}(s)\} \right\} \leq \max \left\{ \max_{\tau < B_0} \{\bar{N}_\tau^{(1)}(s)\}, B_2 \right\}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где $B_2 = \bar{N}_{B_1}^{(2)}(0)$.

Нам интересно только лишь поведение функций при сколь угодно больших j , а значит можем записать оценку (14) следующим образом:

$$\widetilde{M}_j(s) \leq \max_{\tau < \tau(\epsilon)} \{\overline{N}_\tau^{(1)}(s)\} \quad \forall s \in (0, \epsilon), \quad (15)$$

где $\epsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная, $\tau(\epsilon) \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Найдем теперь огибающую $N(s)$ для семейства кривых $\overline{N}_\tau^{(1)}(s)$. Будем искать огибающую стандартным способом. Исключим параметр τ из системы:

$$\frac{\partial \overline{N}_\tau^{(1)}(s)}{\partial \tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta s \omega(c_4 \tau)^{-\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}} + r_{12} \left(-\delta + \frac{(c_4 \tau) \omega'(c_4 \tau)}{\omega(c_4 \tau)} \right) = 0. \quad (16)$$

В силу условия 3) на функцию ω можем обозначить

$$\bar{\epsilon} := \frac{1}{\delta} \frac{(c_4 \tau) \omega'(c_4 \tau)}{\omega(c_4 \tau)},$$

где $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Тогда, решая уравнение (16) относительно τ , получим:

$$\bar{\tau}(s) = \frac{1}{c_4} \omega^{-1} \left((\bar{r}_{12}^{-1} s)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \right), \quad (17)$$

где $\bar{r}_{12} = r_{12}(1 - \bar{\epsilon})$. Таким образом получаем:

$$N(s) = \overline{N}_{\bar{\tau}(s)}^{(1)}(s) = \frac{r_{11} c_4^\delta \bar{\epsilon}}{1 - \bar{\epsilon}} s^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \left[\omega^{-1} \left((\bar{r}_{12}^{-1} s)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \right) \right]^{-\delta}. \quad (18)$$

В силу того, что $(\bar{\tau}(s))$ является точкой максимума функции $N_\tau^{(1)}(s)$, можем утверждать, что:

$$\max_{\tau < \tau(\epsilon)} \{\overline{N}_\tau^{(1)}(s)\} \leq N(s) \quad \forall s \in (0, \epsilon), \quad (19)$$

Покажем теперь, что для функций $M_j(s)$ из (7) справедлива следующая равномерная оценка:

$$M_i(s) \leq \widetilde{M}_j(s) \quad \forall i \leq j, \quad \forall s > 0, \quad (20)$$

где $\widetilde{M}_j(s)$ из (11). Используем метод индукции. При $j = 1$ оценка проверяется непосредственным интегрированием неравенства (7). Положим, что оценка (20) выполняется для $j - 1$, но не выполняется для j . Тогда найдется такой интервал (a, b) , $a > 0$, что имеет место

$$M_j(s) > \widetilde{M}_j(s) \quad \forall s \in (a, b), \quad M_j(s) \leq \widetilde{M}_j(s) \quad \forall s \leq a, \quad M_j(a) = \widetilde{M}_j(a). \quad (21)$$

Пусть для определенности

$$a \in [s_{l+1}^{(j)}, s_l^{(j)}], \quad l \leq l_j,$$

где l_j из (12). Тогда (21) можно переписать

$$M_j(s) > \overline{M}_l(s) \quad \forall s \in (a, \min\{s_l, b\}) \quad \text{и} \quad M_j(a) = \overline{M}_l(a). \quad (22)$$

Далее, в силу монотонного возрастания последовательности $\{\widetilde{M}_i(s)\}$ по i и в силу справедливости оценки (20) для $j - 1$, имеем:

$$\widetilde{M}_j(s) \geq \widetilde{M}_{j-1}(s) \geq M_{j-1}(s),$$

а значит, в силу предположения (21),

$$M_{j-1}(s) \leq M_j(s) \quad \forall s \in [a, b].$$

Тогда система (7) для M_j переписется следующим образом:

$$\begin{aligned} M_j(s) &\leq \max \left\{ k_j^{(1)} (-M_j'(s))^{1+\gamma_1}; k_j^{(2)} (-M_j'(s))^{1+\gamma_2} \right\} \quad \forall s \in [a, \min\{s_l, b\}), \\ M_j(a) &= \overline{M}_l(a). \end{aligned} \quad (23)$$

Решая полученную систему с использованием леммы 1, получаем оценку:

$$M_j(s) \leq \overline{M}_l(s) \quad \forall s \in [a, \min\{s_l, b\}),$$

что противоречит предположению (21) и доказывает оценку (20).

Учитывая теперь (15), (19) и (20), получаем утверждение теоремы 1.

3. Примеры.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию ω вида:

$$\omega(h) = (-\alpha \ln h)^{-\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет условиям 1)–3). Тогда в силу теоремы получаем, что функции $M_j(s)$ будут удовлетворять оценке:

$$M_j(s) \leq B s^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \exp \left\{ \bar{b} s^{-\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1 \beta}} \right\} \quad \forall s \in (0, \epsilon), \forall j \in \mathbb{N} : j \geq j_\infty,$$

где $\bar{b} = b^{-\frac{1}{\beta}} \alpha^{-1} \delta$.

ПРИМЕР 2. Если теперь будем рассматривать функцию ω более общего вида, а именно,

$$\omega(h) = (\ln \ln \dots \ln h^{-\alpha})^{-\beta}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

то оценка для функций $M_j(s)$ будет иметь вид:

$$M_j(s) \leq B s^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} \exp \left\{ \exp \left\{ \dots \exp \left\{ \bar{b} s^{-\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1 \beta}} \right\} \dots \right\} \right\} \quad \forall s \in (0, \epsilon), \forall j \in \mathbb{N} : j \geq j_\infty.$$

4. Приложения.

Лемма 1. ([4], лемма 9.2.2) *Для произвольной неотрицательной невозрастающей абсолютно непрерывной функции $M(s)$ рассмотрим дифференциальное неравенство с начальным условием:*

$$\begin{aligned} M(s) &\leq \lambda \max \{k_1(-M'(s))^{1+\gamma_1}; k_2(-M'(s))^{1+\gamma_2}\} \quad \forall s > 0, \\ M(0) &\leq K \quad \forall j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $k_1, k_2, K > 0$. Тогда если $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$, то для функции $M(s)$ справедлива следующая оценка:

$$M(s) = \begin{cases} a_{11}k_1^{-\frac{1}{\gamma_1}} \left[a_{12} (k_1K^{\gamma_1})^{\frac{1}{1+\gamma_1}} - s \right]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall s > 0, \text{ если } K \leq \bar{K} \\ a_{21}k_2^{-\frac{1}{\gamma_2}} \left[a_{22} (k_2K^{\gamma_2})^{\frac{1}{1+\gamma_2}} - s \right]_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} & \forall s \in (0, \bar{s}], \text{ если } K > \bar{K} \\ a_{11}k_1^{-\frac{1}{\gamma_1}} \left[a_{12} (k_1K^{\gamma_1})^{\frac{1}{1+\gamma_1}} - (s - \bar{s}) \right]_+^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}} & \forall s > \bar{s}, \text{ если } K > \bar{K}, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(\frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1} \right)^{\frac{1+\gamma_1}{\gamma_1}}, \quad a_{12} = \frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1}, \quad a_{21} = \left(\frac{\gamma_2}{1 + \gamma_2} \right)^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}}, \quad a_{22} = \frac{1 + \gamma_2}{\gamma_2} \\ \bar{K} &= \bar{K}(k_1, k_2, \gamma_1, \gamma_2) := k_1^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}} k_2^{-\frac{1+\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}} \\ \bar{s} &: a_{21}k_2^{-\frac{1}{\gamma_2}} \left[a_{22} (k_2K^{\gamma_2})^{\frac{1}{1+\gamma_2}} - \bar{s} \right]_+^{\frac{1+\gamma_2}{\gamma_2}} = \bar{K} \quad \Rightarrow \quad \bar{s} = a_{22}k_2^{\frac{1}{1+\gamma_2}} \left(K^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} - \bar{K}^{\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}} \right). \end{aligned}$$

Цитированная литература

1. Шишков А.Е., Щелков А.Г. Граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений в многомерных областях // Матем. сб. – 1999. – Т. 190, № 3–4. – С. 129–160.
2. Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Saint-Venant’s principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. – 2003. – V. 133, No. 5. – P. 1075–1119.
3. Galaktionov V.A., Shishkov A.E. Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci. – 2004. – V. 460, No. 2051. – P. 3299–3325.
4. Kovalevsky A.A., Skrypnik I.I., Shishkov A.E. Singular Solutions in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations // De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 24, De Gruyter, Basel. – 2016. – 435 p.

References

1. Shishkov, A.E., Shchelkov, A.G. (1999). Boundary regimes with peaking for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains. Math. Sb., 190, No. 3–4, pp. 129–160 (in Russian).

2. Galaktionov, V.A., Shishkov, A.E. (2003). Saint-Venant's principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A, 133, No. 5, 1075–1119.
3. Galaktionov, V.A., Shishkov, A.E. (2004). Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations. Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., 460, No. 2051, pp. 3299–3325.
4. Kovalevsky, A.A., Skrypnik, I.I., Shishkov, A.E. (2016). Singular Solutions in Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 24, De Gruyter, Basel, 435 p.

Ye. A. Yevgenieva

Uniform estimation of the energy functions family for quasilinear parabolic equations with singular boundary data.

The paper deals with a class of weak (energy) solutions of initial–boundary value problem for doubly degenerate parabolic equations with the singular (peaking) boundary data. Such problems have been studied by many authors (V. A. Galaktionov, B. H. Gilding, M. A. Herrero and so on) in order to obtain conditions for the localization of the solution. The main purpose was to find condition for the character of singularity of boundary regime such that a solution of mentioned problem was localized. Namely, it was introduced the domain in which the solution is singular (blow-up set). Galaktionov introduced a classification of singular boundary regimes in accordance with the size of blow-up set. If blow-up set is not contained in the definition domain of the problem, then this boundary regime is called HS-regime. If it is contained in the definition domain, then the regime is called S-regime. If blow-up set lies on the boundary of the definition domain, then the regime is called LS-regime. In addition to determining the localization conditions, it is also interesting to study the behavior of the solution. The purpose of current investigation is to study the asymptotic behavior of solutions of mentioned problem with LS-regime in the neighborhood of blow-up time. In this paper we have obtained some helpful result which will allow us to formed the final estimation for solution profile. The investigation of behavior of solutions is carried out by the method of energy estimations. Singular boundary data generate some estimation for the global energy function associated with the solution of the problem. The method of energy estimations is based on the introduction of an infinite family of energy functions associated with the sequence of domains of space-time layers with height tending to 0. Based on the estimation of global energy function we obtain the system of the differential inequalities for introduced family of energy functions. The main result of the paper is a uniform estimation for these functions. Also there are several examples, which show the dependence between initial energy estimation and final estimation. The result allows us to form an idea of the asymptotic behavior of solution of mentioned problem and it will be used in the future investigation for the obtaining of final estimation.

Keywords: *quasilinear parabolic equations, energy solutions, blow-up regimes, energy functions, differential inequality.*

Є. О. Євгенєва

Рівномірна оцінка сімейства енергетичних функцій для квазілінійних параболічних рівнянь з сингулярними граничними даними.

Вивчення асимптотичної поведінки розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь в околі ча-

су сингулярного загострення граничного режиму засновано на введенні нескінченного сімейства енергетичних функцій, пов'язаних з послідовністю областей просторово-часових шарів, висоти яких прямують до 0. Ці енергетичні функції задовольняють деякій спеціальній нескінченій системі диференціальних нерівностей. Аналіз властивостей цієї системи в залежності від початкових даних, що визначаються вихідним сингулярним граничним режимом, є одним з ключових моментів при вивченні поведінки розв'язків описаної задачі. У роботі отримана рівномірна оцінка для розв'язків цих систем при різних граничних режимах, наведено кілька прикладів, що ілюструють результат.

Ключові слова: квазілінійні параболічні рівняння, енергетичні розв'язки, режими із загостренням, енергетичні функції, диференціальні нерівності.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
yevgeniia.yevgenieva@gmail.com
bashtynskaya.evgeniya@gmail.com

Получено 19.04.2018

УДК 539.3:534.1

©2017. Н. В. Жоголева, В. П. Шевченко

АНАЛИЗ ВТОРЫХ ГАРМОНИК ЛОКАЛИЗОВАННЫХ SH ВОЛН В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ МЕЖДУ АНИЗОТРОПНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАЮЩЕМ КОНТАКТЕ МАТЕРИАЛОВ

В работе используется модель геометрически и физически нелинейного деформирования анизотропной упругой среды. Построено теоретическое численно-аналитическое решение краевой задачи определения нелинейных ангармонических возмущений, которые генерируются при распространении локализованных сдвиговых волн в волноводе в виде слоя из монокристалла класса $m\bar{3}m$ кубической системы, вмещенного с неидеальным проскальзывающим механическим контактом между однотипными полупространствами монокристаллического материала класса $m\bar{3}m$ кубической системы. Численные исследования проведены для комбинации материалов волновода: слой хлорида натрия между полупространствами из материала кремния. Исследованы и обобщены амплитудно-частотные зависимости для кинематических характеристик упругих волновых смещений сдвиговых волн и их нелинейных вторых гармоник. Проанализированы эффекты влияния физико-механических характеристик волноводной структуры на амплитудные уровни и формы волновых движений нелинейных вторых гармоник исследуемых локализованных упругих волн.

MSC: 74J05.

Ключевые слова: геометрическая и физическая нелинейность, ангармонические эффекты, нелинейные вторые гармоники локализованных волн, анизотропный слой между анизотропными полупространствами.

1. Введение.

Одними из наиболее актуальных и открытых для исследования проблем механики деформируемого твердого тела на сегодняшний день являются задачи исследования нелинейных упругих волн. В современных работах освещаются вопросы анализа ангармонических нелинейных эффектов в процессах возбуждения и распространения упругих волн малой интенсивности в анизотропных упругих средах, в которых применяется методика разложения характеристик волновых движений в ряд по малому параметру в виде акустического числа Маха. Освещенные в научных публикациях соответствующие исследования в настоящее время по большей части касаются вопросов определения нелинейных ангармонических возмущений в полях объемных волн деформаций в изотропных и отдельных типах кристаллических сред, в полях сдвиговых и продольно-сдвиговых нормальных упругих волн в монокристаллическом слое из материалов кубической системы. В то время как проблемы исследования характеристик нелинейных ангармонических возмущений

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522) и при грантовой поддержке ДФФД (проект № Ф71/47-2017).

в полях локализованных упругих волн исследованы преимущественно лишь для поверхностных волн релеевского типа в изотропном полупространстве. Актуальными являются исследования ангармонических возмущений с применением модели геометрически и физически нелинейной среды поскольку они используются в технологиях свертки и интегрирования волновых сигналов в кристаллических акустоэлектронных устройствах, а также в схемах ультразвуковой диагностики упругих сред. Несмотря на важность, указанные вопросы изучены лишь в отдельных случаях [5, 6]. Таким образом, целью данной работы является построение и исследование решения задачи определения характеристик нелинейных вторых гармоник локализованных монохроматических сдвиговых упругих волн SH типа, которые распространяются в слое монокристалла хлорида натрия класса m3m кубической системы между кремниевыми упругими полупространствами аналогичного класса анизотропии, для случая неидеального скользящего контакта компонент волновода.

2. Постановка и основные соотношения задачи.

Исследуемая волноводная структура отнесена к системе прямоугольных координат, в которой слой занимает область $V_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}$, а полупространства – области $V_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -\infty < x_3 < -h\}$ и $V_3 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, h < x_3 < \infty\}$. Физико-механические свойства компоненты волновода V_p из материала класса m3m кубической системы характеризуются матричными упругими постоянными второго порядка $c_{ij}^{(p)}$, третьего порядка $c_{ijk}^{(p)}$ и плотностью $\rho^{(p)}$. Кристаллографические направления компонент волновода коллинеарны. В работе осуществляется переход к безразмерным координатным переменным и кинематическим характеристикам: $x_j = \tilde{x}_j/R_*$, где $R_* = h$; функции волновых упругих смещений $u_j = \tilde{u}_j/u_*$, где u_* – максимальный уровень амплитуд. Совокупность нормированных постоянных второго порядка $c_{ij}^{(p)}$ определяется тремя независимыми величинами $c_{11}^{(p)}, c_{12}^{(p)}, c_{44}^{(p)}$, а нормированные постоянные третьего порядка $c_{ijk}^{(p)}$ – шестью независимыми величинами $c_{111}^{(p)}, c_{112}^{(p)}, c_{114}^{(p)}, c_{155}^{(p)}, c_{123}^{(p)}, c_{456}^{(p)}$.

Для анализа нелинейных ангармонических эффектов при распространении локализованных SH волн вдоль координатного направления Ox_1 используется модель физически и геометрически нелинейного динамического деформирования материала, базирующаяся на представлении упругого потенциала U в форме

$$U = \frac{1}{2}c_{jqrk}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{rk} + \frac{1}{6}c_{jqrklm}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{rk}\varepsilon_{lm} \quad (j, q, r, k, l, m = \overline{1, 3}) \quad (1)$$

и нелинейных представлениях компонент тензора механических деформаций

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,j} + u_{l,j}u_{l,k}), \quad (2)$$

где $u_{r,k} = \partial u_r / \partial x_k$, u_r компоненты вектора волновых упругих перемещений.

Соответствующие такому выбору упругого потенциала компоненты тензора механических напряжений σ_{jd} , представляются в виде суммы линейных и нелинейных составляющих

$$\sigma_{jd} = \sigma_{jd}^{(l)} + \sigma_{jd}^{(n)}, \quad (3)$$

где

$$\sigma_{jd}^{(l)} = c_{jdrk}u_{r,k}, \quad \sigma_{jd}^{(n)} = \frac{1}{2}c_{jdrk}u_{l,r}u_{l,k} + c_{pdrk}u_{j,p}u_{r,k} + \frac{1}{2}c_{jdrklm}u_{r,k}u_{l,m}. \quad (4)$$

Уравнения движения для образующих рассматриваемую волноводную структуру упругих сред при отсутствии объемных сил можно представить в тензорном виде

$$\rho\ddot{u}_j^{(p)} - \sigma_{jd,d}^{(p,l)} = \sigma_{jd,d}^{(p,n)}, \quad (j = \overline{1,3}). \quad (5)$$

В представлениях (5) и последующих соотношениях верхний индекс p у характеристик напряженно-деформированного состояния указывает на то, что соответствующая характеристика относится к компоненте V_p рассматриваемого волновода.

Проведенное исследование малых нелинейных волновых эффектов базируется на методе малого параметра [2, 3], при котором нормированные комплексные функции волновых перемещений $u_j^{(p)}$ ($j = \overline{1,3}$) отыскиваются в виде представлений

$$u_j = u_j^{(l)} + \delta u_j^{(n)}, \quad \delta = u_*/R_* \ll 1. \quad (6)$$

3. Численно-аналитическое решение.

В рассматриваемой задаче о распространении обобщенных линейных сдвиговых волн в слое монокристалла класса m3m кубической системы между однотипными полупространствами из монокристаллов аналогичного класса кубической системы при условии неидеального проскальзывающего контакта компонент волновода линейные составляющие исследуемого волнового поля определяются из однородной спектральной краевой задачи

$$\sigma_{2j,j}^{(p,l)} - \rho_p \ddot{u}_2^{(p)} = 0, \quad (p = 1, 3), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (u_3^{(1,l)})_{x_3=-1} &= (u_3^{(2,l)})_{x_3=-1}, & (u_3^{(1,l)})_{x_3=1} &= (u_3^{(3,l)})_{x_3=1}, \\ (\sigma_{33}^{(1,l)})_{x_3=-1} &= (\sigma_{33}^{(2,l)})_{x_3=-1}, & (\sigma_{33}^{(1,l)})_{x_3=1} &= (\sigma_{33}^{(3,l)})_{x_3=1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$(\sigma_{3j}^{(1,l)})_{x_3=-1} = 0, \quad (\sigma_{3j}^{(1,l)})_{x_3=1} = 0,$$

$$(\sigma_{3j}^{(2,l)})_{x_3=-1} = 0, \quad (\sigma_{3j}^{(3,l)})_{x_3=1} = 0, \quad (j = \overline{1,2})$$

Комплексные вектор-функции линейных волновых перемещений $\vec{u}^{(p,l)}$ характеризуются единственной ненулевой компонентой $u_2^{(p,l)}$. Краевые условия задачи линейного приближения трансформируются в условия свободных от напряжений

граничных поверхностей срединного слоя V_1 . Таким образом, можно записать представления для комплексных функций волновых смещений $u_2^{(p,l)}$ с нормирующим безразмерным параметром $u_{2q}^{(0)}$ для компоненты V_p рассматриваемого волновода:

$$\begin{aligned} u_{2q}^{(l,1)} &= u_{2q}^{(0)} \cos(\alpha^{(q)} x_3) e^{-i(\omega t - k_q x_1)}, \\ u_{2q}^{(l,2)} &= 0, \\ u_{2q}^{(l,3)} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\alpha^{(q)} = q\pi/2$ ($q = \overline{0, \infty}$), а дисперсионное соотношение, связывающее частоту ω и волновое число k_q имеет вид

$$((\Omega_1^2 - k_q^2)/(c_{44}^{(1)})^{1/2} = q\pi/2, \quad \Omega_1^2 = \rho_1 \omega^2 R_*^2 / c_*. \quad (10)$$

В построенном далее решении будем рассматривать случаи $q > 0$.

Структура (9) далее используется при определении соотношений задачи поиска соответствующих нелинейных ангармонических возмущений для локализованных SH волн. Соотношения второго приближения и краевые условия на контактирующих границах $x_1 = \pm 1$ в рассматриваемом волноводе имеют вид:

$$(\sigma_{ij,j}^{(p,l)})_{\bar{u}^{(p)} = \bar{u}^{(p,n)}} - \rho_p \ddot{u}_i^{(p,n)} = -(\sigma_{ij,j}^{(p,n)})_{\bar{u}^{(p)} = \bar{u}^{(p,l)}}. \quad (11)$$

$$u_1^{(2,n)} = u_1^{(1,n)}, \quad u_3^{(2,n)} = u_3^{(1,n)} \quad \text{при } x_3 = -1,$$

$$(\sigma_{3i}^{(1,l)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{3i}^{(1,n)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,l)}} = 0, \quad (i = 1, 2)$$

$$(\sigma_{33}^{(1,l)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{33}^{(1,n)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,l)}} = (\sigma_{33}^{(2,l)})_{\bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2,n)}} + (\sigma_{33}^{(2,n)})_{\bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2,l)}};$$

$$u_1^{(3,n)} = u_1^{(1,n)}, \quad u_3^{(3,n)} = u_3^{(1,n)} \quad \text{при } x_3 = 1,$$

$$(\sigma_{3i}^{(1,l)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{3i}^{(1,n)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,l)}} = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

$$(\sigma_{33}^{(1,l)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{33}^{(1,n)})_{\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1,l)}} = (\sigma_{33}^{(3,l)})_{\bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2,n)}} + (\sigma_{33}^{(3,n)})_{\bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2,l)}}.$$

Компоненты комплексного вектора напряженности вторых гармоник определяются из соотношений краевой задачи (11), (12) в аналитической форме методами компьютерной алгебры. Из анализа структуры краевой задачи (11), (12) априори выходит, что вторыми гармониками исследуемых линейных локализованных волн являются волны P-SV типа. При этом вторые гармоники для материала слоя представляются в виде суммы частного и общего решения соответствующей неоднородной краевой задачи, а для полупространств ангармоническое возмущение описывается лишь общим решением задачи для системы однородных дифференциальных уравнений.

Структура аналитического решения задачи поиска упругих волновых перемещений $u_j^{(n,p)}$ ($j = 1, j = 3$) в нелинейных вторых гармониках исследуемых волн может быть записана в форме:

$$\begin{aligned}
 u_1^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{11} \cos(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{12} \cos(\zeta_2^{(1)} x_3)) + \tilde{\mu}_{11} \sin(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{12} \sin(\zeta_2^{(1)} x_3) + \\
 &\quad + \tilde{\nu}_1 + \tilde{\chi}_1 \cos(2\alpha^{(1)} x_3) + \tilde{\xi}_1 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
 u_3^{(1,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\lambda}_{31} \sin(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{32} \sin(\zeta_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{31} \cos(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{32} \cos(\zeta_2^{(1)} x_3) + \\
 &\quad + \tilde{\nu}_3 + \tilde{\chi}_3 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) + \tilde{\xi}_3 \cos(2\alpha^{(1)} x_3) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \quad (13) \\
 u_1^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \exp(\zeta_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \exp(\zeta_2^{(2)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
 u_3^{(2,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31}^{(2)} \exp(\zeta_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(2)} \exp(\zeta_2^{(2)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
 u_1^{(3,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{11}^{(3)} \exp(\zeta_1^{(3)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(3)} \exp(\zeta_2^{(3)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)), \\
 u_3^{(3,n)} &= (u_2^{(0)})^2 (\tilde{\beta}_{31}^{(3)} \exp(\zeta_1^{(3)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(3)} \exp(\zeta_2^{(3)} x_3)) \exp(-2i(\omega t - kx_1)).
 \end{aligned}$$

Коэффициенты $\tilde{\lambda}_{ij}$, $\tilde{\mu}_{ij}$, $\tilde{\beta}_{ij}^{(p)}$ в представлении общего решения и коэффициенты ν_i , χ_i , ξ_i в представлении частного решения получены в аналитической форме методами компьютерной алгебры и имеют крайне громоздкие выражения.

4. Анализ численных результатов.

Анализ отдельных свойств кинематических характеристик нелинейных вторых гармоник исследуемых локализованных волн проводился для волновода, состоящего из слоя V_1 хлорида натрия, размещенного между кремниевыми полупространствами V_2 и V_3 . Физико-механические свойства используемых материалов характеризуются следующими независимыми упругими константами и плотностью [1]:

$$\begin{aligned}
 \text{монокристалл NaCl} - c_{11}^{(1)} &= 4,958c_*, c_{12}^{(1)} = 1,306c_*, c_{44}^{(1)} = 1,279c_*, \\
 c_{111}^{(1)} &= -86,36c_*, c_{112}^{(1)} = -4,96c_*, c_{123}^{(1)} = 0,93c_*, c_{144}^{(1)} = 1,32c_*, \\
 c_{456}^{(1)} &= 0,71c_*, c_{155}^{(1)} = -5,87c_*, \rho_1 = 2,1678\rho_*; \text{монокристалл Si} - c_{11}^{(2)} = 16,7c_*, \\
 c_{12}^{(2)} &= 7,9c_*, c_{44}^{(2)} = 6,5c_*, \\
 c_{111}^{(2)} &= -82,5c_*, c_{112}^{(2)} = -45,1c_*, c_{123}^{(2)} = -6,4c_*, c_{144}^{(2)} = 1,2c_*, \\
 c_{456}^{(2)} &= -6,4c_*, c_{155}^{(2)} = -31,0c_*, \rho_2 = 2,33\rho_*;
 \end{aligned}$$

Величины параметров c_* , ρ_* составляют $c_* = 10^{10}$ (N/m^2), $\rho_* = 10^3$ (kg/m^3).

Для определения ряда характеристик исследуемых нелинейных волновых эффектов проведены расчеты распределений нормированных амплитуд упругих сдвиговых колебаний $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)}$ в линейных локализованных в слое SH волнах и распределений соответствующих характеристик $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ для их вторых гармоник вдоль толщинной координаты x_3 волновода в зоне слоя $x_3/h \in [-1; 1]$ и полупространств $x_3/h \in [-5; -1] \cup (1; 5]$.

Нормированные функции интенсивности сдвиговых колебаний $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)}$ и интенсивности нелинейных ангармонических возмущений $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, соответственно представлены на рис. 1 и на рис. 2 - рис. 3 для волн приведенных частот $\Omega(k_1) = 3$ и $\Omega(k_2) = 3$, которые принадлежат двум нижним ветвям дисперсионного спектра $q \in \{1; 2\}$.

Стоит отметить, что амплитуды нелинейных вторых гармоник пропорциональны квадрату нормирующего множителя $u_2^{(0)}$, который для локализованных SH волн с реальными параметрами интенсивности при $\delta \ll 1$ является малой величиной. Таким образом, реальный уровень нелинейных ангармонических эффектов может быть оценен при указании конкретного значения малой амплитуды линейной локализованной SH волны.

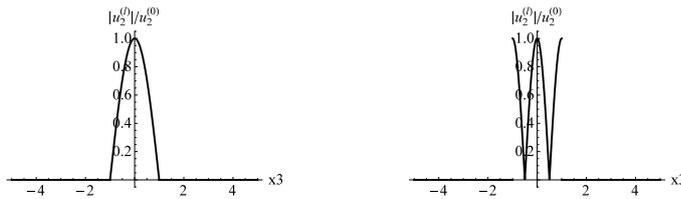


Рис. 1. Распределение нормированных значений $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)}$ для мод $q = 1, q = 2$

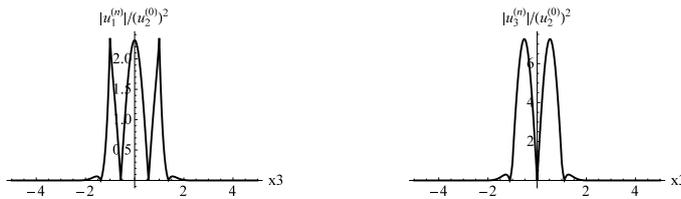


Рис. 2. Распределение нормированных значений $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ при $\Omega_1 = 3$

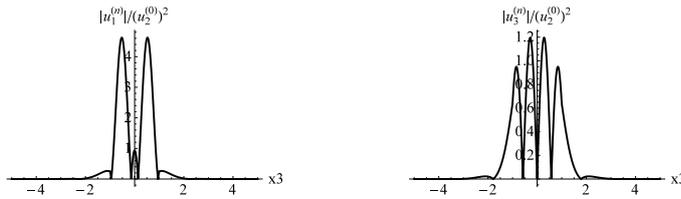


Рис. 3. Распределение нормированных значений $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ при $\Omega_2 = 3$

Рис.1 показывает ситуацию локализации линейной сдвиговой волны исключительно в слое и полное отсутствие перемещений в полупространствах. Однако учет геометрической и физической нелинейности компонент волновода демонстрирует

существование волновых движений удвоенной частоты (нелинейных вторых гармоник) в полупространствах с локализацией около контактных поверхностей.

В распределениях $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ общим априорным свойством является угасание интенсивности волновых смещений при отходе от границы $x_3 = \pm 1$ вглубь полупространств. для случая нижней ветви моды ($q = 1$) наблюдается доминирование SV-компоненты. Максимумы интенсивности $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ характеризуются тремя пиками, которые расположены в центре слоя и в зонах контакта материалов слоя и полупространств. Наибольшие значения $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ достигаются в зонах контакта компонент волновода и в количественном значении превышают максимумы $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ в три раза.

Исследование $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ для второй ветви моды ($q = 2$) показывает наличие двух пиков максимума для компоненты $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ и четырех скачков, локализованных в зоне слоя и на границе контакта материалов, для $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$. Сопоставление амплитуд $|u_1^{(n)}|/|u_3^{(n)}|$ свидетельствует о доминировании Р-компоненты.

Цитированная литература

1. Блистанов А.А., Бондаренко В.С., Переломова Н.В. и др. Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. М. П. Шаскольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.
2. Красильников В.А., Лямов В.Е. Нелинейное взаимодействие упругих волн в кристаллах и обработка сигнальной информации // Акуст. журн. – 1973. – Т. 19, № 5. – С. 801–804.
3. Русичицкий Я.Я. Особливості розвитку теорії пружних нелінійних хвиль // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 3. – С. 90–105.
4. Шевченко В.П., Жоголева Н.В. Нелінійні другі гармоніки локалізованих хвиль зсуву в анізотропному шарі між анізотропними півпросторами за умов неідеального контакту / Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – Т. 59, № 3. – С. 169–179.
5. Kurennaia K.I., Storozhev V.I. Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer // In: Proc. 10th International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7–10 July 2003). – Stockholm: IIAV, 2003. – Vol. 7. – P. 3605–3612.
6. Storozhev V.I., Kuslivaya A.A. Nonlinear anharmonic effects for normal waves in monocrystal anisotropic germanium layer with flexible not extensible coverings of sides // In: Proc. 9th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (December 17–20, 2007), Lodz, Poland. – 2007. – Vol. 1. – P. 433–440.

References

1. Blistanov, A.A., Bondarenko, V.S., Perelomova, N.V. and others. (1982). Acoustic crystals: manual. Edited by M.P. Shashkol'skaya. M.: Science, 632 p. (in Russian).
2. Krasil'nikov, V.A., Lyamov, V.E. (1973). Nonlinear interaction of elastic waves in crystals and signal information processing. Acoust. journal, 19, № 5, pp. 801–804 (in Russian).
3. Rushtchitsky, J.J. (2003). Features of the development of the theory of elastic nonlinear waves. Math. methods and phys.-mech. fields, 46, № 3, pp. 90–105 (in Ukrainian).
4. Shevchenko, V.P., Zhogoleva, N.V. (2016). Nonlinear second harmonics of localized shear waves in anisotropic layer between anisotropic halfspaces under condition of imperfect contact. Math. methods and phys.-mech. fields, Vol. 59, № 3, pp. 169–179 (in Ukrainian).
5. Kurennaia, K.I., Storozhev, V.I. (2003). Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer. In: Proc. 10th International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7–10 July 2003). Stockholm: IIAV, Vol. 7, pp. 3605–3612.

6. Storozhev, V.I., Kuslivaya, A.A. (2007). Nonlinear anharmonic effects for normal waves in mono-crystal anisotropic germanium layer with flexible not extensible coverings of sides. In: Proc. 9th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (December 17–20, 2007), Lodz, Poland, Vol. 1, pp. 433–440.

N. V. Zhogoleva, V. P. Shevchenko

The analysis of localised SH waves second harmonics in anisotropic layer between half-spaces under the sliding contact of materials.

The model of geometrically and physically nonlinear deformation of anisotropic elastic medium is used in this work. A theoretical numerical-analytic solution of the boundary value problem of determining nonlinear anharmonic disturbances that are generated because of localized shear waves propagation in a waveguide in the form of a single-crystal layer of the $m\bar{3}m$ class of a cubic system localised with nonideal slipping mechanical contact between the same half-spaces of a single-crystal material of $m\bar{3}m$ class of a cubic system is constructed. Numerical investigations have been carried out for a combination of waveguide materials: a layer of sodium chloride between half-spaces of silicon. Amplitude-frequency dependences for kinematic characteristics of elastic wave displacements of shear waves and their nonlinear second harmonics are researched and generalized. The effects of influence of physical and mechanical characteristics of waveguide structure on amplitude levels and forms of nonlinear second harmonics wave movements of the investigated localized elastic waves are analyzed.

Keywords: *geometrical and physical nonlinearity, anharmonic effects, nonlinear second harmonic of localized waves, anisotropic layer between the anisotropic half-spaces.*

Н. В. Жоголева, В. П. Шевченко

Аналіз других гармонік локалізованих SH хвиль в анізотропному шарі між півпросторами при ковзному контакті матеріалів.

В роботі використовується модель геометрично та фізично нелінійного деформування анізотропного пружного середовища. Побудовано теоретичний чисельно-аналітичний розв'язок крайової задачі визначення нелінійних ангармонічних збурень, які генеруються при поширенні локалізованих зсувних хвиль в хвилеводі у вигляді шару з монокристала класу $m\bar{3}m$ кубічної системи, вміщеного з неідеальним ковзним механічним контактом між однотипними півпросторами монокристалічного матеріалу класу $m\bar{3}m$ кубічної системи. Числові дослідження проведені для комбінації матеріалів хвилеводу – шар хлориду натрію між півпросторами з матеріалу кремнію. Досліджено та узагальнено амплітудно-частотні залежності для кінематичних характеристик пружних хвильових зсувів SH хвиль та їх нелінійних других гармонік. Проаналізовано ефекти впливу фізико-механічних характеристик хвилеводної структури на амплітудні рівні і форми хвильових рухів нелінійних других гармонік досліджуваних локалізованих пружних хвиль.

Ключові слова: *геометрична та фізична нелінійність, ангармонічні ефекти, нелінійні другі гармоніки локалізованих хвиль, анізотропний шар між анізотропними півпросторами.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
Донецкий нац. ун-т им. Василя Стуса, Винница
zhogoleva.nadia@gmail.com

Получено 19.04.18

УДК 531.38

©2017. Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак

СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Ряд задач автоматического управления, в частности, синхронизация траекторий, задача слежения (tracking) связаны с синтезом алгоритмов управления динамическими системами, которые представляют собой совокупность связанных между собой активных подсистем. В работе рассмотрена задача синхронизации колебаний для двух осцилляторов Ван дер Поля, связанных линейной упругой связью. Предполагается, что одна из подсистем зависит от внешнего управляющего воздействия. Приведено решение задачи в виде обратной связи по состоянию. Во многих практических приложениях теории управления полный вектор состояния системы неизвестен, а измерению доступны лишь некоторые функции переменных состояния - выходы системы. Поэтому основная цель работы – изучить возможность решения исходной задачи с помощью управления, в котором состояние системы заменено на его оценку, полученную с помощью наблюдателя. Построен нелинейный наблюдатель, гарантирующий получение экспоненциальных оценок неизвестных компонент фазового вектора. Показано, что исходное управление совместно с уравнениями наблюдателя решает задачу синхронизации.

MSC: 34A60, 34D20, 34N05.

Ключевые слова: синхронизация, нелинейный наблюдатель, инвариантные соотношения, осциллятор Ван дер Поля.

1. Введение.

В данной статье изучается возможность использования принципа разделения [1] в задаче синхронизации колебаний двух неидентичных осцилляторов Ван дер Поля. Рассматривается ведуще-ведомая (master-slave) схема соединения осцилляторов. Предполагается, что ведомая подсистема зависит от внешнего управляющего воздействия, осцилляторы связаны посредством линейной упругой связи, кроме того фазовый вектор известен не полностью. Такого рода системы во многих практических приложениях физики, биологии используются в качестве приближенной модели нелинейных циклических процессов, имеющих, вне зависимости от начальных условий, устойчивый предельный цикл [2]. В частности [3–5], определение характеристик и синхронизация колебаний для таких систем по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени является актуальной проблемой многих медико-биологических исследований. Нелинейный наблюдатель определения асимптотических оценок состояния и идентификатор параметров для системы связанных осцилляторов Ван дер Поля предложены в работе [6].

В начале статьи сформулирована задача синхронизации для рассматриваемой системы и приведено ее решение в виде обратной связи по состоянию. Целью работы является поиск синхронизирующего управления в виде обратной связи по оценке состояния. Такая постановка актуальна, поскольку во многих практических приложениях теории управления типичной является ситуация, когда пол-

ный вектор состояния системы неизвестен, а измерению доступны лишь некоторые функции переменных состояния – выходы системы. В этом случае можно попытаться использовать управление, которое получается из обратной связи заменой состояния системы на его оценку, полученную с помощью построение наблюдателя – специальной динамической системы, состояние которой с течением времени приближается (асимптотически или экспоненциально) к состоянию исходной системы. Возникает вопрос о том, будет ли полученное таким образом управление в виде обратной связи по оценке состояния решением исходной задачи. В теории управления, в частности в задаче стабилизации динамических систем, подобные вопросы составляет содержание известного принципа разделения [1].

В работе для решения задачи наблюдения использован аппарат метода инвариантных соотношений, который разработан в аналитической механике для поиска точных решений задач динамики твердого тела [7]. Сама схема синтеза вспомогательных инвариантных соотношений для построения нелинейного наблюдателя описана в [8]. В соответствии с этим способом для рассматриваемой системы построен некоторый аналог нелинейного наблюдателя, который обеспечивает получение экспоненциальных оценок фазового вектора. Установлено, что использование в управлении вместо состояния системы его оценки при одновременном решении задач наблюдения и синхронизации приводит к локальному решению рассматриваемой задачи.

2. Синхронизации движения осцилляторов Ван дер Поля.

Рассмотрим уравнения движения двух осцилляторов Ван дер Поля, связанных линейной упругой связью, при этом один из них является управляемым

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= -\omega_1^2 x_1 + \mu_1(1 - x_1^2)x_2 + \alpha(x_1 - x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= -\omega_2^2 x_3 + \mu_2(1 - x_3^2)x_4 + \beta(x_1 - x_3) + u. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u – управление, переменные x_1, x_3 обозначают отклонения осцилляторов от положения равновесия $x_1 = x_3 = 0$ в отсутствие управления, x_2, x_4 – соответствующие скорости этих отклонений, коэффициенты μ_1, μ_2 характеризует демпфирование. Случай $\mu_1 = \mu_2 = 0$ соответствует колебаниям без трения двух связанных гармонических осцилляторов с собственными частотами ω_1, ω_2 , соответственно.

Системы вида (1) возникают во многих физических, медико-биологических и других прикладных исследованиях в качестве упрощенной динамической модели сложных колебаний, имеющих предельный цикл. Различают модели с однонаправленной связью, когда один из параметров α или β равен нулю, и модели, учитывающие взаимное влияние активных подсистем. Если упругая связь является механической, то выполняться равенство $\alpha = -\beta$.

Предполагается, что выход системы (1) задан функциями

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3, \quad (2)$$

т.е. значения отклонений $x_1(t), x_3(t)$ в процессе движения известны как функции времени. Кроме того, будем считать, что колебания при используемом далее управлении происходят в некоторой ограниченной области D фазового пространства

$$D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq M^2\} \subseteq R^4.$$

Рассмотрим задачу управляемой синхронизации движений подсистем системы (1) по известной информации. В качестве таковой будем использовать функции (2), а также любые значения выражений, полученных с использованием только лишь значений функций выхода. В частности, далее будем считать известными решения задачи Коши для любой систем дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = F(z, y_1, y_2), \quad z(0) = z_0 \in R^n, \quad (3)$$

которые ограничены и определены для $t \in [0, \infty)$.

Задача 1. Найти закон управления $u(z(t), x_1(t), x_3(t))$, при котором решения подсистем системы (1) асимптотически стремятся друг к другу, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t) - x_3(t)) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (x_2(t) - x_4(t)) = 0.$$

Введем обозначения для отклонений соответствующих компонент фазовых векторов каждого из осцилляторов

$$e_1(t) = x_1(t) - x_3(t), \quad e_2(t) = x_2(t) - x_4(t).$$

Отметим, что величина $e_1(t)$ является известной функцией времени, поэтому она может быть использована как аргумент при синтезе закона управления, в отличие от переменной $e_2(t)$, значения которой неизвестны.

Перейдем от переменных x_3, x_4 к переменным e_1, e_2 . С учетом сделанных обозначений уравнения (1) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= R_{11} + R_{12}x_2, \\ \dot{e}_1 &= e_2, & \dot{e}_2 &= R_{21} + R_{22}x_2 + R_{23}e_2 - u, \end{aligned} \quad (4)$$

коэффициенты которой зависят от известных величин $x_1(t), x_3(t)$:

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\omega_1^2 x_1 + \alpha e_1, & R_{12} &= \mu_1(1 - x_1^2), & R_{21} &= \mu_1(1 - x_1^2) - \mu_2(1 - x_3^2), \\ R_{22} &= \omega_2^2 x_1 - \omega_1^2 x_3 + (\alpha - \beta)e_1, & R_{23} &= \mu_2(1 - x_3^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Для решения задачи 1 достаточно синтезировать управление u , обеспечивающее асимптотическое стремление к нулю отклонений $e_1(t), e_2(t)$. Если бы все компоненты фазового вектора системы (1) были известными, то таким управлением, в частности, могло бы быть выражение

$$u = R_{21} + R_{22}x_2 + R_{23}e_2 - \gamma_1 e_1 - \gamma_2 e_2, \quad (6)$$

где γ_1, γ_2 – некоторые постоянные.

Действительно, в этом случае подсистема системы (4), описывающий отклонение траекторий осцилляторов, становится системой однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Характеристическое уравнение системы (7) имеет вид

$$\lambda^2 - \gamma_2 \lambda - \gamma_1 = 0. \quad (8)$$

Выбрав постоянные γ_1, γ_2 из условия: корни λ_1, λ_2 этого уравнения имеют различные отрицательные действительные части, получаем, что закон управления (6) обеспечивает экспоненциальное стремление к нулю отклонений с показателем затухания $\lambda_* = \min(|\operatorname{Re}\lambda_1|, |\operatorname{Re}\lambda_2|)$.

3. Нелинейный наблюдатель.

Изучим возможность применения закона управления (6) в случае неполной информации о движении. А именно, используем в формуле (6) вместо значений переменных x_2, e_2 их оценки, полученные в результате решения следующей задачи наблюдения:

Задача 2. Найти асимптотически точные оценки значения компонент $x_2(t), e_2(t)$ фазового вектора системы (4) по информации об $x_1(t), x_3(t)$.

Задачу наблюдения будем решать с помощью метода синтеза инвариантных соотношений [6]. Соответствующая схема состоит во введении конечных связей между известными и неизвестными переменными и последующем динамическом расширении исходных уравнений таким образом, чтобы эти связи стали инвариантными соотношениями для расширенной системы дифференциальных уравнений.

Согласно такому подходу на первом шаге представим неизвестные компоненты фазового вектора системы (6) в виде:

$$\begin{aligned} e_2 &= \Phi(e_1) + \eta_1, & \dot{\eta}_1 &= v_1(\eta_1, \eta_2, x_1, e_1), \\ x_2 &= \Psi(x_1) + \eta_2, & \dot{\eta}_2 &= v_2(\eta_1, \eta_2, x_1, e_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что в результате такого представления исходная система (4) расширена двумя (по числу неизвестных) дифференциальными уравнениями относительно переменных η_1, η_2 . Далее будем предполагать, что подлежащие синтезу и неопределенные пока функции Φ, Ψ, v_1, v_2 должны будут удовлетворять следующим ограничениям:

- функции Φ, Ψ дифференцируемы и ограничены в рассматриваемой области;
- правые части вспомогательных дифференциальных уравнений v_1, v_2 удовлетворяют условиям, достаточным для продолжимости их решений на интервал $t \in [0, \infty)$.

Обозначив невязку от соответствующих соотношений через $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, в общем случае имеем:

$$e_2 = \Phi(e_1) + \eta_1 + \varepsilon_1, \quad x_2 = \Psi(x_1) + \eta_2 + \varepsilon_2. \quad (10)$$

Дифференцируя эти равенства, получаем, что дифференциальные уравнения для отклонений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, при условии, что вспомогательные функции v_1, v_2 равны

$$\begin{aligned} v_1 &= R_{21} + R_{22}(\Psi + \eta_2) + (R_{23} - \Phi'_{e_1})(\Phi + \eta_1) - u, \\ v_2 &= R_{11} + R_{12}(\Psi + \eta_2) - \Psi'_{x_1}(\Psi + \eta_2), \end{aligned} \quad (11)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -(R_{23} - \Phi'_{e_1})\varepsilon_1 + R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= (R_{12} - \Psi'_{x_1})\varepsilon_2, \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) допускают тривиальное решение $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Следовательно, соотношения

$$e_2 = \Phi(e_1) + \eta_1, \quad x_2 = \Psi(x_1) + \eta_2,$$

с учетом (11), для некоторых решений системы (4) выполняются тождественно. Отметим, что это утверждение верно для любых дифференцируемых функций $\Phi(e_1), \Psi(x_1)$ и любого допустимого управления u , при которых решения вспомогательных дифференциальных уравнений существуют.

На втором шаге определим свободные функции $\Phi(e_1), \Psi(x_1)$ из условий асимптотической устойчивости тривиального решения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Пусть

$$R_{12} - \Psi'_{x_1} = -\lambda, \quad R_{23} - \Phi'_{e_1} = \lambda,$$

где λ – некоторая положительная постоянная. С учетом обозначений (11) перепишем эти равенства:

$$\Psi'_{x_1} = \mu_1(1 - x_1^2) + \lambda, \quad \Phi'_{e_1} = \mu_2(1 - x_3^2) + \lambda, \quad (13)$$

В качестве функций, которые удовлетворяют последним соотношениям возьмем

$$\Psi(x_1) = (\mu_1 + \lambda)x_1 + \mu_1 \frac{x_1^3}{3}, \quad \Phi(e_1) = [\mu_2(1 - x_3^2) + \lambda]e_1. \quad (14)$$

Таким образом, можно утверждать, что при выбранных $\Phi(e_1), \Psi(x_1)$, ошибки $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$, возникающие при определении неизвестных $x_2(t), e_2(t)$ по формулам (10), удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -\lambda\varepsilon_1 + R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\lambda\varepsilon_2, \end{aligned} \quad (15)$$

Покажем, что нулевое решение (15) при некоторых λ становится асимптотически устойчивым. Для этого рассмотрим в качестве функции Ляпунова положительно определенную функцию

$$V = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$$

и оценим ее производную, взятую в силу системы (15)

$$\frac{dV}{dt} = -\lambda(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + R_{22}\varepsilon_1\varepsilon_2 \leq \left(-\lambda + \frac{|R_{22}|}{2}\right)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2).$$

В соответствии со сделанным ранее предположением амплитуды колебаний осцилляторов Ван дер Поля ограничены. Пусть

$$R^* = \sup_{t \in [0, \infty)} |R_{22}| = \sup_{t \in [0, \infty)} |\mu_1(1 - x_1^2) - \mu_2(1 - x_3^2)|.$$

Тогда, при $\lambda > R^*$ функция V становится отрицательно определенной, что является достаточным условием для асимптотической устойчивости нулевого решения (15).

В итоге, мы получили соотношения, которые решают задачу наблюдения неизвестных компонент фазового вектора исходной системы (4)

$$e_2 = [\mu_2(1 - x_3^2) + \lambda]e_1 + \eta_1 + \varepsilon_1, \quad x_2 = (\mu_1 + \lambda)x_1 + \mu_1 \frac{x_1^3}{3} + \eta_2 + \varepsilon_2, \quad (16)$$

где правые части дифференциальных уравнений относительно η_1, η_2 определены формулами (11). При этом оценки (16) являются экспоненциальными, так как

$$\varepsilon_i(t) = O(\exp\{(R^* - \lambda)t\}), \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

4. Синхронизация по выходу.

Используем в законе управления (6) вместо переменных x_2, e_2 их приближенные оценки \hat{x}_2, \hat{e}_2 , вычисленные по формулам

$$\hat{x}_2 = \Psi(x_1) + \eta_2, \quad \hat{e}_2 = \Phi(e_1) + \eta_1,$$

т.е. $\hat{x}_2 = x_2 - \varepsilon_2, \hat{e}_2 = e_2 - \varepsilon_1$. В результате применения управления (6) с такими аргументами в дифференциальных уравнениях для отклонений траекторий двух осцилляторов (7) возникают ошибки: $e_1(t) + \delta_1(t), e_2(t) + \delta_2(t)$. Соответствующие возмущения удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 &= \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 - R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что при наличии возмущений формально задача синхронизации не имеет решения, поскольку тривиальное решение $\delta_1 = \delta_2 = 0$ не удовлетворяет системе (18).

В общем же случае, при одновременном решении задач наблюдения и синхронизации, уравнения для отклонений имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 &= \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 - R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -\lambda\varepsilon_1 + R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\lambda\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Последняя система линейных дифференциальных уравнений допускает тривиальное решение $\delta_1 = \delta_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Поэтому одновременное решение задачи наблюдения и синхронизации может, в принципе, решить задачу 1. В частности, для этого достаточно выбрать параметры $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$ из условий асимптотической устойчивости положения равновесия системы (19). Для формирования ограничений на выбор этих параметров воспользуемся теоремой [9].

Теорема. Пусть для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$ выполнено:

а) каждое решение системы стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$;

б) в системе $\dot{z} = Az + f(z)$ вектор функция $f(z)$ непрерывна в некоторой окрестности $z = 0$;

в) $\frac{\|f(z)\|}{\|z\|} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$.

Тогда каждое решение $z(t, z_0)$, $z(0, z_0) = z_0$ стремится к нулю для достаточно малых $\|z_0\|$.

Введем в рассмотрение векторы $\delta = (\delta_1, \delta_2)^T$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T$, $z = (\delta^T, \varepsilon^T)^T$, где T означает операцию транспонирования. Матрица A и вектор-функция $f(z)$ в нашем случае имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2 \\ R_{22}\varepsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что условия а) и б) теоремы выполнены. Действительно, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, а функция $f(z)$ является линейной однородной функцией z . Рассмотрим теперь условие в). В качестве нормы вектора будем использовать сумму абсолютных величин всех его компонент. Тогда

$$\|z\| = |\delta_1| + |\delta_2| + |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|, \quad \|f(z)\| = |R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2| + |R_{22}\varepsilon_2|.$$

Оценим выражение $\frac{\|f(z)\|}{\|z\|}$. Пусть M некоторая положительная константа, которая мажорирует максимальные значения ограниченных функций $|R_{23}|, |R_{22}|$. Имеем:

$$\frac{\|f(z)\|}{\|z\|} = \frac{|R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2| + |R_{22}\varepsilon_2|}{\|z\|} \leq \frac{|R_{23}||\varepsilon_1| + 2|R_{22}||\varepsilon_2|}{\|z\|} \leq 2M \frac{\|\varepsilon\|}{\|\varepsilon\| + \|\delta\|}.$$

Для выполнения условия в) теоремы, достаточно выбрать параметры $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$ так, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|\varepsilon\|}{\|\delta\|} = 0. \quad (20)$$

В соответствии с (17), норма числителя этого частного $\|\varepsilon\| = O(\exp\{(R^* - \lambda)t\})$. Следовательно, в случае экспоненциального стремления к нулю величины $\|\delta\|$, ее показатель затухания должен быть строго меньше $\lambda - R^*$.

Чтобы выполнить это условие достаточно потребовать, чтобы коэффициенты γ_1, γ_2 характеристического уравнения (8) были таковы, что

$$0 < \lambda_* = \min(|\operatorname{Re}\lambda_1|, |\operatorname{Re}\lambda_2|) < \lambda - R^*. \quad (21)$$

Действительно, система дифференциальных уравнений (19) является каскадной, переменные ε не зависят δ и их значения могут быть рассмотрены как внешнее воздействие на подсистему, состоящей из первых двух уравнений (19). Общее решение этой подсистемы имеет вид

$$\delta(t) = \Delta(t)\delta_0 + \int_0^t \Delta(t-\tau)f_1(\tau)d\tau, \quad \delta(0) = \delta_0, \quad (22)$$

где Δ – матрица фундаментальных решений системы линейных однородных уравнений (7), имеющая собственные значения λ_1, λ_2 , а внешнее воздействие задано вектор-функцией $f_1(t) = (0, -R_{23}(t)\varepsilon_1(t) - R_{22}(t)\varepsilon_2(t))^T$.

Поскольку показатель затухания первого слагаемого (22) удовлетворяет неравенству (21), то вне зависимости от второго слагаемого (22) показатель затухания их суммы эту величину может только лишь уменьшить. Следовательно, условие в) теоремы выполнено и тривиальное решение системы (19) обладает свойством локальной асимптотической устойчивости. Тем самым установлено, что отклонения траекторий двух осцилляторов $\|e+\delta\|$ при достаточно малых начальных значениях $\|\delta\|, \|\varepsilon\|$ стремятся к нулю с ростом t .

В итоге можно сформулировать следующее

Утверждение. Пусть постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$ таковы, что выполнено неравенство (21). Тогда управление

$$u = -\gamma_1 e_1 + R_{22}(\Psi(x_1) + \eta_2) + (R_{23} - \gamma_2)(\Phi(e_1) + \eta_1) + R_{21}, \quad (23)$$

где

$$\Psi(x_1) = (\mu_1 + \lambda)x_1 + \mu_1 \frac{x_1^3}{3}, \quad \Phi(e_1) = [\mu_2(1 - x_3^2) + \lambda]e_1,$$

а переменные η_1, η_2 – произвольное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= R_{21} + R_{22}(\Psi + \eta_2) + (R_{23} - \Phi'_{e_1})(\Phi + \eta_1) - u, \\ \dot{\eta}_2 &= R_{11} + R_{12}(\Psi + \eta_2) - \Psi'_{x_1}(\Psi + \eta_2), \end{aligned}$$

решает, по крайней мере, локально, Задачу 1 для системы (4).

Как уже было отмечено, система (19) имеет каскадную структуру, из вида которой следует, что решение задачи наблюдения не зависит от решения задачи синхронизации. Поэтому, с целью уменьшения начального значения $\|z(0)\|$, задачу можно разбить на два этапа. На первом из них начать решать задачу наблюдения при произвольном допустимом управлении, например, при $u = 0$, обеспечивая тем самым малость значений $\|\varepsilon\|$. На втором этапе, начиная с некоторого момента

времени, принятого далее за начальный момент, начинать решать одновременно Задачу 1 и Задачу 2 с управлением (23).

Цитированная литература

1. *Freeman R.* Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1995. – V. 40, № 12. – P. 2119–2122.
2. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3–42.
3. *Grudzinski K., Zebrowski J.J.* Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // *Physica A* 336. – 2003. – P. 153–162.
4. *Bernardo D.D., Signorini M. G., Cerutti S.* A model of two non-linear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics. // *Int. J. Bifurcation Chaos*. – 1998. – 8. – P. 1975–1985.
5. *Brandt M.E., Wang G., Shih H-T.* Feedback control of a nonlinear dual-oscillator heartbeat model. – *Bifurcation Control*. – Eds. G. Chen, D. J. Hill, X. Yu. – Springer. –2003. – P. 265–273.
6. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Идентификация характеристик осцилляторных сетей // *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна*. – Том 84. – 2016.– С. 22–30.
7. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // *Механика твердого тела*. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
8. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // *Труды ИПММ НАН Украины*. – 2015. – Т. 29.– С. 69–76.
9. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. – 216 с.

References

1. *Freeman, R.* (1995). Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40, № 12, pp. 2119–2122.
2. *Kuznetsov, A.P., Seliverstova, E.S., Trubetskov, D.I., Tyuryukina, L.V.* (2014). The phenomenon of van der Pol's equation. *Izvestiya Vuzov. Prikladnaja nelinejnaja dynamika*, 22, № 4, pp. 3–42 (in Russian).
3. *Grudzinski, K., Zebrowski, J.J.* (2003). Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators, *Physica A* 336, pp. 153–162.
4. *Bernardo, D.D., Signorini, M. G., Cerutti, S.* (1998). A model of two non-linear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 8, pp. 1975–1985.
5. *Brandt, M.E., Wang, G., Shih, H-T.* (2003). Feedback control of a nonlinear dual-oscillator heartbeat model. *Bifurcation Control*. Eds. G. Chen, D. J. Hill, X. Yu. pringer, pp. 265–273.
6. *Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F.* (2016). Identification of oscillator networks characteristics. *Visnyk Kharkivskogo nacional'nogo universitetu im. V.N. Karazina*, 84, pp. 22–30 (in Russian).
7. *Kharlamov, P.V.* (1974). On invariant relations of a system of differential equations. *Mehanika tverdogo tela*, is. 6, pp. 15–24 (in Russian).
8. *Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F.* (2015). Synthesis of additional relations in inverse control problems, *Trudy IPMM NAN Ukrainy*, 29, pp. 69–76 (in Russian).
9. *Bellman, R.* (1954). The theory of stability of solutions of differential equations. M.: Izdatel'stvo inostranoj literatury, pp. 216 (in Russian).

N. V. Zhogoleva, V. F. Shcherbak

Synchronization of oscillations for coupled Van der Pol oscillators.

A number of automatic control tasks, in particular, the synchronization of trajectories, the tracking

task, control by a reference system are associated with the synthesis of control algorithms for dynamic cascade systems, which are a set of interconnected active subsystems. In this paper, the oscillation synchronization problem is considered for two Van der Pol oscillators coupled by a linear elastic connection. It is assumed that the driven subsystem depends on the external control action, in addition, the phase vector is not fully known. On the first step the solution of the problem of synchronization in the form of state feedback is written. The aim of the work is to find the synchronizing control in the form of feedback on the state estimation. Such a formulation is relevant, since for many practical applications of control theory, a typical situation is when the complete state vector of the system is unknown and only some of the functions of the state variables – the outputs of the system are accessible to measurement. One can try to use the control law obtained from feedback by replacing the state with its estimate obtained by observer – a special dynamical system whose state eventually approaches (asymptotically or exponentially) to the state of the original system. In this case a question arises whether such control will be solving the synchronization problem. In mathematical control theory, in particular for the stabilization problem of dynamical systems, similar questions constitute the content of the known principle of separation. For the observation problem solving the apparatus of the method of synthesis of auxiliary invariant relations for constructing a nonlinear observer was used. In accordance with this approach a nonlinear observer is constructed for the system under consideration, which ensures the exponential estimates of the phase vector. It is further shown that the use in the control law instead of the state of the system of its evaluation under simultaneously solving the problems of observation and synchronization leads to the solution of the problem under consideration.

Keywords: *synchronization, nonlinear observer, invariant relations, Van der Pol oscillator.*

Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак

Синхронізація коливань зв'язаних осциляторів Ван дер Поля.

Ряд задач автоматичного управління, зокрема, синхронізація траєкторій, стеження (tracking) за еталонною системою тощо пов'язані з синтезом алгоритмів керування динамічними системами, які представляють собою сукупність пов'язаних між собою активних підсистем. В роботі розглянуто задачу синхронізації коливань для двох осциляторів Ван дер Поля, пов'язаних лінійним пружним зв'язком. Передбачається, що одна з підсистем залежить від зовнішнього керування. Наведено рішення задачі синхронізації для вихідної системи у вигляді зворотного зв'язку за станом. У багатьох практичних додатках теорії управління повний вектор стану системи є невідомим, а виміру доступні лише деякі функції змінних стану - виходи системи. Тому основний зміст роботи – вивчити можливість використання закону керування, в якому стан системи замінено на його оцінку, отриману за допомогою спостерігача. Побудований нелінійний спостерігач, який гарантує отримання експоненційних оцінок невідомих компонент фазового вектора. Показано, що одночасне рішення задач спостереження та синхронізації вирішує вихідну задачу.

Ключові слова: *синхронізація, нелінійний спостерігач, інваріантні співвідношення, осцилятор Ван дер Поля.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
zhogoleva.nadia@gmail.com, scherbakvf@ukr.net

Получено 05.09.17

УДК 533.6.013.42

©2017. А. А. Лимарь, Ю. Н. Кононов

ОБ УТОЧНЕНИИ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ЖЕСТКИМИ ОСНОВАНИЯМИ

В линейной постановке выведено уточненное, на случай осесимметричных колебаний, частотное уравнение собственных совместных колебаний прямоугольной мембраны и жидкости. Мембрана горизонтально разделяет идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями. Частотное уравнения для симметричных и несимметричных совместных колебаний мембраны и жидкости представлено в единой форме. Уточнены ранее полученные приближенные условия устойчивости колебаний мембраны и жидкости. Показано, что для несимметричных частот приближенное значение критического натяжения является заниженным в $4/5$ раза, а для симметричных – в 0.818 раз.

MSC: 34N05.

Ключевые слова: гидроупругость, прямоугольная мембрана, идеальная несжимаемая жидкость, плоские колебания, устойчивость.

1. Введение.

На основании единого Лагранжевого подхода задача о колебании и устойчивости упругой прямоугольной пластины между идеальными жидкостями разной плотности в жестком прямоугольном канале, по видимому, впервые была рассмотрена в статье [1] и в монографии [2]. В работе [3] эта задача была рассмотрена на основании Лагранжа-Эйлера подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в статье [4]. В работах [5, 6] эта задача была обобщена на случай двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в статье [7] – на случай упругого дна. Наиболее общие исследования колебаний резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена пластина или мембрана, было проведено в монографии [7]. Из последних работ следует отметить работы [8–12]. В статьях [13–14] рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях упругой мембраны, разделяющей двухплотностную жидкость в жестком круговом цилиндрическом резервуаре применительно к современным капиллярным системам отбора жидкости (КСОЖ).

2. Постановка задачи.

Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной мембраны горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости плотности ρ_i ($i = 1, 2$)

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522) и при грантовой поддержке ДФФД (проект № Ф71/47-2017).

в жестком прямоугольном канале шириной b ($b = 2a$). Мембрана подвержена растягивающим усилиям интенсивности Γ в срединной поверхности. Контуры мембраны закреплены. Верхняя жидкость плотности ρ_1 заполняет сосуд до глубины h_1 , а нижняя жидкость плотности ρ_2 до глубины h_2 . Систему координат $Oxuz$ расположим так, чтобы плоскость Oxu находилась на невозмущённой срединной поверхности мембраны, ось Oy была направлена вдоль канала, а ось Oz - противоположно вектору ускорения силы тяжести \vec{g} . Колебания мембраны и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластины и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными. Уравнения плоских колебаний упругой мембраны и жидкости имеют вид [10–11]

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + g \Delta \rho W = \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + Q \text{ при } z = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \quad (3)$$

$$W|_{x=\pm a} = 0, \quad (4)$$

$$\int_{-a}^a W dx = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right|_{x=\mp a} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_2. \quad (7)$$

Здесь $k_0 = \rho_0 h_0$; $W(x, t)$, ρ_0 , h_0 – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина мембраны; $\Phi_i(x, z, t)$ – потенциал скоростей i -ой жидкости ($i = 1, 2$); $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$; $Q = Q_2 \rho_2 - Q_1 \rho_1$, Q_i – произвольная функция времени.

3. Метод решения.

Представим функции $\Phi_i(x, z, t)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям $\psi_n(x)$

$$\Phi_i(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{in}(t) e^{k_n z} + B_{in}(t) e^{-k_n z} \right] \psi_n(x) \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

где функции $\psi_n(x) = \cos k_n(x + a)$, а соответствующие им собственные числа $k_n = \pi/2a$ [3].

Представление функций $\Phi_i(x, z, t)$ в виде (8) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (6).

Подставив ряды (8) в (3) и (7) и, воспользовавшись ортогональностью функций ψ_n , получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных A_{in} , B_{in} и \dot{W}_n . Разрешим ее относительно \dot{W}_n :

$$\begin{aligned} A_{1n} &= -\frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, & B_{1n} &= -\frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \\ A_{2n} &= \frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, & B_{2n} &= \frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{N_n^2} \int_{-a}^a W \psi_n dx, \\ N_n^2 &= \int_{-a}^a \psi_n^2 dx = a, \quad \kappa_{in} = h_i k_n. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом соотношений (8)–(10) уравнение (1) примет вид

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + g \Delta \rho W = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n} \psi_n + Q, \quad (11)$$

где $a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n}$.

Таким образом, совместные колебания упругой мембраны и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (10)–(11), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемой жидкости (5) и заданных начальных условий.

4. Собственные частоты совместных колебаний упругой мембраны и жидкости.

Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругой мембраны и жидкости положим:

$$W(x, t) = w(x) e^{i\omega t}, \quad Q = C_0 e^{i\omega t}. \quad (12)$$

Подставив (12) в (10)–(11), в граничные условия (4) и условия (5), получим

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + qw = -\frac{\omega^2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n w_n}{k_n} \psi_n + C, \quad (13)$$

$$w_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w \psi_n dx, \quad (14)$$

$$w|_{x=\pm a} = 0, \quad (15)$$

$$\int_{-a}^a w dx = 0. \quad (16)$$

Здесь $q = (k_0\omega^2 - g\Delta\rho)/T$, $C = -C_0/T$.

Общее решение уравнения (13) будем искать в виде общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного [7]

$$w = \sum_{k=1}^2 A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \psi_n + w_0, \quad (17)$$

где w_k^0 ($k = \overline{1, 2}$) – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{d^2 w_k^0}{dx^2} + q w_k^0 = 0. \quad (18)$$

Здесь A_k^0 , \tilde{C}_n и w_0 – неизвестные константы.

Подставив (17) в уравнение (13), и воспользовавшись соотношением $\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} = -k_n^2 \psi_n$, получим

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n}{k_n d_n} w_n, \quad C = q w_0 \quad (19)$$

где $d_n = T k_n^2 + g\Delta\rho - k_0\omega^2$.

Подставив (17) в (14), и принимая во внимание (19), найдем выражение для w_n через неизвестные константы A_k^0

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n} \sum_{k=1}^4 A_k^0 E_{kn}^0. \quad (20)$$

Здесь

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w_k^0 \psi_n dx. \quad (21)$$

С учетом (16), (19) и (20) окончательное выражение для формы прогиба пластины w , примет вид

$$w = \sum_{k=1}^2 \left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} \psi_n \right) A_k^0, \quad (22)$$

где $\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_k^0 dx$, $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_0$, $\tilde{d}_n = T k_n^2 + g\Delta\rho$.

В отличие от работ [10–11] в формуле (22) появляется константа \tilde{w}_k^0 , которая для несимметричных совместных колебаний мембраны и жидкости равна нулю, а для симметричных колебаний отлична от нуля.

В (22) входит две неизвестные константы A_k^0 . Из граничных условий закрепления мембраны (15) имеем два линейных однородных уравнений относительно A_k^0

$$\sum_{k=1}^2 \left(B_{jk} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 B_{jn}^* \right) A_k^0 = 0, \quad (j = 1, 2). \quad (23)$$

Здесь $\alpha_n = a_n/(\omega^2 a_n - k_n d_n) = a_n/(\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n)$, $B_{jk} = w_k^0|_{x=\pm a} - \tilde{w}_k^0$,

$$B_{jn}^* = \begin{cases} 1, & x = -a \quad (j = 1), \\ (-1)^n, & x = a \quad (j = 2). \end{cases}$$

Из равенства нулю определителя однородной системы (23) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой мембраны и жидкости

$$\left| \|C_{qk}\|_{j,k=1}^2 \right| = 0, \quad (24)$$

где $C_{jk} = B_{jk} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 B_{jn}^*$ ($j, k = \overline{1, 2}$).

Собственные формы колебаний будут найдены из однородной системы (23) и выражения (22).

Воспользовавшись разложением функций w_k^0 в ряд по полной и ортогональной системе функций ψ_n , условием $\int_{-a}^a \psi_n dx = 0$ и обозначением (21), уравнение (24) можно переписать так [10-11]

$$\left| \|C_{qk}\|_{j,k=1}^2 \right| = 0, \quad (25)$$

где $C_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 B_{jn}^*$ ($j, k = \overline{1, 2}$), $\beta_n = 1 + \alpha_n = \frac{k_n d_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}$.

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений ω_l^2 , являющихся корнями характеристических уравнений (24) и (25), а соответствующие им собственные функции $w_l(x)$ образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $[-a, a]$. Однако, следует отметить, что при определенных соотношениях параметров механической системы частотные уравнения могут не иметь положительных корней, т.е. плоская форма равновесия упругой мембраны может быть неустойчивой [10-11].

Решения однородного уравнения w_k^0 и значения коэффициента E_{kn}^0 зависят от знака величины q .

При $q > 0$ фундаментальная система решений w_k^0 имеет вид $w_k^0 = \{\sin px, \cos px\}$, а коэффициенты E_{kn}^0 и C_{jk} –

$$E_{kn}^0 = \frac{Tp}{ad_n} \{ [(-1)^n - 1] \cos \tilde{p}, [(-1)^n + 1] \sin \tilde{p} \},$$

$$C_{11} = \frac{pT}{a} \cos \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] \tilde{\beta}_n, \quad C_{12} = \frac{pT}{a} \sin \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + 1] \tilde{\beta}_n,$$

$$C_{21} = \frac{pT}{a} \cos \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] \tilde{\beta}_n, \quad C_{22} = \frac{pT}{a} \sin \tilde{p} \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] \tilde{\beta}_n,$$

и частотное уравнение (25) запишется так

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = \frac{4p^2T^2}{a^2} \sin 2\tilde{p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m} \right) = 0. \quad (26)$$

Здесь $p^2 = q$, $\tilde{p} = pa$.

При $q < 0$ фундаментальная система решений w_k^0 имеет вид

$$w_k^0 = \{ \sinh \tilde{p}x, \cosh \tilde{p}x \},$$

а коэффициенты E_{kn}^0 и C_{jk} –

$$E_{kn}^0 = \frac{T\tilde{p}}{ad_n} \{ [(-1)^n - 1] \cosh \tilde{p}_1, [(-1)^n + 1] \sinh \tilde{p}_1 \},$$

$$C_{11} = \frac{T\tilde{p} \cosh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] \tilde{\beta}_n, \quad C_{12} = \frac{T\tilde{p} \sinh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + 1] \tilde{\beta}_n,$$

$$C_{21} = -\frac{T\tilde{p} \cosh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n - 1] \tilde{\beta}_n, \quad C_{22} = \frac{T\tilde{p} \sinh \tilde{p}_1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + 1] \tilde{\beta}_n,$$

и частотное уравнение принимает вид

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = -\frac{qT^2}{4a^2} \sinh 2\tilde{p}_1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m} \right) = 0, \quad (27)$$

где $\tilde{p}^2 = -q > 0$, $\tilde{p}_1 = \tilde{p}a$.

Так как $\sin 2\tilde{p} \neq 0$ и $\sinh 2\tilde{p}_1 \neq 0$, то из вида уравнений (26) и (27) следует, что частотное уравнение (25) имеет вид $\left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m} \right) = 0$, не зависит от условий $k_0\omega^2 - g\Delta\rho > 0$ или $k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho < 0$, распадается на четные и нечетные частоты и может быть записано в единой форме для этих частот [10-11] $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n = 0$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0. \quad (28)$$

Несложно показать, что нули знаменателя левой части уравнения (28) описывают частоты колебаний незакрепленной мембраны.

Таким образом, если $n = 2m - 1$, то уравнение (28) описывает нечетные частоты, а если $n = 2m$, то – четные частоты. Следует отметить, что такого упрощения удалось достигнуть за счет разложения функции w_k^0 в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций ψ_n и рассмотрении уравнения (25). При использовании уравнения (24) значительно возросли бы аналитические вычисления, и такого упрощения можно было бы достигнуть, если разложить тригонометрические и гиперболические функции на простейшие дроби так, как это сделано, например, в работах [4–6].

Левая часть уравнения (28) является монотонно возрастающей функцией параметра ω^2 на интервале $(k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n, k_{n+1} \tilde{d}_{n+1} / \tilde{a}_{n+1})$ ($n = 1, 2, \dots$), принимающая на нем значения от $-\infty$ до ∞ . Следовательно, между двумя последовательными значениями $k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n$ лежит только один корень уравнения (28). Этим заранее определяются интервалы, в которых находятся собственные частоты.

5. Устойчивость колебаний упругой мембраны, разделяющей жидкости разной плотности.

Если в ряде уравнения (28) удерживать два члена, то из неравенства $\omega^2 > 0$ следует условие устойчивости плоской формы равновесия мембраны $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 > 0$. Для нечетных и четных форм колебаний оно соответственно примет вид [10–11]

$$T > \frac{4g(\rho_1 - \rho_2)a^2}{5\pi^2}, \quad (n = 1, 3) \quad (29)$$

$$T > \frac{2g(\rho_1 - \rho_2)a^2}{5\pi^2}, \quad (n = 2, 4). \quad (30)$$

Условия устойчивости (29)–(30) не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы мембраны. Из этих условий видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужна значительно большая величина предварительного натяжения, чем для симметричных. Неравенства (29)–(30) можно уточнить с учетом трех и более членов ряда, но при этом придется воспользоваться условиями положительности корней полиномов n -ой степеней, что значительно усложнит аналитические исследования. Из условий (29)–(30) следует, что, с учетом принятой точности, при $g \geq 0$ и естественной стратификации $\rho_1 \leq \rho_2$ частотное уравнение (28) всегда имеет положительные корни и плоская форма равновесия упругой мембраны устойчива. Неустойчивость может иметь место только в случае $g\Delta\rho < 0$, а при $g > 0$ только если нарушается естественная стратификация, т.е. при условии $\rho_1 > \rho_2$. Выписанные неравенства (29)–(30) совпадают с неравенствами, полученными при наличии свободной поверхности у верхней жидкости в статье [3] и при $T = 0$ с неравенствами работы [1–2].

Для нахождения критических значений механических параметров при которых происходит потеря устойчивости в частотном уравнении (28) положим $\omega^2 = 0$ и

оно примет вид $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\tilde{d}_n = 0$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Tk_n^2 + g\Delta\rho} = 0. \quad (31)$$

Из уравнения (31) следует, что при $\Delta\rho \geq 0$ ($g > 0$) оно не имеет решений и в этом случае механическая система всегда будет устойчива. Неустойчивость может возникнуть только при $\Delta\rho < 0$.

Перепишем уравнение (31) в безразмерном виде при $\Delta\rho < 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = 0, \quad (32)$$

где

$$\alpha^2 = -\frac{4g\Delta\rho a^2}{T\pi^2} > 0.$$

Числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 - \alpha^2)$ для нечетных и четных значений n могут быть представлены следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 - \alpha^2} = \frac{\pi}{4\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2}, \quad (33)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - \alpha^2} = -\frac{1}{4\alpha^2} \left(\pi\alpha \cot \frac{\pi\alpha}{2} - 2 \right). \quad (34)$$

Решение уравнения (32) при $n = 2k - 1$ с учетом (33) имеет вид $\alpha = 2l$, а критическое значение натяжения $T = g(\rho_1 - \rho_2) a^2 / \pi^2 l^2$, которое при $l = 1$ даст следующее точное условие устойчивости

$$T > \frac{1}{\pi^2} g(\rho_1 - \rho_2) a^2 = 0.101321g(\rho_1 - \rho_2) a^2. \quad (35)$$

Приближенное значение, выписанное из условия (29), запишется так

$$T > \frac{4}{5\pi^2} g(\rho_1 - \rho_2) a^2 = 0.081057g(\rho_1 - \rho_2) a^2. \quad (36)$$

Условие устойчивости (35), полученное для несимметричных частот, уточняет ранее полученное условие (36). Из неравенств (35)–(36) следует, что приближенное значение критического натяжения является заниженным в 4/5 раза.

Первый корень уравнения (32) при $n = 2k$ с учетом (34) имеет вид $\frac{\pi\alpha}{2} = 4.493409458$ из которого следует следующее точное условие устойчивости

$$T > 0.049528g(\rho_1 - \rho_2) a^2. \quad (37)$$

Приближенное значение, выписанное из условия (30) при $n = 2k$, примет вид

$$T > \frac{2}{5\pi^2} g (\rho_1 - \rho_2) a^2 = 0.040528g (\rho_1 - \rho_2) a^2. \quad (38)$$

Условие устойчивости (38), полученное для четных частот, уточняет ранее полученное условие (37). Из неравенств (37)–(38) следует, что приближенное значение критического натяжения является заниженным в 0.818 раз, что на 2.3% больше, чем для несимметричных частот.

Таким образом, уточнено ранее полученное частотное уравнение для случая осесимметричных колебаний и уточнены приближенные условия устойчивости. Показано, что учет двух членов в ряде частотного уравнения дает достаточную для практики точность.

Цитированная литература

1. Ильгамов М.А., Сахабутдинов Ж.М. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности // Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея. – М., 1974. – С. 341–346.
2. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. – М.: Гостехиздат, Наука, 1991. – 200 с.
3. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 170–176.
4. Троценко В.А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 8. – С. 74–80.
5. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на “свободной” и внутренней поверхностях // Акустичний вісник. – 2003. – Т. 6, № 4. – С. 44–52.
6. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном // Прикладная механика. – 2008. – Т. 10, № 1. – С. 23–32.
7. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
8. Троценко В.А. Свободные колебания жидкости в канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Укр. мат. вестник. – 2007. – Т. 4, № 2.- С. 215–228.
9. Богун Р.І., Троценко В.А. Колебания прямоугольной мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. Праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 3.- С. 53–76.
10. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. Вільні коливання рідини в прямокутному каналі з довільним симетричним дном та пружною мембраною на вільній поверхні // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2015. – № 1–2. – С. 97–108.
11. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. Об устойчивости колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2016. – Т. 25. – С. 69–84.
12. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. Oscillations of rectangular plate separating ideal liquids of different density in a rectangular channel with else basis // International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, October 17–19, 2017, Cherkasy, Ukraine. Book of Abstracts. – Vinnytsia: Vasyl’ Stus Donetsk National University, 2017. – P. 31–33.

13. Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения. Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. – 2013. – № 11. DOI: 10.7463/1113.0619258 [Электронный ресурс] URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (дата обращения: 19.02.2014).
14. Пожалоостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 12. [Электронный ресурс] URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (дата обращения: 19.02.2014).

References

1. Ilgamov, M.A., Sakhabutdinov Zh.M. (1974). On the stability of an elastic plate between liquids of different density. *Izv. problems prikl. mechanics. Sat. articles for the sixtieth birthday of Acad. N. Chelomey. M.* (in Russian).
2. Ilgamov, M.A. (1991). *Introduction to nonlinear hydroelasticity.* M.: Nauka (in Russian).
3. Kononov, Yu.N., Tatarenko, E.A. (2002). Free vibrations of a two-layer liquid separated by an elastic plate in a rectangular channel. *Theory. and prikl. Mechanics*, 36, pp. 170–176 (in Russian).
4. Trotsenko, V.A. (1995). Free oscillations of a liquid in a rectangular channel with an elastic membrane on a free surface. *Prikl. Mechanics*, 31, No. 8, pp. 74–80 (in Russian).
5. Kononov, Yu.N., Tatarenko, E.A. (2003). Free oscillations of a liquid in a rectangular channel with an elastic membrane on a free surface. Free vibrations of a two-layer liquid with elastic membranes on “free” and inner surfaces. *Acoustical Visnik*, 6, No. 4, pp. 44–52 (in Russian).
6. Kononov, Yu.N., Tatarenko, E.A. (2008). Free vibrations of elastic membranes and a two-layer liquid in a rectangular channel with an elastic bottom. *Applied hydromechanics*, No. 1, pp. 23–32 (in Russian).
7. Dokuchaev, L.V. (1987). *Nonlinear dynamics of aircraft with deformable elements.* M.: Mechanical Engineering (in Russian).
8. Trotsenko, V.A. (2007). Free Vibrations of a Liquid in a Channel with an Elastic Membrane on a Free Surface. *Problems of the Dynamics of the System of Bagatom Systems: Zb. prats Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 4, No. 2, pp. 215–228 (in Russian).
9. Bohun, R. I., Trotsenko, V. A. (2009). Free fluid fluctuations in a rectangular channel with arbitrary symmetric bottom and an elastic membrane on a free surface. *Problems of Dynamics and Static Systems of Multidimensional Systems: Zb. prats Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 6, No. 3, pp. 53–76 (in Russian).
10. Kononov, Yu.N., Limar, A.A. (2015). Oscillations of a rectangular membrane separating ideal fluids of different density in a rectangular channel with rigid bases. *Bulletin of the Donetsk University. Ser A. Natural sciences*, No. 1–2, pp. 97–108 (in Russian).
11. Kononov, Yu.N., Limar, A.A. (2016). On the stability of the oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different density in a rectangular channel with rigid bases. *Problems of the computational mechanics and design*, 25, pp. 69–84 (in Russian).
12. Kononov, Yu.N., Lymar, A.A. (2017). Oscillations of a rectangular plate separating the ideal liquids of different density in a rectangular channel. *International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, October 17-19, 2017, Cherkasy, Ukraine. Book of Abstracts.* Vinnytsia: Vasyl’ Stus Donetsk National University, pp. 31–33.
13. Goncharov, D.A. (2013). Dynamics of a two-layer fluid separated by an elastic partition taking into account the surface tension forces. *Electronic scientific and technical publication: Science and Education.* No. 11. DOI: 10.7463 / 1113.0619258 [Electronic resource] URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (date of circulation: February 19, 2014) (in Russian).
14. Pozhalostin, A.A., Goncharov, D.A. (2013). Free axisymmetric oscillations of a two-layer liquid with an elastic separator between layers in the presence of surface tension forces. *Engineering Journal: Science and Innovation.* Vol. 12. [Electronic resource] URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html> (reference date: February 19, 2014) (in Russian).

A. A. Lymar, Yu. N. Kononov

On the update of the conditions of the stability of vibrations of the membrane separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations.

In the linear formulation, the frequency equation of the proper joint oscillations of a rectangular membrane and a liquid, corrected for the case of axisymmetric oscillations, is derived. The membrane horizontally separates ideal incompressible fluids of different densities in a rectangular channel with rigid bases. The frequency equation for symmetric and asymmetrical joint vibrations of a membrane and a liquid is presented in a uniform form. The previously obtained approximate conditions for the stability of the vibrations of a membrane and a fluid are refined. It is shown that for asymmetric frequencies the approximate value of the critical tension is $4/5$ times lower, and for symmetric frequencies it is 0.818 times.

Keywords: *hydroelasticity, rectangular membrane, ideal incompressible fluid, flat oscillations, stability.*

О. О. Лимар, Ю. М. Кононов

Про уточнення умов стійкості коливань мембрани, яка поділяє ідеальні рідини в прямокутному каналі з жорсткими основами.

У лінійній постановці виведено уточнене, на випадок осесиметричних коливань, частотне рівняння власних спільних коливань прямокутної мембрани і рідини. Мембрана горизонтально розділяє ідеальні нестисливі рідини різної щільності в прямокутному каналі з жорсткими основами. Частотне рівняння для симетричних і несиметричних спільних коливань мембрани і рідини представлено в єдиній формі. Уточнено раніше отримані наближені умови стійкості коливань мембрани і рідини. Показано, що для несиметричних частот наближене значення критичного натягу є заниженими в $4/5$ рази, а для симетричних – в 0.818 раз.

Ключові слова: *гідропружність, прямокутна мембрана, ідеальна нестислива рідина, плоскі коливання, стійкість.*

Николаевский нац. аграрный ун-т, Николаев
Донецкий нац. ун-т им. Василя Стуса, Винница
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Получено 25.12.17

УДК 517.5

©2017. О. А. Новиков, О. Г. Ровенская, Ю. В. Козаченко

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ

Работа касается вопросов приближения периодических дифференцируемых функций высокой гладкости повторными средними арифметическими сумм Фурье. Одна из наиболее общих классификаций периодических функций в настоящее время — классификация, предложенная А. И. Степанцом. Она позволяет единым образом классифицировать суммируемые периодические функции, начиная от функций, ряд Фурье которых может расходиться, и заканчивая бесконечно дифференцируемыми функциями, включая аналитические и целые. При соответствующем выборе параметров, классы Степанца совпадают с известными классами Вейля, классами Соболева и классами сверток с фиксированными ядрами. Установлены асимптотические формулы для точных верхних граней отклонений в равномерной метрике тригонометрических полиномов, порождаемых повторным применением метода суммирования Валле Пуссена, на классах периодических функций, которые задаются мультипликаторами и сдвигами по аргументу при условии, что последовательности, определяющие указанные классы, убывают к нулю со скоростью геометрической прогрессии (в этом случае функции из таких классов допускают регулярное продолжение в соответствующую полосу комплексной плоскости). В соответствующих случаях эти равенства гарантируют решение задачи Колмогорова–Никольского для повторных сумм Валле Пуссена и классов интегралов Пуассона. Указаны условия, при которых повторные суммы предоставляют лучший порядок приближения, чем обычные суммы Валле Пуссена.

MSC: 42A10.

Ключевые слова: интегралы Пуассона, суммы Валле Пуссена, асимптотическое равенство.

1. Введение.

Обозначим $C_{\beta, \infty}^q$ и $C_{\beta}^q H_{\omega}$ — классы непрерывных 2π -периодических функций $f(x)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_{\beta}^q(t) dt,$$

в которой

$$P_{\beta}^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0; 1), \quad \beta \in \mathbb{R}$$

— ядро Пуассона, а функция $\varphi(\cdot)$, соответственно, такая что $\text{esssup}|\varphi(\cdot)| \leq 1$ или

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|), \quad \forall t', t'' \in \mathbb{R},$$

где $\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности [1].

Известно (см., напр., [1]), что классы $C_{\beta, \infty}^q$ и $C_{\beta}^q H_{\omega}$, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций $f(x)$, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\text{Im}z| \leq \ln \frac{1}{q}$.

Пусть L пространство 2π -периодических суммируемых на периоде функций. Обозначим через $S_n(f; x)$ частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L$. Суммы Валле Пуссена функции $f \in L$ определяются соотношением

$$V_{n,p}(f; x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f; x).$$

Пусть $\bar{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ – набор произвольных натуральных чисел таких, что $\sum_{k=1}^r p_k < n$. Функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических многочленов

$$V_{n,\bar{p}}^{(r)}(f; x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} \dots \frac{1}{p_r} \sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f; x), \quad (1)$$

которые будем называть r -повторными суммами Валле Пуссена.

Задача приближения классов интегралов Пуассона имеет свою историю. В 1946 году С. М. Никольский [2] показал, что для верхних граней уклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C_{\beta,\infty}^q$, имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; S_n\right) := \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^q} \|f(x) - S_n(f; x)\|_C = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q) + O(1) \frac{q^n}{n},$$

где

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

– полный эллиптический интеграл первого рода, величина $O(1)$ не зависит от n . В 1980 году С. Б. Стечкин [3] показал, что остаточный член в этой формуле можно записать в виде $O(1) \frac{q^{n+1}}{(1-q)^n}$, где величина $O(1)$ равномерно ограничена по n и q .

Аналогичная задача для классов $C_{\beta}^q H_{\omega}$ была решена в 2001 году А. И. Степанцом. В работе [1] было показано, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left(C_{\beta}^q H_{\omega}; S_n\right) &:= \sup_{f \in C_{\beta}^q H_{\omega}} \|f(x) - S_n(f; x)\|_C = \\ &= \frac{4q^n}{\pi^2} K(q) \theta_n(\omega) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \omega(1/n), \end{aligned}$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности.

В работах [4, 5] для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах интегралов Пуассона получены формулы

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta}^q H_{\omega}; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_n(\omega)q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n-p}\right) \sin t dt + \\ + \frac{O(1)}{p} \omega\left(\frac{1}{n-p}\right) \left(\frac{q^{n-p+1}}{(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{(1-q)}\right), \quad (2)$$

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + \frac{O(1)}{p} \left(\frac{q^{n-p+1}}{(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{(1-q)}\right).$$

А. С. Сердюком [6] также было показано, что имеет место более общий результат, чем формула (2):

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{4}{\pi^2} K_{q,p} + O(1) \left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

где в случае произвольного $p = 1, 2, \dots, n$ поведение константы $K_{q,p}$ определяется следующим соотношением, доказанным в [7]:

$$K_{q,p} = 2 \frac{1-q^{2p}}{1-q^2} K(q^p), \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 3, & p = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Исследование вопросов приближения классов функций $C_{\beta,\infty}^q$ и $C_{\beta}^q H_{\omega}$ повторными суммами Валле Пуссена является естественным продолжением изучения аппроксимативных свойств метода суммирования Валле Пуссена. Асимптотические формулы для верхних граней уклонений r -повторных сумм Валле Пуссена при $r = 2$ на классах интегралов Пуассона получены в работах [8, 9]. Для классов $C_{\beta}^q H_{\omega}$ в случае произвольного $r \in \mathbb{N}$ подобная экстремальная задача решена в работе [10].

В данной работе изучено асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ величины

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,\bar{p}}^{(r)}\right) := \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^q} \|f(x) - V_{n,\bar{p}}^{(r)}(f; x)\|_C.$$

2. Результаты.

Будем использовать схему исследования, предложенную в работе [1]. Сначала найдем удобные интегральные представления величин

$$\delta_{n,\bar{p}}^{(r)}(f; x) := f(x) - V_{n,\bar{p}}^{(r)}(f; x).$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $q \in (0; 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\bar{r} = \{1; 2; \dots; r\}$, $\bar{p} = \bar{p}(\bar{r}) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ — множество натуральных чисел таких, что $\sum_{k=1}^r p_k < n$. Тогда для всякой функции $f \in C_{\beta, \infty}^q$ в каждой точке $x \in [-\pi; \pi]$ справедливо равенство

$$\delta_{n, \bar{p}}^{(r)}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^q(x+t) \left(\sigma_1^{(r)} \cos \frac{\beta\pi}{2} - \sigma_2^{(r)} \sin \frac{\beta\pi}{2} \right) dt, \quad (3)$$

где величины $\sigma_1^{(r)} = \sigma_1^{(r)}(t, q, n)$, $\sigma_2^{(r)} = \sigma_2^{(r)}(t, q, n)$ заданы соотношениями

$$\sigma_1^{(r)} = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^r p_i} \sum_{\alpha \subset \bar{r}} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{r-|\alpha|+\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{n-\Sigma_{\bar{p}}^{\alpha}+r+\nu} \cos(n - \Sigma_{\bar{p}}^{\alpha} + r - \nu)t, \quad (4)$$

$$\sigma_2^{(r)} = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^r p_i} \sum_{\alpha \subset \bar{r}} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{r-|\alpha|+\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{n-\Sigma_{\bar{p}}^{\alpha}+r+\nu} \sin(n - \Sigma_{\bar{p}}^{\alpha} + r - \nu)t, \quad (5)$$

$\Sigma_{\bar{p}}^{\alpha} = \sum_{j \in \alpha} p_j$, $|\alpha|$ — количество элементов множества $\alpha \subset \bar{r}$,

$$Z_q(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2q \cos x + q^2}}, \quad (6)$$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — коэффициенты биномиального разложения.

Доказательство. Применим метод математической индукции. В работе [4] показано, что при $r = 1$ формула (3) справедлива. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что для $\bar{r}' = \{2, 3, \dots, r+1\}$ и произвольного набора натуральных чисел $\bar{p}(\bar{r}') = \{p_2, p_3, \dots, p_{r+1}\}$ таких, что $\sum_{i=2}^{r+1} p_i < k_1$, справедлива формула (3), в которой величины

$$\sigma_1^{(\bar{r}')} (t, q, k_1+1) = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=2}^{r+1} p_i} \sum_{\alpha \subset \bar{r}'} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{r-|\alpha|+\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{k_1 - \Sigma_{\bar{p}(\bar{r}')}^{\alpha} + r + \nu} \cos(k_1 - \Sigma_{\bar{p}(\bar{r}')}^{\alpha} + r - \nu)t,$$

заданы формулой (4). Найдем выражение для $\delta_{k_0, \bar{p}(r+1)}^{(r+1)}(f; x)$ с набором чисел $\bar{p}(r+1) = \{p_1\} \cup \bar{p}(\bar{r}')$, для которого выполнены условия $p_1 \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{r+1} p_i < k_0$. В силу

соотношения (1) имеем

$$\begin{aligned} \delta_{k_0+1, \bar{p}(r+1)}^{(r+1)}(f; x) &= \delta_{k_0+1, p_1, p_2, \dots, p_{r+1}}^{(r+1)}(f; x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0} \frac{1}{p_2} \times \\ &\times \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} \frac{1}{p_3} \sum_{k_3=k_2-p_3+1}^{k_2} \dots \frac{1}{p_{r+1}} \sum_{k_{r+1}=k_r-p_{r+1}+1}^{k_r} (f(x) - S_{k_{r+1}}(f, x)) = \\ &= \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0} (\sigma_1^{(\bar{r}')} (t, q, k_1 + 1) \cos \frac{\beta\pi}{2} - \sigma_2^{(\bar{r}')} (t, q, k_1 + 1) \sin \frac{\beta\pi}{2}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(r+1)}(t, q, k_0 + 1) &= \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0} \sigma_1^{(\bar{r}')} (t, q, k_1 + 1) = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{p_1 \prod_{i=2}^{r+1} p_i} \times \\ &\times \sum_{k_1=k_0-p_1+1}^{k_0} \sum_{\alpha \subset \bar{r}'}^{r+1} (-1)^{r-|\alpha|+\nu} C_{r+1}^\nu q^{k_1 - \sum_{\bar{p}(\bar{r}')} + r + \nu} \cos(k_1 - \sum_{\bar{p}(\bar{r}')} + r - \nu)t = \\ &= \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{2 \prod_{i=1}^{r+1} p_i} \sum_{\alpha \subset \bar{r}'}^{r+1} \sum_{\nu=0}^{r+1} ((-1)^{r-|\alpha|+\nu} C_{r+1}^\nu q^{2\nu} \sum_{k=k_0-p_1+1}^{k_0} ((qe^{it})^{k - \sum_{\bar{p}(\bar{r}')} + r - \nu} + (qe^{-it})^{k - \sum_{\bar{p}(\bar{r}')} + r - \nu})). \end{aligned}$$

Применяя формулу суммы элементов бесконечной убывающей геометрической прогрессии и полагая $\tilde{k} = k_0 - \sum_{\bar{p}(\bar{r}')} + r$, получаем

$$\sum_{k=k_0-p_1+1}^{k_0} (qe^{it})^{k - \sum_{j \in \alpha} p_j + r - \nu} = (qe^{it})^{\tilde{k}+1-\nu} \frac{(qe^{-it})^{p_1} - 1}{1 - qe^{it}}.$$

Поэтому, выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} q^{2\nu} \sum_{k=k_0-p_1+1}^{k_0} \left((qe^{it})^{k - \sum_{\bar{p}(\bar{r}')} + r - \nu} + (qe^{-it})^{k - \sum_{\bar{p}(\bar{r}')} + r - \nu} \right) &= \frac{q^{\tilde{k}+1+\nu}}{1 - 2q \cos t + q^2} q^{\tilde{k}+1-\nu} \times \\ &\times \left\{ q^{-p_1} \cos(\tilde{k} + 1 - p_1 - \nu)t - q^{1-p_1} \cos(\tilde{k} - p_1 - \nu)t - \cos(\tilde{k} + 1 - \nu)t + q \cos(\tilde{k} - \nu) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(r+1)}(t, q, k_0 + 1) = & \frac{Z_q^{2(r+2)}(t)}{\prod_{i=1}^{r+1} p_i} \sum_{\alpha \in \bar{r}} (-1)^{r-|\alpha|} q^{\tilde{k}+1} \left[\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu \times \right. \\ & \times q^{\nu-p_1} \cos(\tilde{k} + 1 - p_1 - \nu)t - \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{\nu+1-p_1} \cos(\tilde{k} - p_1 - \nu)t - \\ & \left. - \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos(\tilde{k} + 1 - \nu)t + \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{\nu+1} \cos(\tilde{k} - \nu) \right]. \end{aligned}$$

Выполняя преобразования, с учетом легко проверяемого равенства

$$C_{r+1}^\nu + C_{r+1}^{\nu-1} = C_{r+2}^\nu, \quad (7)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos(\tilde{k} + 1 - p_1 - \nu)t - \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{\nu+1} \times \\ & \times \cos(\tilde{k} - p_1 - \nu)t = C_{r+1}^0 \cos(\tilde{k} + 1 - p_1)t + \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \times \\ & \times \cos(\tilde{k} + 1 - p_1 - \nu)t + \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^{\nu-1} q^\nu \cos(\tilde{k} - p_1 - \nu + 1)t + \\ & + (-1)^{r+2} C_{r+1}^{r+1} q^{r+2} \cos(\tilde{k} - p_1 - r - 1)t = C_{r+1}^0 \cos(\tilde{k} + 1 - p_1)t + \\ & + \sum_{\nu=1}^{r+1} [C_{r+1}^\nu + C_{r+1}^{\nu-1}] (-1)^\nu q^\nu \cos(\tilde{k} + 1 - p_1 - \nu)t + \\ & + (-1)^{r+2} C_{r+1}^{r+1} q^{r+2} \cos(\tilde{k} - p_1 - r - 1)t = \\ & = C_{r+2}^0 \cos(\tilde{k} + 1 - p_1)t + \sum_{\nu=1}^{r+1} C_{r+2}^\nu (-1)^\nu q^\nu \cos(\tilde{k} + 1 - p_1 - \nu)t + \\ & + (-1)^{r+2} C_{r+2}^{r+2} q^{r+2} \cos(\tilde{k} + 1 - p_1 - (r+2))t = \\ & = \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^\nu (-1)^\nu q^\nu \cos(\tilde{k} + 1 - p_1 - \nu)t. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos(\tilde{k} + 1 - \nu)t - \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^{\nu+1} \cos(\tilde{k} - \nu)t = \\ & = \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^\nu (-1)^\nu q^\nu \cos(\tilde{k} + 1 - \nu)t. \end{aligned}$$

Таким образом, полагая $\alpha' = \alpha \cup \{1\}$ и имея в виду, что $\overline{r+1} = \overline{r'} \cup \{1\}$, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \subset \overline{r'}} (-1)^{r-|\alpha|} q^{\tilde{k}+1} \left[\sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^\nu (-1)^\nu q^{\nu-p_1} \cos(\tilde{k}+1-p_1-\nu)t - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^\nu (-1)^\nu q^\nu \cos(\tilde{k}+1-\nu)t \right] = \sum_{\alpha \subset \overline{r'}} (-1)^{r-|\alpha|} \times \\ & \quad \times \left[\sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^\nu (-1)^\nu q^{k_0 - \Sigma_{\overline{p}(r')}^\alpha + r+1-p_1+\nu} \cos(k_0 - \Sigma_{\overline{p}(r')}^\alpha + r+2-p_1-\nu)t - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^\nu (-1)^\nu q^{k_0 - \Sigma_{\overline{p}(r')}^\alpha + r+1+\nu} \cos(k_0 - \Sigma_{\overline{p}(r')}^\alpha + r+2-\nu)t \right] = \\ & \quad = \sum_{\alpha' \subset \overline{r+1}} (-1)^{r+1-|\alpha'|} \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^\nu (-1)^\nu q^{k_0 - \Sigma_{\overline{p}(r+1)}^{\alpha'} + (r+1)+\nu} \times \\ & \quad \times \cos(k_0 - \Sigma_{\overline{p}(r+1)}^{\alpha \cup \{1\}} + (r+1)+1-\nu)t + \sum_{\alpha \subset \overline{r+1}, 1 \notin \alpha} (-1)^{r+1-|\alpha|} \times \\ & \quad \times \sum_{\nu=0}^{r+2} C_{r+2}^\nu (-1)^\nu q^{k_0 - \Sigma_{\overline{p}(r')}^\alpha + r+1+\nu} \cos(k_0 - \Sigma_{\overline{p}(r')}^\alpha + 1 + (r+1) - \nu)t \Big]. \end{aligned}$$

Так как для множеств $A = \{p_i, i \in \alpha \subset \overline{r+1}, 1 \in \alpha\}$, $B = \{p_i, i \in \alpha \subset \overline{r+1}, 1 \notin \alpha\}$, $C = \{p_i, i \in \alpha \subset \overline{r+1}\}$ выполняется $A \cup B = C$, то окончательно получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(r+1)}(t, q, k_0 + 1) &= \frac{Z_q^{2((r+1)+1)}(t)}{\prod_{i=1}^{r+1} p_i} \sum_{\alpha \subset \overline{r+1}} \sum_{\nu=0}^{(r+1)+1} (-1)^{(r+1)-|\alpha|+\nu} \times \\ & \quad \times C_{(r+1)+1}^\nu q^{n - \Sigma_{\overline{p}(r+1)}^\alpha + (r+1)+\nu} \cos(n - \Sigma_{\overline{p}(r+1)}^\alpha + (r+1) - \nu)t. \end{aligned}$$

Это значит, что из справедливости выражения (5) для величины $\sigma_1^{(m)}$ для $m = r$ вытекает его справедливость для $m = r+1$. Поэтому по индукции для всякого $r \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение (5) для величины $\sigma_1^{(r)}(t; q; n)$. Аналогично проверяется справедливость соотношения (5) для величины $\sigma_2^{(r)}(t; q; n)$. Таким образом, имеет место формула (3). Теорема доказана. \square

Теорема 2. Пусть $q \in (0; 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^r p_k := \Sigma_{\overline{p}} < n$. Тогда при $n - \Sigma_{\overline{p}} \rightarrow \infty$

справедлива асимптотическая формула

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,\bar{p}}^{(r)}\right) = \frac{4q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+r}}{\pi^2 \prod_{i=1}^r p_i} \int_0^\pi Z_q^{r+1}(x) dx + \frac{O(1)q^{n-\Sigma_{\bar{p}}}}{\prod_{i=1}^r p_i} \left(\frac{(n-\Sigma_{\bar{p}})^{-1}}{(1-q)^{r+2}} + \frac{\sum_{j=1}^r q^{p_j}}{(1-q)^{r+1}} \right), \quad (8)$$

где величина $Z_q(x)$ задана соотношением (6).

Доказательство. На основании теоремы 1, имеем

$$\begin{aligned} \delta_{n,\bar{p}}^{(r)}(f; x) &= \frac{1}{\pi \prod_{i=1}^r p_i} \int_{-\pi}^\pi \frac{f_\beta^q(x+t)}{(1-2q \cos t + q^2)^{r+1}} \sum_{\alpha \in \bar{r}} (-1)^{(r-|\alpha|)} q^{n-\Sigma_{\bar{p}}^\alpha+r} \times \\ &\times \left[\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos \nu t \cos \left((n-\Sigma_{\bar{p}}^\alpha+r)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \sin \nu t \sin \left((n-\Sigma_{\bar{p}}^\alpha+r)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$b_m^{q,\beta}(t) = \frac{\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos \nu t}{(1-2q \cos t + q^2)^{r+1}} \cos(mt + \frac{\beta\pi}{2}) + \frac{\sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \sin \nu t}{(1-2q \cos t + q^2)^{r+1}} \sin(mt + \frac{\beta\pi}{2}). \quad (10)$$

Тогда на основании (9) получаем

$$\begin{aligned} \delta_{n,\bar{p}}^{(r)}(f, x) &= \frac{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+r}}{\pi \prod_{i=1}^r p_i} \int_{-\pi}^\pi f_\beta^q(x+t) b_{n-\Sigma_{\bar{p}}+r}^{q,\beta}(t) dt + \\ &+ O(1) \frac{1}{\pi \prod_{i=1}^r p_i} \left(\sum_{\alpha \in \bar{r}, \alpha \neq \bar{r}} q^{n-\Sigma_{\bar{p}}^\alpha+r} \int_{-\pi}^\pi |f_\beta^q(x+t) b_{n-\Sigma_{\bar{p}}^\alpha+r}^{q,\beta}(t)| dt \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Изучим функцию $b_m^{q,\beta}(t)$. Применяя формулы Эйлера, получаем

$$\left(\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos \nu t \right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \sin \nu t \right)^2 = (1-2q \cos t + q^2)^{r+1}. \quad (12)$$

Обозначим $\xi(t) = \arctg \frac{q \sin t}{1-q \cos t}$. Применяя метод математической индукции несложно показать, что для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$\arctg \left(\frac{-\sum_{\nu=1}^n (-1)^\nu C_n^\nu q^\nu \sin \nu t}{\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu C_n^\nu q^\nu \cos \nu t} \right) = n\xi(t). \quad (13)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} b_m^{q,\beta}(t) &= \frac{\sqrt{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}}}{(1-2q\cos t+q^2)^{r+1}} \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2} + (r+1)\xi(t)\right) = \\ &= Z_q^{r+1}(t) \sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2} + (r+1)\xi(t)\right). \end{aligned}$$

Найдем нули функции $\sin\left(mt + \frac{\beta\pi}{2} + (r+1)\xi(t)\right)$. Для этого изучим свойства функции $\xi(t)$. Поскольку $1-2q\cos t+q^2 > 0$, то функция $b_m^{q,\beta}(t)$ обращается в нуль на промежутке $(0; \pi)$ с изменением знака в точках t_k , удовлетворяющих условию

$$mt_k + \frac{\beta\pi}{2} + (r+1)\xi(t_k) = k\pi, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (14)$$

Так как $\xi'(t) = (-q^2 + q\cos t)Z_q^2(t)$, то на промежутке $(0; \pi)$ функция $\xi(t)$ имеет максимум в точке $t = \arccos q$. Поэтому для всякого $t \in (0; \pi)$ выполняется

$$0 \leq \xi(t) \leq \operatorname{arctg} \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}$$

и для всякого $k = 1, 2, \dots, m-1$ выполняется

$$|\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)| \leq 2\operatorname{arctg} \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} < \pi.$$

Следовательно,

$$|t_{k+1} - t_k| = \left| \frac{\pi}{m} - (r+1) \frac{\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)}{m} \right| \leq \frac{(r+2)\pi}{m}. \quad (15)$$

С другой стороны, для всякого $k = 1, 2, \dots, m-1$ существует $c_k \in (t_k; t_{k+1})$ такая, что $\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k) = \xi'(c_k)(t_{k+1} - t_k)$. Так как $\xi''(t) = (q^3 - q)Z_q^4(t) \sin t$, то для всякого $t \in (0; \pi)$ выполняется

$$\frac{-q}{1+q} = \xi(\pi) \leq \xi'(t) \leq \xi'(0) = \frac{q}{1-q}$$

и для всякого $k = 1, 2, \dots, m-1$

$$|\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)| \leq \frac{q}{1-q} |t_{k+1} - t_k|. \quad (16)$$

В силу соотношений (14) и (16), для достаточно больших m имеет место неравенство

$$t_{k+1} - t_k \geq \frac{\pi}{m} - \frac{r+1}{m} |\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)| \geq \frac{\pi}{m} - \frac{2(r+1)(r+2)\pi q}{m^2(1-q)} \geq \frac{\pi}{2m}.$$

Поэтому при достаточно больших m набор чисел t_k монотонно возрастает и количество промежутков, на которых функция $b_{m,1}^{q,\beta}(t)$, $t \in (0; \pi)$, изменяет знак $\leq 2m$.

Учитывая (16), получаем

$$\begin{aligned} |(t_{k+2} - t_{k+1}) - (t_{k+1} - t_k)| &\leq (r+1) \frac{|\xi(t_{k+2}) - \xi(t_{k+1})| + |\xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)|}{m} \leq \\ &\leq \frac{2(r+1)(r+2)\pi q}{m^2(1-q)}. \end{aligned}$$

Функция $b_m^{q,\beta}(t)$ на промежутках $[t_k; t_{k+1}]$; $[t_{k+1}; t_{k+2}]$ сохраняет знаки, причем, справа и слева от t_{k+1} эти знаки различные.

Поэтому, функцию $\text{sign} b_m^{q,\beta}(t)$ на отрезке $[t_k; t_{k+2}]$ можно изменить на множестве, мера которого $\leq \frac{2(r+1)(r+2)\pi q}{(1-q)m^2}$, так, что полученная функция $b_{m,1}^{q,\beta}(t)$ будет обладать свойством:

$$\int_{t_k}^{t_{k+2}} b_{m,1}^{q,\beta}(t) dt = 0.$$

Выполнив аналогичные рассуждения для промежутка $(-\pi; 0)$, видим, что существует функция $b_{m,1}^{q,\beta}(t)$, построенная на $(-\pi; \pi)$, которая обладает свойством

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_{m,1}^{q,\beta}(t) dt = 0$$

и отличается от $\text{sign} b_m^{q,\beta}(t)$ на множестве, мера которого не превосходит величину $\frac{8(r+1)(r+2)\pi q}{m(1-q)}$.

Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |b_m^{q,\beta}(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} b_m^{q,\beta}(t) \text{sign} (b_m^{q,\beta}(t)) dt = \int_{-\pi}^{\pi} b_m^{q,\beta}(t) \left[b_{m,1}^{q,\beta}(t) + O(1) \frac{q}{m(1-q)} \right] dt$$

и, учитывая, что

$$|b_m^{q,\beta}(t)| = \frac{|\cos(mt + \frac{\beta\pi}{2} + (r+1)\xi(t))|}{(1 - 2q \cos t + q^2)^{\frac{r+1}{2}}} \leq \frac{1}{(1-q)^{r+1}},$$

находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |b_m^{q,\beta}(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} b_m^{q,\beta}(t) b_{m,1}^{q,\beta}(t) + O(1) \frac{q}{m(1-q)^{r+2}} dt.$$

Принимая во внимание, что $b_{m,1}^{q,\beta}(t) \in S_M^0$, заключаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |b_{n-\Sigma_p+r}^{q,\beta}(t)| dt &\geq \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^q} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_{\beta}^q(x+t) b_{n-\Sigma_p+r}^{q,\beta}(t)| dt \right) \geq \\ &\geq \int_{-\pi}^{\pi} b_{n-\Sigma_p+r}^{q,\beta}(t) b_{n-\Sigma_p+r,1}^{q,\beta}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} |b_{n-\Sigma_p+r}^{q,\beta}(t)| dt + \frac{O(1)(n-\Sigma_p)^{-1}}{(1-q)^{r+2}}. \end{aligned}$$

Поэтому получаем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^q} \left(\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi \prod_{i=1}^r p_i} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^q(x+t) b_{n-\Sigma_p+r}^{q,\beta}(t) dt \right) \\ = \frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi \prod_{i=1}^r p_i} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |b_{n-\Sigma_p+r}^{q,\beta}(t)| dt + O(1) \frac{(n-\Sigma_p)^{-1}}{(1-q)^{r+2}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, на основании соотношения (11) при $p_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r p_i < n$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left(C_{\beta,\infty}^q; V_{n,\bar{p}}^{(r)} \right) &= \frac{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+r}}{\pi \prod_{i=1}^r p_i} \int_{-\pi}^{\pi} |b_{n-\Sigma_{\bar{p}}+r}^{q,\beta}(t)| dt + \\ &+ \frac{O(1)}{\prod_{i=1}^r p_i} \left(\frac{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}}}{(n-\Sigma_{\bar{p}})(1-q)^{r+2}} + \sum_{\alpha \in \bar{r}, \alpha \neq \bar{r}} q^{n-\Sigma_{\bar{p}}^{\alpha}} \int_{-\pi}^{\pi} |b_{n-\Sigma_{\bar{p}}^{\alpha}+r}^{q,\beta}(t)| dt \right). \quad (17) \end{aligned}$$

Для $m = n - \Sigma_{\bar{p}}^{\alpha} + r$ вычислим интеграл $J_m = \int_{-\pi}^{\pi} |b_m^{q,\beta}(t)| dt$. В силу соотношения (10) имеем

$$b_m^{q,\beta}(t) = \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu} C_{r+1}^{\nu} q^{\nu} \cos \left((m-\nu)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) Z_q^{2(r+1)}(t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 J_m &= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos \left((m-\nu)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) Z_q^{2(r+1)}(t) \right| = \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos \left(\left(1 - \frac{\nu}{m}\right)t + \frac{\beta\pi}{2} \right) \times \right. \\
 &\quad \times Z_q^{2(r+1)} \left(\frac{t}{m} \right) \left. \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2\pi}{m} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \times \right. \\
 &\quad \times \cos \left(t - \frac{\nu(t+2k\pi)}{m} + \frac{\beta\pi}{2} \right) Z_q^{2(r+1)} \left(\frac{t+2k\pi}{m} \right) \left. \right| dt. \quad (18)
 \end{aligned}$$

При фиксированных t, β, q, m положим

$$F(x) = \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-q)^\nu C_{r+1}^\nu \cos \left(t - \nu \left(\frac{t}{m} + x \right) + \frac{\beta\pi}{2} \right) Z_q^{2r+2} \left(\frac{t}{m} + x \right) \right|.$$

Легко заметить, что под знаком интеграла в соотношении (18) стоит интегральная сумма, составленная для функции $F(x)$, которая соответствует разбиению $x_k = \frac{2k\pi}{m}$, $\Delta x_k = \frac{2\pi}{m}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, отрезка $[0; 2\pi]$.

Имеет место оценка

$$\left| \int_0^{2\pi} F(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} F(x_k) \frac{2\pi}{m} \right| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |F(x) - F(x_k)| dx \leq 2\pi\omega \left(F; \frac{2\pi}{m} \right),$$

где $\omega(F; t)$ — модуль непрерывности функции $F(x)$. Производная $F'(x)$ существует и ограничена всюду, за исключением точек, где $F(x) = 0$. Поэтому функция $F(x)$ принадлежит классу KH^1 , где K — постоянная, которую можно выбрать независимой ни от t , ни от β , ни от m . Поэтому

$$\left| \int_0^{2\pi} F(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} F(x_k) \frac{2\pi}{m} \right| < (2\pi)^2 \frac{K}{m}.$$

Таким образом,

$$J_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos \left((t - \nu \left(\frac{t}{m} + x \right)) + \frac{\beta\pi}{2} \right) Z_q^{2r+2} \left(\frac{t}{m} + x \right) \right| dx dt + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Переходя к новым переменным, и учитывая 2π -периодичность подинтегральной функции, имеем

$$J_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos(t - \nu x) Z_q^{2r+2}(x) \right| dt dx + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Применяя соотношения (12) и (13) получаем при каждом фиксированном $x \in (0; 2\pi)$

$$\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos(t - \nu x) = Z_q^{-(r+1)}(x) \sin(t + (r+1)\xi(x)).$$

Поэтому функция $\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^\nu C_{r+1}^\nu q^\nu \cos(t - \nu x)$, как функция переменной t , при фиксированном $x \in (0; 2\pi)$ обращается в нуль с переменной знака в точках вида $t_0 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $t_0 = (r+1)\xi(x)$. Поэтому, принимая во внимание, что

$$\cos t_0 = - \sum_{\nu=1}^{r+1} \frac{(-q)^\nu C_{r+1}^\nu \sin x}{Z_q^{r+1}(x)}, \quad \sin t_0 = \sum_{\nu=0}^{r+1} \frac{(-q)^\nu C_{r+1}^\nu \cos x}{Z_q^{r+1}(x)},$$

на основании (12) для всякого $x \in (0; 2\pi)$ находим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-q)^\nu C_{r+1}^\nu \cos(t - \nu x) \right| dt &= \left| \int_{t_0}^{t_0 + \pi} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-q)^\nu C_{r+1}^\nu \cos(t - \nu x) dt - \right. \\ &- \left. \int_{t_0 + \pi}^{t_0 + 2\pi} \sum_{\nu=0}^{r+1} (-q)^\nu C_{r+1}^\nu \cos(t - \nu x) dt \right| = 4 \left| \sum_{\nu=0}^{r+1} (-q)^\nu C_{r+1}^\nu \sin(t_0 - \nu x) \right| = \\ &= 4 \left[\left(\sum_{\nu=0}^{r+1} \frac{(-q)^\nu C_{r+1}^\nu}{Z_q^{r+1}(x)} \cos \nu x \right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{r+1} \frac{(-q)^\nu C_{r+1}^\nu}{Z_q^{r+1}(x)} \sin \nu x \right)^2 \right] = 4Z_q^{r+1}(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J_m = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi Z_q^{r+1}(x) dx + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Так как для $r \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\pi \frac{dt}{\left(\sqrt{1 - 2q \cos t + q^2}\right)^{r+1}} = \begin{cases} O(1) \frac{1}{(1-q)^{r+1}}, & r \geq 2; \\ O(1) \frac{1}{(1-q)}, & r = 1, \end{cases} \quad (19)$$

то для $m = n - \sum_{j \in \alpha} p_j + r$ и $\alpha \subset \bar{r}, \alpha \neq \bar{r}$ имеем

$$q^{n - \sum_{\bar{p}} \alpha} \int_{-\pi}^\pi |b_{n - \sum_{\bar{p}} \alpha + r}^{q, \beta}(t)| dt = O(1) \left(\frac{q^{n - \sum_{\bar{p}} \alpha}}{(1-q)^{r+1}} + \frac{q^{n - \sum_{\bar{p}} \alpha}}{n - \sum_{j \in \alpha} p_j} \right).$$

Имея в виду соотношение (17), получаем

$$\mathcal{E} \left(C_{\beta, \infty}^q; V_{n, p}^{(r)} \right) = \frac{4q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+r}}{\pi^2 \prod_{i=1}^r p_i} \int_0^\pi Z_q^{r+1}(x) dx + \frac{O(1)q^{n-\Sigma_{\bar{p}}}}{\prod_{i=1}^r p_i} \left(\frac{(n-\Sigma_{\bar{p}})^{-1}}{(1-q)^{r+2}} + \frac{\sum_{j=1}^r q^{p_j}}{(1-q)^{r+1}} \right).$$

Теорема доказана. \square

В случае нечетного r существует возможность вычислить интеграл в главном члене равенства (11) при помощи следующего утверждения.

Теорема 3. Для всякого $\nu \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(1+q^2-2q \cos x)^\nu} = \frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(C_{\nu-1}^k \right)^2 q^{2k},$$

где $C_k^p = \frac{p!}{(p-k)!k!}$ – биномиальные коэффициенты.

Доказательство. Используя универсальную тригонометрическую подстановку и методы интегрирования рациональных функций, получаем

$$J_\nu := \int_0^\pi \frac{dt}{(1+q^2-2q \cos t)^\nu} = \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)} \sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^k C_{2(\nu-k-1)}^{(\nu-k-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k}. \quad (20)$$

Далее применим соотношение (1.2.7.38) работы [11]

$$\sum_{k=0}^n C_{2k}^k C_{2(n-k)}^{(n-k)} x^{2k} = 2^{2n} x^n P_n \left(\frac{1}{2} (x + 1/x) \right),$$

где $P_n(z)$ – полином Лежандра. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^k C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} = 2^{2(\nu-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{\nu-1} P_{\nu-1} \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right). \quad (21)$$

На основании соотношения (1.2.7.6) работы [11]

$$(1-y)^n P_n \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 y^k.$$

Поэтому для $y = q^2$, $n = \nu - 1$ имеем

$$P_{\nu-1} \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right) = \frac{1}{(1-q^2)^{\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} (C_{\nu-1}^k)^2 q^{2k}.$$

Тогда, на основании соотношения (21)

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^k C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} = \frac{2^{2(\nu-1)}}{(1+q)^{2(\nu-1)}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(C_{\nu-1}^k \right)^2 q^{2k}.$$

Объединяя это соотношение с (20), получаем утверждение теоремы. \square

Выводы

Асимптотическая формула (11) обеспечивает решение известной задачи Колмогорова–Никольского, если кроме $n - \Sigma_p \rightarrow \infty$ выполняются условия $p_i \rightarrow \infty, \forall i \in \bar{r}$. При $r = 1$ в качестве следствия из теорем 2 и 3 с учетом (19) получаем соотношение (2) для верхних граней отклонений обычных сумм Валле Пуссена $V_{n,p}(f; x)$ на классе $C_{\beta, \infty}^q$.

Если сравнивать обычные суммы Валле Пуссена и повторные при выполнении естественного условия $p = \sum_{i=1}^r p_i$, то несложно заметить, что повторные суммы Валле Пуссена на классе $C_{\beta, \infty}^q$ обеспечивают более высокий (при $n \rightarrow \infty$) порядок приближения, чем обычные суммы Валле Пуссена. Имея в виду формулы (2) и (3) в случае $p_i = \frac{p}{r}$ видим, что порядок приближения повторными суммами $V_{n, \bar{p}}^{(r)}(f; x)$ составляет $\frac{q^{n-p+r}}{p^r}$, что в p^{r-1} раз лучше, чем порядок приближения соответствующими суммами Валле Пуссена $V_{n,p}(f; x)$.

Цитированная литература

1. Степанец А.И. Решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. – 2001. – **192**, № 1. – С. 113–138.
2. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
3. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.
4. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение аналитических функций суммами Валле–Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения : Праці Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **20**. – С. 228–241.
5. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1653–1668.
6. Сердюк А.С. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 1. – С. 97–107.
7. Савчук В.В., Савчук М.В., Чайченко С.О. Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена // Математичні студії. – 2010. – **34**, № 2. – С. 207–219.
8. Ровенская О.Г., Новиков О.А. Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 1. – С. 96–99.
9. Ровенская О.Г. Приближение периодических аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена // Динамические системы. – 2009. – **27**. – С. 81–92.
10. Новиков О.А., Ровенская О.Г. Приближение классов интегралов Пуассона r -повторными суммами Валле Пуссена // Вестник Од. нац. ун-ту. Матем. и мех. – 2014. – **19**, вып. 3(23). – С. 14–26.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В 3 т. – СПб. : ФИЗМАТЛИТ, 2003.

References

1. *Stepanec, A.I.* (2001). Solution of the Kolmogorov–Nicol’skij problem for the Poisson integrals of continuous functions. *Mat. Sb.*, 192, No. 1, pp. 113–138 (in Russian).
2. *Nikolskiy, S.M.* (1946). Approximation of the functions by trigonometric polynomials in the mean. *Izv. Acad. Nauk. SSSR, Ser. Mat.*, 10, No. 3, pp. 207–256 (in Russian).
3. *Stechkin, S.B.* (1980). Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions. *Tr. Mat. Inst. Acad. Nauk SSSR*, 145, pp. 126–151 (in Russian).
4. *Rukasov, V.I., Novikov, O.A.* (1998). Approximation of analytic functions of de la Valle Poussin sums. *Fourier series: theory and applications*, 20, pp. 228–241 (in Russian).
5. *Rukasov, V.I., Chaichenko, S.O.* (2002). Approximation of the classes of analytical functions by de la Vallee-Poussin sums. *Ukrainian Math. J.*, 54, No. 12, 1653–1668 (in Ukrainian).
6. *Serdyuk, A.S.* (2004). Approximation of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums. *Ukrainian Math. J.*, 56, No. 1, pp. 97–107 (in Ukrainian).
7. *Savchuk, V.V., Savchuk, M.V., Chaichenko, S.O.* (2010). Approximation of analytic functions by de la Vallee Poussin sums. *Mat. Stud.*, 34, No. 2, pp. 207–219 (in Ukrainian).
8. *Rovenska, O.O., Novikov, O.O.* (2010). Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums. *Nonlinear Oscillations*, **13** (1), pp. 96–99 (in Russian).
9. *Rovenska, O.O.* (2009). Approximation of periodic analytic functions by repeated de la Vallee Poussin sums. *Dynamic Systems*, 27, pp. 81–92 (in Russian).
10. *Novikov, O.O., Rovenska, O.G.* (2014). Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums. *Visnyk Odessk. Nat. Univ.: Mat. i Mech.*, 19, No. 23, pp. 14–26 (in Russian).
11. *Prudnikov, A.P., Bruchkov, Yu. A., Marichev, O.I.* (2003). *Integrals and series*. St P.: FIZMATLIT (in Russian).

O. O. Novikov, O. G. Rovenska, Yu. V. Kozachenko

Approximation of Poisson integrals by linear methods.

The work concerns the questions of approximation of periodic differentiable functions of high smoothness by repeated arithmetic means of Fourier sums. One of the classifications of periodic functions nowadays is the classification suggested by A. Stepanets. The given classification allows to distinguish all classes of summable periodic functions from the functions where the Fourier series can deviate to infinitely differentiable functions including analytical and entire ones. When choosing the parameters properly, Stepanets classes exactly coincide with the well-known classes of Vail differentiable functions, Sobolev classes and classes of convolutions with integral kernels. Asymptotic equalities are found for upper bounds of deviations in the uniform metric of the repeated de la Vallee Poussin sums on the classes of periodic functions which are generated by multipliers and shifts on argument provided that sequences which define the specified classes tend to zero with the rate of geometrical progression. In doing so these classes consist of analytic functions which can be regularly extended in the corresponding strip. Under certain conditions, these equalities guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nicol’skij problem for the repeated de la Vallee Poussin sums and classes of Poisson integrals. We indicate conditions under which the repeated sums guarantee a better order of approximation than ordinary de la Vallee Poussin sums.

Keywords: *Poisson integrals, de la Vallee Poussin sums, asymptotic equality.*

О. О. Новіков, О. Г. Ровенська, Ю. В. Козаченко

Наближення інтегралів Пуассона лінійними методами.

Робота стосується питань наближення періодичних диференційовних функцій високої гладко-

сті повторними середніми арифметичними сум Фур'є. Однією з найбільш загальних класифікацій періодичних функцій є класифікація, запропонована О. І. Степанцем. Ця класифікація дозволяє єдиним чином класифікувати сумовні періодичні функції, починаючи від функцій, ряд Фур'є яких може навіть розходитися, та до нескінченно диференційовних функцій, включаючи аналітичні та цілі. За належного вибору параметрів, класи Степанця збігаються з відомими класами Вейля, класами Соболева і класами згорток з фіксованими ядрами. Знайдено асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень у рівномірній метриці тригонометричних поліномів, що породжуються повторним застосуванням методу підсумування Валле Пуссена, на класах періодичних функцій, які задаються мультиплікаторами і зсувами за аргументом за умови, що послідовності, що визначають вказані класи, прямують до нуля зі швидкістю геометричної прогресії (в цьому випадку функції з цих класів дозволяють регулярне подовження у відповідну смугу комплексної площини). В деяких випадках ці рівності гарантують розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для повторних сум Валле Пуссена і класів інтегралів Пуассона. Вказано умови, за яких повторні суми Валле Пуссена забезпечують кращий порядок наближення, ніж звичайні суми Валле Пуссена.

Ключові слова: інтеграли Пуассона, суми Валле Пуссена, асимптотична формула.

Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск
Донбасская государственная машиностроительная академия,
Краматорск
sgpi.slav@dn.ua, rovenskaya.olga.math@gmail.com

Получено 19.05.17

UDK 513.83

©2017. Т. М. Осіпчук

**ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ПРО СИСТЕМИ КУЛЬ,
ЯКІ СТВОРЮЮТЬ ТІНЬ В ТОЧЦІ**

В даній роботі розглядаються задачі, пов'язані з відшукуванням мінімального числа системи куль, які створюють тінь у фіксованій точці багатовимірного евклідового простору \mathbb{R}^n . Тут вираз "набір куль створює тінь в точці" означає, що кожна пряма, яка проходить через задану точку, перетинає хоча б одну кулю з набору. В роботі встановлено нові властивості системи неперетинних куль з центрами на сфері, що створюють тінь в довільній фіксованій точці внутрішності сфери у просторі \mathbb{R}^3 . А також, побудовано систему з $n + 1$ неперетинних куль з рівними радіусами у просторі \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, які створюють тінь у фіксованій точці простору.

MSC: 32F17, 52A30.

Ключові слова: задача про тінь, система куль, сфера, еліпсоїд обертання, область, багатовимірний дійсний евклідовий простір.

1. Вступ.

У 1982 році Г. Худайбергановим [1] була поставлена задача про тінь.

Нехай x фіксована точка у багатовимірному дійсному евклідовому просторі \mathbb{R}^n . Скажемо, що кулі $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ в \mathbb{R}^n , які не містять x , створюють в цій точці тінь, якщо довільна пряма, що проходить через точку x , перетинає хоча б одну кулю з набору. Тоді задача про тінь може бути сформульована наступним чином: *знайти мінімальне число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль у просторі \mathbb{R}^n з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами меншими радіуса сфери, які не містять центр сфери та створюють в ньому тінь.*

Задачу про тінь в такому формулюванні будемо називати класичною. Тут і надалі, під сферою S^{n-1} будемо розуміти множину всіх точок простору \mathbb{R}^n , які знаходяться на однаковій відстані від деякої фіксованої точки простору [2].

Класична задача про тінь була розв'язана Г. Худайбергановим при $n = 2$: було показано, що для кола на площині достатньо двох кругів [1]. Там же було зроблено припущення про те, що і для випадку при $n > 2$ мінімальне число таких куль рівне n . Вона також цікава з точки зору опуклого аналізу тим, що є частковим випадком питання про належність точки узагальнено опуклій оболонці сім'ї компактних множин [3].

В [3] Ю. Зелінський довів, що для $n = 3$ трьох куль не достатньо, разом з тим, чотири кулі вже будуть створювати тінь в центрі сфери. Там же встановлено, що для загального випадку у просторі \mathbb{R}^n , для довільного $n \geq 3$, мінімальною кількістю є $n+1$ куля. Таким чином, класична задача про тінь повністю розв'язана.

Розглянемо наступні задачі, близькі до класичної задачі про тінь.

Задача 1. *Знайти мінімальне число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль у просторі \mathbb{R}^n з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами меншими*

радіуса сфери, які не містять фіксовану точку всередині сфери та створюють в цій точці тінь.

Задача 2. [4] Знайти мінімальне число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль з рівними радіусами у просторі \mathbb{R}^n , які не містять фіксовану точку простору та створюють в цій точці тінь.

В даній роботі доводяться дві теореми, які частково розв'язують поставлені задачі.

Теорема 1. Нехай $S^2(r)$ сфера з центром в нулі та радіусом r у просторі \mathbb{R}^3 . Позначимо через $n(x)$ найменше число відкритих куль, що не перетинаються, з центрами на сфері $S^2(r)$ і таких, що не містять фіксовану точку $x \in \mathbb{R}^3$ та створюють в цій точці тінь. Тоді $n(x) = 3$, для кожної точки $x \in \mathbb{R}^3$ такої, що $0 \leq |x| \leq \frac{7}{9}r$.

Теорема 2. Нехай $n(x)$ найменше число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль з однаковими радіусами і таких, що не містять фіксовану точку $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, та створюють в цій точці тінь. Тоді $n(x) \leq n + 1$.

В [5, 6, 8] зроблено огляд цілої низки результатів, аналогічних до класичної задачі про тінь, та їх узагальнень, отриманих Ю. Б. Зелінським та його учнями.

У наступному розділі зроблено огляд тих результатів, які також частково дають розв'язок задач 1, 2, та тих, які розв'язують деякі інші задачі про тінь. Ці результати будуть сформульовані як леми, оскільки в межах даної роботи вони є допоміжними та використовуються для доведення теорем 1, 2.

2. Допоміжні результати.

Наступний приклад дає один із способів побудови системи з $n + 1$ кулі із задачі 1, які створюють тінь в центрі сфери.

Приклад 1. [3] Якщо у сферу вписати правильний n -вимірний симплекс (див. [2]) та розмістити у його вершинах замкнені кулі з радіусами, величини яких дорівнюють половині довжини ребра симплекса, то ця система куль створить тінь в центрі сфери. Однак, кулі будуть попарно дотикатись одна одної, що протирічить умові задачі 1. Нехай a — половина довжини ребра симплекса. Для досить малого $\varepsilon > 0$ розглянемо систему куль, що складається з $n + 1$ кулі, величини радіусів яких, відповідно, дорівнюють $a + \varepsilon$, $a - \varepsilon/2$, $a - \varepsilon/2^2$, $a - \varepsilon/2^3$, \dots , $a - \varepsilon/2^n$. Розмістимо ці кулі так, щоб вони дотикались одна одної, а їх центри утворювали симплекс, який, очевидно, незначно відрізняється від правильного. Тоді через центри цих куль проходить єдина сфера, в центрі якої відкриті кулі з тими ж радіусами створюють тінь. Якщо вихідні замкнені кулі трішки зменшити, то, в силу неперервності, такі кулі також будуть створювати тінь в центрі сфери.

У [7, 8] розглядаються задачі про тінь для куль у просторах \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 з центрами, розташованими на інших поверхнях.

Лемма 1. [7] *Нехай задано видовжений еліпсоїд обертання з великою піввіссю b та малою a і нехай $n(x_0)$ найменше число попарно неперетинних відкритих куль, з центрами на заданому еліпсоїді, які не містять його центр x_0 та створюють в x_0 тінь. Тоді,*

- 1) $n(x_0) = 3$, якщо $b/a > 2\sqrt{2}$;
- 2) $n(x_0) > 3$, якщо $b/a \leq 2\sqrt{2}$.

Наступна лема дає розв'язок задачі про тінь для кругів з центрами, розміщеними на довільній замкненій кривій на площині, а також оцінку зверху мінімального числа куль, що створюють тінь в точці, з центрами на довільній замкненій поверхні у просторі \mathbb{R}^3 .

Лемма 2. [8] *Нехай задано деяку обмежену область $D \subset \mathbb{R}^3$ ($D \subset \mathbb{R}^2$) і нехай $n(x)$ найменше число попарно неперетинних відкритих чи замкнених куль, з центрами на ∂D , які не містять фіксовану точку $x \in D$ та створюють в точці x тінь. Тоді $n(x) \leq 4$ ($n(x) = 2$).*

Для її доведення застосовується наступна лема, яка в даній роботі буде використана також.

Лемма 3. [8] *Нехай задано дві відкриті (замкнені) кулі $\{B_i = B(r_i)\}$, $i = 1, 2$, у просторі \mathbb{R}^n , які не перетинаються, з центрами на сфері $S^{n-1}(r)$ та радіусами $r_2 \leq r_1 < r$. Тоді кожна куля, гомотетична кулі B_2 відносно центра сфери, з коефіцієнтом гомотетії k_2 , не перетинає кожну кулю, гомотетичну кулі B_1 відносно центра сфери, з коефіцієнтом гомотетії k_1 , якщо $k_2 \geq k_1$.*

В [9] розглядається задача про тінь для деякого набору куль з вільно розташованими центрами. Наступна лема дає оцінку знизу для числа неперетинних куль у просторі \mathbb{R}^n , які не містять фіксовану точку простору та створюють в ній тінь.

Лемма 4. [9] *Нехай $n(x)$ найменше число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль, які не містять фіксовану точку $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, та створюють в цій точці тінь. Тоді $n(x) = n$.*

В [4] ставиться задача про тінь для набору куль з вільно розташованими центрами, але з рівними радіусами і будується приклад з чотирьох відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль $\{B_i\}$, $i = \overline{1, 4}$, однакового радіуса у просторі \mathbb{R}^3 , які створюють тінь у фіксованій точці $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \cup_i B_i$. Таким чином встановлена наступна

Лемма 5. [4] *Нехай $n(x)$ найменше число відкритих (замкнених) та попарно неперетинних куль з однаковими радіусами і таких, що не містять фіксовану точку $x \in \mathbb{R}^3$ та створюють в цій точці тінь. Тоді $n(x) \leq 4$.*

Неважко показати (в тому числі способом, запропонованим у доведенні теореми 2, що для випадку простору \mathbb{R}^2 , мінімальною кількістю є дві кулі. В роботі [10] доведено, що ніякі три попарно неперетинні, замкнені (відкриті) кулі з рівними

радіусами у просторі \mathbb{R}^3 не створюють тінь у фіксованій точці простору поза кулями. Таким чином, встановлено, що чотири є мінімальною кількістю вказаних куль у просторі \mathbb{R}^3 .

3. Доведення теорем 1 та 2.

У наступному прикладі запропоновано один із способів побудови системи з трьох відкритих куль, центри яких розташовано на видовженому еліпсоїді обертання з відношенням великої півосі до малої $b/a > 2\sqrt{2}$, і таких, що створюють тінь в центрі еліпсоїда.

Приклад 2. Спочатку розглянемо еліпсоїд з відношенням $b/a = 2\sqrt{2}$ та набір відкритих куль $B_i, i = \overline{1,3}$, заданих наступним чином.

Якщо центр першої кулі B_1 з радіусом, рівним малій півосі a , розмістити в основі цієї півосі, тоді відкритою залишиться тільки площина Σ , дотична до кулі B_1 в центрі еліпсоїда. Розглянемо кулі, дотичні до першої та з центрами на лінії обертання малої півосі. Неважко показати, що, якщо центр такої кулі прямує до точки, діаметрально протилежної до центру кулі B_1 , тоді кут, який ця куля закриває для прямих, що проходять через центр еліпсоїда в площині Σ , прямує до свого максимального значення $\pi/2$. Третя куля B_3 , дотична до першої B_1 та з центром в основі великої півосі $b = 2\sqrt{2}a$, також закриває кут

$$\varphi = 2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 + (b)^2} - a}{b} \right) = \pi/2.$$

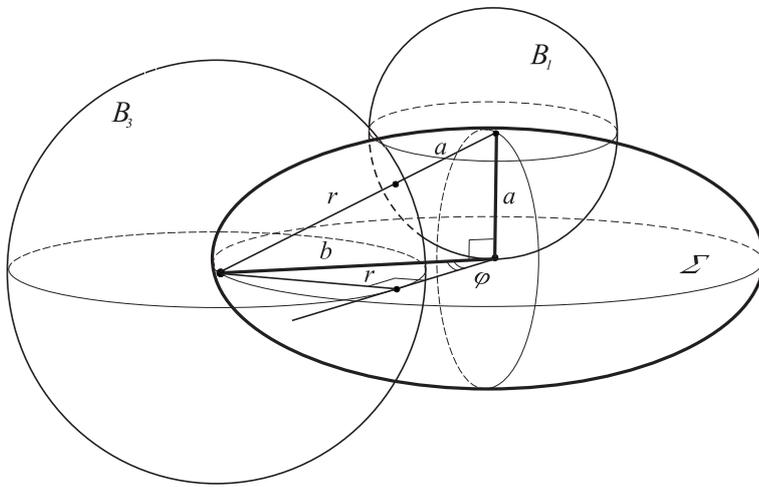


Рис. 1

Далі розглянемо еліпсоїд, центр та мала піввісь якого співпадають з центром та малою піввіссю попереднього еліпсоїда, а велика піввісь $b' > b$. Для таких еліпсоїдів побудуємо систему відкритих куль B'_i , $i = \overline{1, 3}$, наступним чином.

$$B'_1 \equiv B_1.$$

Куля B'_3 дотикається до кулі B'_1 , а її центр знаходиться в основі великої півосі b' . Тоді B'_3 закриває кут $\varphi(b')$ для прямих, що проходять через центр еліпсоїда в площині Σ , такий що

$$\sin \frac{\varphi(b')}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + (b')^2} - a}{b'}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin \varphi(b')/2)}{db'} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b')^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + (b')^2} - a}{(b')^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b')^2}} - \frac{(\sqrt{a^2 + (b')^2} - a)(\sqrt{a^2 + (b')^2} + a)}{(b')^2(\sqrt{a^2 + (b')^2} + a)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b')^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b')^2} + a} > 0 \end{aligned}$$

і $\varphi(b) = \pi/2$, тоді $\varphi(b') > \pi/2$ для $b' > b$.

Нарешті, центр кулі B'_2 , яка дотикається до B'_1 , розмістимо на лінії обертання малої півосі так, щоб кут, який вона закриває в площині Σ був більший $\pi - \varphi(b')$.

Доведення теореми 1. Зафіксуємо точку x внутрішності сфери $S^2(x_0, r)$ на відстані $h > (7/9)r$ від її центра x_0 , рис. 2. Побудуємо видовжений еліпсоїд обертання з центром в точці x , великою піввіссю $b = h + r$, розміщеною на прямій, що проходить через точку x і центр сфери x_0 , та малою піввіссю $a = \sqrt{r^2 - h^2}$. Тоді неважко переконатись в тому, що для такого еліпсоїда відношення $b/a > 2\sqrt{2}$. Система із трьох куль, розміщених в точках перетину сфери з еліпсоїдом так, як це зроблено в прикладі 2, є шуканою, оскільки, за лемою 4, не можливо побудувати систему куль, з кількістю менше трьох куль, які створюють тінь в довільній точці сфери. \square

Для центра сфери задача про тінь розв'язана в [3]. Для решти точок всередині сфери $n(x) \leq 4$ за лемою 2. Питання про те, чи для таких точок $n(x) = 4$, залишається відкритим.

Доведення теореми 2. Зафіксуємо деяку точку $x \in \mathbb{R}^n$, $2 < n < \infty$, та побудуємо систему з $n + 1$ кулі $\{B_i = B(r_i)\}$, $i = 1, \dots, n + 1$, з радіусами r_i , як у прикладі 1, розміщені на сфері з центром в точці x . Нехай, без обмеження загальності, $r_1 > \dots > r_i > r_{i+1} > \dots > r_{n+1}$.

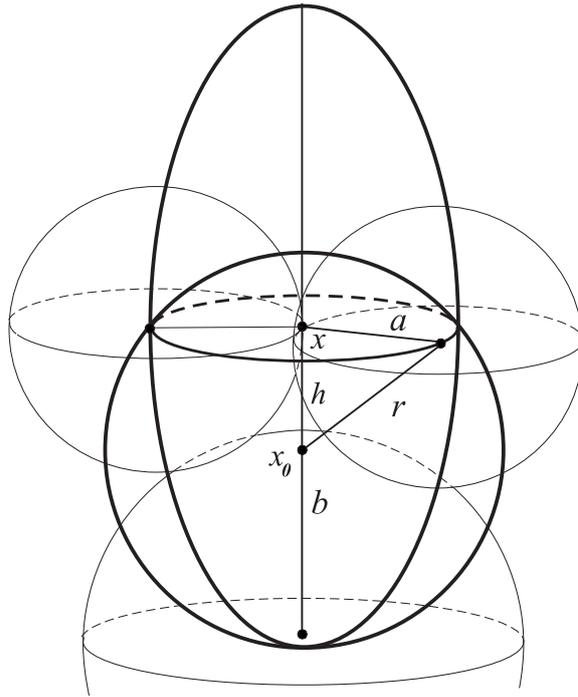


Рис. 2

До кожної кулі B_i застосуємо, відповідно, гомотетію з коефіцієнтом $k_i = r_1/r_i$. Тоді $k_{n+1} > \dots > k_{i+1} > k_i > \dots > k_1$ і отримана система складається з куль однакового радіуса, рівного r_1 . За лемою 3, отримані кулі попарно не перетинаються і, за побудовою, не містять точку x та створюють в ній тінь. \square

Таким чином, лему 5 узагальнено на простір \mathbb{R}^n довільної скінченної розмірності $n \geq 3$.

На даний момент залишається відкритим питання про те, чи справедливо, що в загальному випадку $n(x) = n + 1$. Очевидно лише те, що згідно з лемою 4, це число не може бути менше n .

Цитована література

1. Худайберганов Г. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНТИ 21.02.1982 г. № 1772 – 85 Деп.
2. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – Москва: Наука, 1966. – 668 с.
3. Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю., Стефанчук М.В. Обобщённо выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 12. – С. 1658–1666.
4. Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю., Дакхил Х.К. Задача о тени для шаров фиксированного радиуса // Укр. мат. вісник. – 2016. – Т. 13, № 4. – С. 599–603.

5. *Зелінський Ю.Б.* Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени // Укр. мат. вісник. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 278–289.
6. *Зелінський Ю.Б.* Варіації до задачі про “тінь” // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 163–170.
7. *Ткачук М.В., Осипчук Т.М.* Задача о тени для еллипсоида вращения // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 4. – С. 246–253.
8. *Осипчук Т.М., Ткачук М.В.* Задача о тени для областей в евклидовых пространствах // Укр. мат. вісник. – 2016. – Т. 13, № 4. – С. 278–289.
9. *Зелінський Ю.Б.* Задача о тени для семейства множеств // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 197–204.
10. *Дакхил Х.К.* Задачі про тінь та відображення постійної кратності // Рукопис дис. канд. фіз.-мат. наук / Інститут математики НАН України. – Київ, 2017.

References

1. *Khudaiberganov, G.* (1982). On the homogeneous polynomially convex hull of a union of balls. M.: VINITI, Manuscr.dep. 21.02.1982, No 1772–85 dep. (in Russian).
2. *Rozenfeld, B.A.* (1966). Multi-dimensional spaces. M.: Nauka (in Russian).
3. *Zelinskii, Y.B., Stefanчук, M.V., Vyhovskaya, I.Y.* (2015). Generalized convex sets and the problem of shadow. Ukr. Mat. J., 67, No. 12, pp. 1658–1666 (in Russian).
4. *Zelinskii, Y.B., Vyhovskaya, I.Y., Dakhil, H.K.* (2016). The problem of shadow for balls with fixed radius. Ukr. mat. vestnik, 13, No. 4, pp. 599–603 (in Russian).
5. *Zelinskii, Y.B.* (2015). Generally convex hulls of sets and problem of shadow. Ukr. mat. vestnik, 12, No. 2, pp. 278–289 (in Russian).
6. *Zelinskii, Y.B.* (2017). Variations to the problem of “shadow”. Zb. Prats Inst. Mat. NANU, 14, No. 1, pp. 163–170 (in Ukrainian).
7. *Tkachuk, M.V., Osipchuk, T.M.* (2015). The problem of shadow for ellipsoid of revolution. Zb. Prats Inst. Mat. NANU, 12, No. 4, pp. 246–253 (in Russian).
8. *Osipchuk, T.M., Tkachuk, M.V.* (2016). The problem of shadow for domains in Euclidean spaces. Ukr. mat. vestnik, 13, No. 4, pp. 278–289 (in Russian).
9. *Dakhil, H.K.* (2017). The shadow problems and mappings of fixed multiplicity. Manuscr. thesis / Inst. of Math. of NASU. Kyiv (in Ukrainian).
10. *Zelinskii, Y.B.* (2015). Problem of shadow for family of sets. Zb. Prats Inst. Mat. NANU, 12, No. 3, pp. 197–204 (in Russian).

T. M. Osipchuk

Some remarks about systems of balls generating shadow at a point.

Problems, related to the determination of the minimal number of balls that generate a shadow at a fixed point in the multi-dimensional Euclidean space \mathbb{R}^n , are considered in present work. Here, the statement “a system of balls generate shadow at a point” means that any line passing through the point intersects at least one ball of the system. New properties of pairwise-disjoint balls centered on the sphere in space \mathbb{R}^3 , not containing a fixed point inside of the sphere, and generating shadow at the point are established. And a system of $n + 1$ pairwise-disjoint balls with equal radii in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, that do not contain a fixed point of the space and generate shadow at the point is constructed in the work.

Keywords: *problem of shadow, system of balls, sphere, ellipsoid of revolution, domain, multi-dimensional real Euclidean space.*

Т. М. Осипчук

Некоторые замечания о системах шаров, создающих тень в точке.

В данной работе рассматриваются задачи, связанные с отысканием минимального количества шаров, которые создают тень в фиксированной точке многомерного евклидова пространства \mathbb{R}^n . Здесь выражение “набор шаров создает тень в точке” означает, что любая прямая, проходящая через заданную точку, пересекает хотя бы один шар из набора. В работе установлены новые свойства системы непересекающихся шаров с центрами на сфере, которые создают тень в произвольной фиксированной точке внутренней сферы в пространстве \mathbb{R}^3 . А также, построено систему из $n + 1$ непересекающегося шара с равными радиусами в пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, которые создают тень в фиксированной точке пространства.

Ключевые слова: задача о тени, система шаров, сфера, эллипсоид вращения, область, многомерное действительное евклидово пространство.

Институт математики Національної академії наук України, Київ,
Україна
osipchuk.tania@gmail.com

Отримано 05.12.2017

УДК 517.54

©2017. V. I. Ryazanov

ON THE BOUNDARY BEHAVIOR OF CONJUGATE HARMONIC FUNCTIONS

It is proved that if a harmonic function u on the unit disk \mathbb{D} in \mathbb{C} has angular limits on a measurable set E of the unit circle, then its conjugate harmonic function v in \mathbb{D} also has (finite!) angular limits a.e. on E and both boundary functions are measurable on E . The result is extended to arbitrary Jordan domains with rectifiable boundaries in terms of angular limits and of the natural parameter. This result is essentially based on the Fatou theorem on angular limits of bounded analytic functions and on the construction of Luzin and Priwalow to their uniqueness theorem for analytic and meromorphic functions. The result will have interesting applications to the study of the various Stieltjes integrals in the theory of harmonic and analytic functions and, in particular, of the Hilbert–Stieltjes integral.

Key words: correlation, boundary behavior, conjugate harmonic functions, rectifiable Jordan curves, angular limits, boundary value problems.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 30C62, 31A05, 31A20, 31A25, 31B25; Secondary 30E25, 31C05, 34M50, 35F45, 35Q15.

1. Introduction.

First of all, recall that a path in $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ terminating at $\zeta = e^{i\vartheta} \in \partial\mathbb{D}$ is called **nontangential** at ζ if its part in a neighborhood of ζ lies inside of an angle in \mathbb{D} with the vertex at ζ . Hence limits along all nontangential paths at ζ are also named **angular** at ζ . The latter is a traditional tool of the geometric function theory, see e.g. monographs [1]–[6]. Note that every closed rectifiable Jordan curve has a tangent a.e. with respect to the natural parameter and the angular limit has the same sense at its points with a tangent.

It is known the very delicate fact due to Luzin that harmonic functions in the unit circle with continuous (even absolutely continuous!) boundary data can have conjugate harmonic functions whose boundary data are not continuous functions, furthermore, they can even be even not essentially bounded in neighborhoods of each point of the unit circle, see e.g. Theorem VIII.13.1 in [7]. Thus, a correlation between boundary data of conjugate harmonic functions is not a simple matter, see also I.E in [3].

Denote by h^p , $p \in (0, \infty)$, the class of all harmonic functions u in \mathbb{D} with

$$\sup_{r \in (0,1)} \left\{ \int_0^{2\pi} |u(re^{i\vartheta})|^p d\vartheta \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

It is clear that $h^p \subseteq h^{p'}$ for all $p > p'$ and, in particular, $h^p \subseteq h^1$ for all $p > 1$.

Remark 1. It is important that every function in the class h^1 has a.e. nontangential boundary limits, see e.g. Corollary IX.2.2 in [8].

It is also known that a harmonic function u in \mathbb{D} can be represented as the Poisson integral

$$u(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-t)+r^2} \varphi(t) dt \tag{1.1}$$

with a function $\varphi \in L^p(0, 2\pi)$, $p > 1$, if and only if $u \in h^p$, see e.g. Theorem IX.2.3 in [8]. Thus, $u(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ as $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ along any nontangential path for a.e. ϑ , see e.g. Corollary IX.1.1 in [8]. Moreover, $u(z) \rightarrow \varphi(\vartheta_0)$ as $z \rightarrow e^{i\vartheta_0}$ at points ϑ_0 of continuity of the function φ , see e.g. Theorem IX.1.1 in [8].

Note also that $v \in h^p$ whenever $u \in h^p$ for all $p > 1$ by the M. Riesz theorem, see [9], see also Theorem IX.2.4 in [8]. Generally speaking, this fact is not trivial but it follows immediately for $p = 2$ from the Parseval equality, see e.g. the proof of Theorem IX.2.4 in [8]. The case $u \in h^1$ is more complicated.

The correlation of the boundary behavior of conjugate harmonic functions outside the classes h^p was not investigated at all. This is just the subject of the present article.

2. The case of the unit disk with respect to the arc length.

Here we apply in a certain part a construction of Luzin–Priwalow from the proof of their theorem on the boundary uniqueness for analytic functions, see [10], see also [3], Section III.D.1, and [6], Section IV.2.5.

Theorem 1. *Let $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ be a harmonic function that has angular limits on a measurable set E of the unit circle $\partial\mathbb{D}$. Then its conjugate harmonic functions v have (finite !) angular limits a.e. on E and both boundary functions are measurable on E .*

Remark 2. By the Luzin–Priwalow uniqueness theorem for meromorphic functions u as well as v cannot have infinite angular limits on a subset of \mathbb{D} of a positive measure, see Section IV.2.5 in [6].

Proof. By Remark 2 we may consider that angular limits of u are finite everywhere on the set E . Moreover, the measurable set E admits a countable exhaustion by measure of the arc length with its closed subsets, see e.g. Theorem III(6.6) in [11], and hence with no loss of generality we may also consider that E is compact, see e.g. Proposition I.9.3 in [12].

Following [3], Section III.D.1, we set, for $\zeta \in \partial\mathbb{D}$,

$$S_\zeta = \left\{ z \in \mathbb{D} : |z| > \frac{1}{\sqrt{2}}, |\arg(\zeta - z)| < \frac{\pi}{4} \right\} \tag{2.1}$$

and

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{\zeta \in E} S_\zeta \cup D_* \tag{2.2}$$

where

$$D_* = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} .$$

It is easy geometrically to see that $\partial\mathfrak{D}$ contains E and it is a rectifiable Jordan curve because $\partial\mathbb{D} \setminus E$ is open set and hence it consists of a countable collection of arcs of $\partial\mathbb{D}$, see the corresponding illustrations in [3], Section III.D.1.

By the construction, the radii of \mathbb{D} to every $\zeta \in E$ belong to \mathfrak{D} and the well defined real-valued function $\varphi(\zeta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\zeta)$, $\varphi_n(\zeta) := u(r_n\zeta)$, $n = 1, 2, \dots$, with arbitrary sequence $r_n \rightarrow 1 - 0$ as $n \rightarrow \infty$, is measurable, see e.g. Corollary 2.3.10 in [13]. Thus, by the known Egorov theorem, see e.g. Theorem 2.3.7 in [13], with no loss of generality we may assume that $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformly on E and that φ is continuous on E , see e.g. Section 7.2 in [14].

Let us consider the sequence of the functions

$$\psi_n(\zeta) := \sup_{z \in S_\zeta \cap D_\zeta^n} |u(z) - \varphi(\zeta)|, \quad \zeta \in E, \quad (2.3)$$

where $D_\zeta^n = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < \varepsilon_n\}$ with $\varepsilon_n \searrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. First of all, $\psi_n(\zeta) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ for every $\zeta \in E$. Moreover, the functions $\psi_n(\zeta)$ are measurable again by Corollary 2.3.10 in [13] because of $\psi_n(\zeta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_{mn}(\zeta)$ as $m \rightarrow \infty$ where the functions

$$\psi_{mn}(\zeta) := \max_{z \in \overline{S_\zeta} \cap R_\zeta^{mn}} |u(z) - \varphi(\zeta)|, \quad R_\zeta^{mn} := \overline{D_\zeta^n} \setminus D_\zeta^{n+m}, \quad \zeta \in E, \quad (2.4)$$

are continuous. Indeed, $\psi_{mn}(\zeta)$ coincide with the Hausdorff distance between the compact sets $u(\overline{S_\zeta} \cap R_\zeta^{mn})$ and $\{\varphi(\zeta)\}$, see e.g. Theorem 2.21.VII in [15], and any distance is continuous with respect to its variables, recall that both functions u and φ are continuous.

Again by the Egorov theorem with no loss of generality we may consider that $\psi_n \rightarrow 0$ uniformly on E . The latter implies that the restriction U of the harmonic function u to the domain \mathfrak{D} is bounded. Indeed, let us assume that there exists a sequence of points $z_n \in \mathfrak{D}$ such that $|u(z_n)| \geq n$, $n = 1, 2, \dots$. With no loss of generality we may consider that $z_n \rightarrow \zeta \in E$ because the function u is bounded on the compact subsets of \mathbb{D} and by the construction $E = \partial\mathfrak{D} \cap \partial\mathbb{D}$ and E is compact. Moreover, by the construction of \mathfrak{D} , we also may consider that $z_n \in S_{\zeta_n}$, $\zeta_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$ and that $\zeta_n \rightarrow \zeta$ as $n \rightarrow \infty$. Consequently, it should be that $u(z_n) \rightarrow \varphi(\zeta)$ because $\psi_n(\zeta_n) \rightarrow 0$ as $\zeta_n \rightarrow \zeta$, see e.g. Theorem 7.1(2) and Proposition 7.1 in [14]. The latter conclusion contradicts the above assumption.

Further, by the construction the domain \mathfrak{D} is simply connected and hence by the Riemann theorem there exists a conformal mapping $w = \omega(z)$ of \mathfrak{D} onto \mathbb{D} , see e.g. Theorem II.2.1 in [8]. Note that the function $U_* := U \circ \omega^{-1}$ is a bounded harmonic function in \mathbb{D} and there exists its conjugate harmonic function V_* in \mathbb{D} , i.e. $F := U_* + iV_*$ is an analytic function in \mathbb{D} . Let N be a positive number that is greater than $\sup_{w \in \mathbb{D}} |U_*(w)| = \sup_{z \in \mathfrak{D}} |U(z)|$. Then the analytic function $g(w) := F(w)/(N - F(w))$, $w \in \mathbb{D}$, is bounded. Thus, by the Fatou theorem, see e.g. Corollary III.A in [3], g has finite angular limits as $w \rightarrow W$ for a.e. $W \in \partial\mathbb{D}$. By Remark 2 these limits cannot be

equal to 1 on a subset of $\partial\mathbb{D}$ of a positive measure. Consequently, the function $F(w)$ has also (finite!) angular limits as $w \rightarrow W$ for a.e. $W \in \partial\mathbb{D}$.

Let us consider the analytic function $f = F \circ \omega$ given in the domain \mathfrak{D} . By the construction $\operatorname{Re} f = U = u|_{\mathfrak{D}}$ and hence $V := \operatorname{Im} f$ is its conjugate harmonic function in \mathfrak{D} . By the standard uniqueness theorem for analytic functions, we have that $V = v|_{\mathfrak{D}}$ where v is a conjugate harmonic function for u in \mathbb{D} . Recall that the latter is unique up to an additive constant. Thus, it remains to prove that the function $f(z)$ has (finite!) angular limits as $z \rightarrow \zeta$ for a.e. $\zeta \in E$. For this goal, note that the rectifiable curve $\partial\mathfrak{D}$ has tangent a.e. with respect to its natural parameter. It is clear that tangents at points $\zeta \in E$ to $\partial\mathfrak{D}$ (where they exist!) coincide with the corresponding tangents at ζ to $\partial\mathbb{D}$.

By the Caratheodory theorem ω can be extended to a homeomorphism of $\overline{\mathfrak{D}}$ onto $\overline{\mathbb{D}}$ and, since $\partial\mathfrak{D}$ is rectifiable, by the theorem of F. and M. Riesz length $\omega^{-1}(\mathcal{E}) = 0$ whenever $\mathcal{E} \subset \partial\mathbb{D}$ with length $\mathcal{E} = 0$, see e.g. Theorems II.C.1 and II.D.2 in [3]. By the Lindelöf theorem, see e.g. Theorem II.C.2 in [3], if $\partial\mathfrak{D}$ has a tangent at a point ζ , then

$$\arg [\omega(\zeta) - \omega(z)] - \arg [\zeta - z] \rightarrow \text{const} \quad \text{as } z \rightarrow \zeta .$$

In other words, the conformal images of sectors in \mathfrak{D} with a vertex at $\zeta \in \partial\mathfrak{D}$ is asymptotically the same as sectors in \mathbb{D} with a vertex at $w = \omega(\zeta) \in \partial\mathbb{D}$ up to the corresponding shifts and rotations. Consequently, nontangential paths in \mathbb{D} are transformed under ω^{-1} into nontangential paths in \mathfrak{D} and inversely at the corresponding points of $\partial\mathbb{D}$ and $\partial\mathfrak{D}$.

Thus, in particular, $v(z)$ has finite angular limits $\varphi_*(\zeta)$ for a.e. $\zeta \in E$. Moreover, the function $\varphi_* : E \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable because $\varphi_*(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(\zeta)$ where $v_n(\zeta) := v(r_n\zeta)$, $n = 1, 2, \dots$, with $r_n \rightarrow 1 - 0$ as $n \rightarrow \infty$, see e.g. Corollary 2.3.10 in [13]. \square

In particular, we have the following consequence of Theorem 1.

Corollary 1. *Let $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ be a harmonic function that has angular limits a.e. on the unit circle $\partial\mathbb{D}$. Then its conjugate harmonic functions v in \mathbb{D} also have angular limits a.e. on $\partial\mathbb{D}$ and both boundary functions are measurable.*

By Remark 1 we have also the next consequence of Theorem 1.

Corollary 2. *Let $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ be a harmonic function in the class h^1 . Then its conjugate harmonic functions $v : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ have (finite!) angular limits $v(z) \rightarrow \varphi(\zeta)$ as $z \rightarrow \zeta$ for a.e. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.*

3. The case of rectifiable Jordan domains.

Theorem 2. *Let D be a Jordan domain in \mathbb{C} with a rectifiable boundary and $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ be a harmonic function that has angular limits on a measurable set E of ∂D with respect to the natural parameter. Then its conjugate harmonic functions $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ also have (finite!) angular limits a.e. on E with respect to the natural parameter and both boundary functions are measurable on E with respect to this parameter.*

Proof. Again by the Riemann theorem there exists a conformal mapping $w = \omega(z)$ of D onto \mathbb{D} and by the Caratheodory theorem ω can be extended to a homeomorphism of \overline{D} onto $\overline{\mathbb{D}}$. As known, a rectifiable curves have tangent a.e. with respect to the natural parameter. Hence ∂D has a tangent at every point ζ of the set E except its subset \mathcal{E} with length $\mathcal{E} = 0$. By the Lindelöf theorem, for every $\zeta \in E \setminus \mathcal{E}$,

$$\arg [\omega(\zeta) - \omega(z)] - \arg [\zeta - z] \rightarrow \text{const} \quad \text{as } z \rightarrow \zeta .$$

Thus, the harmonic function $u_* := u \circ \omega^{-1}$ given in \mathbb{D} has angular limits $\varphi_*(w)$ at all points w of the set $E_* := \omega(E \setminus \mathcal{E}) \subseteq \partial\mathbb{D}$. Consequently, by Theorem 1 its conjugate harmonic function $v_* : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ has (finite !) angular limits $\psi_*(w)$ at a.e. point $w \in E_*$ and the boundary functions $\varphi_* : E_* \rightarrow \mathbb{R}$ and $\psi_* : E_* \rightarrow \mathbb{R}$ are measurable. The harmonic function $v := v_* \circ \omega$ is conjugate for u because the function $f := f_* \circ \omega$, where $f_* := u_* + v_*$, is analytic. Finally, by theorems of Lindelöf and F. and M. Riesz v has (finite !) angular limits $\psi(\zeta) = \psi_*(\omega(\zeta))$ at a.e. point $\zeta \in E$.

The boundary functions $\varphi = \varphi_* \circ \omega$ and $\psi = \psi_* \circ \omega$ of u and v on E , correspondingly, are measurable functions on E because $\varphi(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\zeta)$ for all $\zeta \in E$ and $\psi(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\zeta)$ for a.e. $\zeta \in E$, where the functions $\varphi_n(\zeta) := u_*(r_n \omega(\zeta))$ and $\psi_n(\zeta) := v_*(r_n \omega(\zeta))$ with $r_n \rightarrow 1 - 0$ as $n \rightarrow \infty$ are continuous, see e.g. Corollary 2.3.10 in [13]. \square

Corollary 3. *Let D be a Jordan domain in \mathbb{C} with a rectifiable boundary and $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ be a harmonic function that has angular limits a.e. on ∂D with respect to the natural parameter. Then its conjugate harmonic functions $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ also have (finite !) angular limits a.e. on ∂D and both boundary functions are measurable on E with respect to the natural parameter.*

Remark 3. These results can be extended to domains whose boundaries consist of a finite number of mutually disjoint rectifiable Jordan curves (through splitting into a finite collection of Jordan's domains !).

The established facts can be applied to various boundary value problems for harmonic and analytic functions in the plane, see e.g. [16]–[19].

References

1. *Duren, P.L.* (1970). Theory of H^p spaces. Pure and Applied Mathematics. Vol. 38. New York-London: Academic Press.
2. *Garnett, J.B., Marshall, D.E.* (2005). Harmonic Measure. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
3. *Koosis, P.* (1998). Introduction to H^p spaces. Cambridge Tracts in Mathematics. Vol. 115. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
4. *Luzin, N.N.* (1951). Integral i trigonometriceskii ryady. Moscow–Leningrad: Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit. (in Russian).
5. *Pommerenke, Ch.* (1992). Boundary behaviour of conformal maps. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Vol. 299. Berlin: Springer-Verlag.
6. *Priwalow, I.I.* (1956). Randeigenschaften analytischer Funktionen. Hochschulbücher für Mathematik. Vol. 25. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

7. *Bari, N.K.* (1961). Trigonometric series. Moscow: Gos. Izd. Fiz.–Mat. Lit. (in Russian); (1964). A treatise on trigonometric series. Vol. I–II. New York: Macmillan Co.
8. *Goluzin, G.M.* (1969). Geometric theory of functions of a complex variable. Transl. of Math. Monographs. Vol. 26. Providence, R.I.: American Mathematical Society.
9. *Riesz, M.* (1927). Sur les fonctions conjuguées. Math. Z., 27, pp. 218–244.
10. *Luzin, N., Privalov, I.* (1924). Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris. 178, pp. 456–459.
11. *Saks, S.* (1937). Theory of the integral. Warsaw; (1964). New York: Dover Publications Inc.
12. *Bourbaki, N.* (1968). General topology. The main structures. Moscow: Nauka (in Russian).
13. *Federer, H.* (1969). Geometric Measure Theory. Berlin: Springer–Verlag.
14. *Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E.* (2009). Moduli in Modern Mapping Theory. New York: Springer.
15. *Kuratowski, K.* (1968). Topology. Vol. 1. New York: Academic Press.
16. *Ryazanov, V.* (2014). On the Riemann–Hilbert Problem without Index. Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. 5(LXIII), No. 1, pp. 169–178.
17. *Ryazanov, V.* (2015). Infinite dimension of solutions of the Dirichlet problem. Open Math. (the former Central European J. Math.). 13, No. 1, pp. 348–350.
18. *Ryazanov, V.* (2017). On Neumann and Poincaré problems for Laplace equation. Anal. Math. Phys. 7, No. 3, pp. 285–289.
19. *Ryazanov, V.* (2017). The Stieltjes integrals in the theory of harmonic and analytic functions. ArXiv 1711.02717v7 [math.CV], 18 pp.

В. И. Рязанов

О граничном поведении сопряженных гармонических функций.

Доказывается, что если гармоническая функция u , заданная в единичном круге \mathbb{D} комплексной плоскости \mathbb{C} , имеет угловые пределы на измеримом множестве E единичной окружности, то ее сопряженная гармоническая функция v в \mathbb{D} также имеет угловые пределы п.в. на E и обе граничные функции п.в. конечны и измеримы на E . Затем этот результат распространяется на произвольные жордановы области со спрямляемыми границами в терминах угловых пределов относительно естественного параметра. Результат существенно основывается на теореме Фату об угловых пределах ограниченных аналитических функций и конструкции Лузина и Привалова к их теореме единственности для аналитических и мероморфных функций. Результат будет иметь интересные приложения к изучению различных интегралов Стильтьеса в теории гармонических и аналитических функций и, в частности, интеграла Гильберта–Стилтьеса.

Ключевые слова: корреляция, граничное поведение, сопряженные гармонические функции, спрямляемые жордановы кривые, угловые пределы, краевые задачи.

В. І. Рязанов

Про граничну поведінку пов'язаних гармонічних функцій.

Доводиться, що якщо гармонічна функція u , що задана в одиничному колі \mathbb{D} комплексної площини \mathbb{C} , має кутові межі на вимірній множині E одиничного кола, то її сполучена гармонічна функція v в \mathbb{D} також має кутові межі п.в. на E і обидві граничні функції п.в. кінцеві та вимірні на E . Потім цей результат поширюється на довільні жорданова області з границями, що спрямляються в термінах кутових меж щодо природного параметра. Результат істотно ґрунтується на теоремі Фату про кутові межі обмежених аналітичних функцій та конструкції Лузіна і Привалова до їх

теоремі єдиності для аналітичних і мероморфних функцій. Результат буде мати цікаві додатки до вивчення різних інтегралів Стілтєса в теорії гармонійних і аналітичних функцій і, зокрема, інтеграла Гільберта–Стілтєса.

Ключові слова: *кореляція, гранична поведінка, пов'язані гармонійні функції, жорданові криві, що спрямляються, кутові границі, крайові задачі.*

*Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine
vl.ryazanov1@gmail.com*

Получено 07.11.17

УДК 519.7

©2017. С. В. Сапунов

О НАПРАВЛЕННОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ГРАФОХОДНОГО АВТОМАТА БЕЗ КОМПАСА НА БЕСКОНЕЧНОЙ ЦЕПИ

Решена задача организации направленного перемещения графоходного автомата без компаса на бесконечной цепи (т. е. бесконечном связном 2-регулярном графе). Получены необходимые и достаточные условия в виде ограничений на свойства автомата и разметку цепи, при которых автомат сохраняет направление перемещения на цепи. Предложены два типа вершинной разметки цепи, допускающие направленное перемещение автомата: так называемые детерминированная и слабо детерминированная разметки. Разработаны методы и алгоритмы обхода автоматом конечных и бесконечных помеченных цепей. Для обоих типов разметки разработаны алгоритмы разметки цепей, все вершины которых не помечены или помечены одной и той же меткой. Полученные результаты закладывают основы для изучения навигации автоматов без компаса и их коллективов в стационарных однородных дискретных средах.

MSC: 68R10, 05C85, 68Q45, 68T40.

Ключевые слова: обход графа, вершинная разметка, лабиринт, конечный автомат, мобильный агент, робот, направленное перемещение.

1. Введение.

Автоматы, перемещающиеся на графах, являются математической формализацией автономных мобильных агентов с ограниченной памятью функционирующих в дискретных средах. В рамках этой модели возникла обширная и интенсивно развивающаяся область исследований поведения автоматов в лабиринтах (лабиринты представляют собой орграфы специального вида, уложенные на целочисленной решетке) [1, 2]. Основными задачами для автоматов и лабиринтов являются задачи синтеза автоматов (коллективов автоматов), которые обходят лабиринты из заданного класса, и задачи описания по заданному автомату (коллективу автоматов) всех лабиринтов, которые обходятся этими автоматами. Для автоматов и лабиринтов решены задачи обхода лабиринта автоматом и коллективом автоматов, отличия вершин лабиринта друг от друга и лабиринта-эталона от класса лабиринтов. Исследование в этом направлении получили широкий спектр приложений, например, в задачах анализа изображений [3–5] и навигации мобильных роботов [6]. Результаты, полученные для автоматов и лабиринтов, опираются на важное допущение — функционирующие в лабиринтах автоматы могут различать направления, т. е. обладают «компасом» [7–10].

В настоящей работе рассматривается автомат без компаса, который перемещается на бесконечной помеченной цепи (бесконечном 2-регулярном неориентированном графе с помеченными вершинами). Автомат получает на вход информацию о разметке локальной окрестности текущей вершины цепи, а его выходом является перемещение в одну из наблюдаемых вершин. Автомат не различает направление и взаимное расположение этих вершин, но различает метки вершин. В работе

приводятся достаточные и необходимые условия в виде ограничений на свойства автомата и разметку цепи, при которых автомат сохраняет постоянное направление перемещения.

2. Постановка задачи.

В начальный момент времени автомат устанавливается в произвольную вершину бесконечной помеченной цепи. Далее вершину, в которой находится автомат, будем называть текущей вершиной. Автомат наблюдает метки вершин, смежных текущей. Автомат не имеет компаса, т.е. не различает направления и взаимное расположение вершин. Автомат может перемещаться из текущей вершины в смежную с ней вершину. Требуется найти необходимые и достаточные условия в виде ограничений на свойства автомата и разметку цепи, при которых автомат сохраняет постоянное направление перемещения.

3. Основные определения.

Все неопределяемые здесь понятия из теории автоматов и теории графов общеизвестны и могут быть найдены, например, в [11].

Бесконечной в обе стороны цепью (или, короче, бесконечной цепью) будем называть бесконечный связный неориентированный граф у которого степень каждой вершины равна 2. Конечной цепью будем называть всякий конечный связный подграф бесконечной цепи. Висячие вершины конечной цепи будем называть ее концами.

Помеченным графом назовем простой связный неориентированный граф с помеченными вершинами $G = (V, E, M, \mu)$, где V – множество вершин, E – множество ребер, M – множество меток, $\mu : V \rightarrow M$ – сюръективная функция разметки. Путем в графе G будем называть последовательность вершин $p = v_1 \dots v_k$ такую, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $i = 1, \dots, k - 1$. Число $k \in \mathbb{N}$ будем называть длиной пути p . Меткой $\mu(p)$ пути p назовем слово $w = \mu(v_1) \dots \mu(v_k)$ в алфавите меток M . Будем говорить, что слово w определяется вершиной v_1 . Через M^* обозначим множество всех конечных слов в алфавите M , включая пустое слово e длины 0, а через M^+ обозначим множество $M^* \setminus \{e\}$. Множество L_v всех слов $w \in M^+$, определяемых вершиной $v \in V$, будем называть языком, определяемым этой вершиной. Граф G будем называть приведенным, если для любых вершин $v, s \in V$ из $v \neq s$ следует $L_v \neq L_s$. Определим на M^+ частичную операцию \circ композиции слов. Пусть $a, b \in M$, $w, u \in M^*$, тогда $wa \circ au = wau$ и $wa \circ bu$ не определено, если $a \neq b$. Введем операцию $\star : V \times M^+ \rightarrow 2^V$ соотношением: для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ через $v \star w$ обозначим множество всех вершин $s \in V$ таких, что существует путь p из v в s , и $\mu(p) = w$. Ясно, что если слово $w \in L_v$, то $|v \star w| > 0$ и $|v \star w| = 0$ в противном случае.

Обходом графа будем называть любой путь, который проходит через все вершины графа. В случае конечного графа обход может быть конечным или бесконечным, в случае бесконечного графа, естественно, только бесконечным.

Графоходным автоматом (graph walking automaton) на помеченном графе G

назовем шестерку $A = (S, X, Y, s_0, \varphi, \psi)$, где S – конечное множество состояний, $X = \{(a_0, \{a_1, \dots, a_k\}) \mid a_i \in M, 0 \leq i \leq k\}$ – конечный входной алфавит (a_0 – метка вершины, в которой находится автомат (текущей вершины), $\{a_1, \dots, a_k\}$ – множество (или мультимножество) меток всех вершин из окрестности текущей вершины, k – степень текущей вершины), $Y = M$ – конечный выходной алфавит ($y = a$ означает, что автомат переходит из текущей вершины в смежную с ней вершину с меткой $a \in M$), $s_0 \in S$ – начальное состояние, $\varphi : S \times X \rightarrow S$ – функция переходов, $\psi : S \times X \rightarrow Y$ – функция выходов. Автомат функционирует следующим образом: наблюдает разметку окрестности текущей вершины, выбирает одну из меток и переходит в вершину с этой меткой.

Для того, чтобы определить понятие направления движения автомата, уложим бесконечную цепь на одномерной целочисленной решетке так, что разным вершинам цепи соответствуют разные вершины решетки и две вершины соединены ребром, если соответствующие им точки различаются на 1. При этом именем вершины цепи будем считать ее координату в решетке.

Пусть автомат A в момент времени t находится в вершине $v(t)$ цепи G . Перемещение автомата будем называть равномерным и направленным, если существует такой натуральный период T , что для любого момента времени t выполняется $v(t+T) - v(t) = v(t+2T) - v(t+T)$.

4. Разметка, способствующая перемещениям автомата.

Разметку уложенной бесконечной цепи G можно рассматривать как функцию $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow M$. Разметку назовем периодической в направлении $l \in \mathbb{Z}$, если $\mu(i+l) = \mu(i)$ для любого $i \in \mathbb{Z}$

Функцию разметки $\mu : V \rightarrow M$ будем называть детерминированной или Д-разметкой, если для любой вершины $v \in V$ и любых вершин $s, t \in O_{(v)}$ из $s \neq t$ следует $\mu(s) \neq \mu(t)$ ($O_{(v)} = v \cup \{v' \in V \mid (v, v') \in E\}$ – замкнутая окрестность вершины v). Помеченный граф с детерминированной функцией разметки будем называть детерминированным или Д-графом.

Рассмотрим свойства Д-графов.

Лемма 1. *Помеченный граф G является Д-графом тогда и только тогда, когда для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ выполняется $|v \star w| = 1$, если $w \in L_v$, и $|v \star w| = 0$ в противном случае.*

Доказательство. Пусть помеченный граф G является Д-графом. Пусть, далее, $v \in V$ и $a \in M$. Тогда $v \star a = v$, если $a = \mu(v)$, и $v \star a = \emptyset$, если $a \neq \mu(v)$. Следовательно, для всех слов длины 1 утверждение леммы выполняется. Для всех слов длины 2 утверждение леммы непосредственно следует из определения Д-разметки. Пусть слово $w \in L_v$ и его длина больше 2. Слово w можно единственным способом представить в виде композиции $w_1 \circ w_2 \circ \dots \circ w_{|w-1|}$ его подслов длины 2. По определению Д-разметки $|v \star w_1| = 1$, $|(v \star w_1) \star w_2| = 1$, $|((v \star w_1) \star w_2) \star w_3| = 1$ и т. д. Из этого следует, что $|v \star (w_1 \circ w_2)| = 1$, $|v \star (w_1 \circ w_2 \circ w_3)| = 1$ и т. д. Продолжая эти рассуждения получаем, что $|v \star w| = 1$. Пусть для любой вершины v и любого слова $w \in M^+$ выполняется $|v \star w| \leq 1$. Тогда это условие выполняется

для всех слов длины 2. Следовательно все вершины в $O_{(v)}$ имеют разные метки и на вершинах графа G определена D -разметка. Лемма доказана. \square

Таким образом, D -граф определяется или через локальные свойства его вершин, или через нелокальное свойство множества всех путей, определяемых каждой из его вершин.

Свойство, описанное леммой 1, предоставляет принципиальную возможность целенаправленного перемещения графоходного автомата по D -графу. Например, зная метки путей, соединяющих между собой вершины D -графа, можно построить графоходный автомат, способный перемещаться по этим путям.

Лемма 2. Для любых различных вершин $v', v'' \in V$ D -графа G и любого слова $w \in L_{v'} \cap L_{v''}$ расстояние между вершинами $v' \star w$ и $v'' \star w$ не меньше 4.

Доказательство. Пусть $w = a_1 \dots a_k$, где $a_i \in M$, $1 \leq i \leq k$. Предположим, что расстояние между вершинами $s = v' \star w$ и $t = v'' \star w$ меньше 4. Пусть это расстояние равно 1, т.е. $s = v' \star a_1 \dots a_{k-1} a_k = v'' \star a_1 \dots a_{k-1} a_k = t$. Тогда в окрестности $O_{(s)}$ окажутся две различные вершины с одной и той же меткой a_{k-1} , что невозможно по определению D -графа. Следовательно, $v' \star a_1 \dots a_{k-1} = v'' \star a_1 \dots a_{k-1}$. По индукции получаем, что $v' = v''$, что невозможно по условию теоремы. Пусть расстояние между вершинами s и t равно 2, т.е. $(s, t) \in E$. Тогда в окрестности $O_{(s)}$ находится вершина t с меткой $\mu(t) = \mu(s) = a_k$, что невозможно по определению D -графа. Пусть расстояние между вершинами s и t равно 3, т.е. существует вершина $q \in V$ такая, что путь sq является кратчайшим путем из s в t . Тогда $s, t \in O_{(q)}$ и $\mu(s) = \mu(t)$, что невозможно по определению D -графа. Лемма доказана. \square

D -разметку графа назовем минимальной, если она использует наименьшую возможное количество типов меток.

Теорема 1. Минимальная D -разметка бесконечной цепи использует метки трёх различных типов.

Доказательство. Для любой вершины $v \in V$ бесконечной цепи выполняется равенство $|O_{(v)}| = 3$. Следовательно, для D -разметки замкнутой окрестности этой вершины необходимы метки трёх различных типов. Выберем произвольно вершину $v \in V$. Пусть $O_{(v)} = \{v, s, t\}$, $\mu(s) = a$, $\mu(v) = b$, $\mu(t) = c$, где $M = \{a, b, c\}$. Пусть, далее, $h \in O_{(s)}$ и $q \in O_{(t)}$, где $h \neq v$ и $q \neq v$. Тогда вершина h находится на расстоянии 4 от вершины t и, по лемме 2, может быть помечена только меткой c . Аналогично, вершина q находится на расстоянии 4 от вершины s и может быть помечена только меткой a . Продолжая рассуждения, по индукции получаем D -разметку бесконечной цепи с использованием меток трех различных типов. Теорема доказана. \square

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Минимальная D -разметка бесконечной цепи является периодической разметкой.

Доказательство. Пусть бесконечная цепь G с заданной на ней минимальной

Д-разметкой уложена на одномерной целочисленной решетке. Пусть, далее, $i \in \mathbb{Z}$ – произвольная вершина этой цепи. Из леммы 2 следует, что $\mu(i) \neq \mu(i+1)$, $\mu(i) \neq \mu(i+2)$ и $\mu(i+1) \neq \mu(i+2)$. Из теоремы 1 следует, что $\mu(i) = \mu(i+3)$. Так как вершина i выбрана произвольно, то из последнего равенства следует, что минимальная Д-разметка бесконечной цепи является периодической в направлении 3. Следствие доказано. \square

Далее, если не оговорено противное, будем рассматривать только минимальную Д-разметку бесконечной цепи. Следующее утверждение показывает, что минимальная Д-разметка способствует направленному перемещению автомата на бесконечной цепи.

Теорема 2. *Существует графоходный автомат, осуществляющий направленное перемещение на бесконечной Д-размеченной цепи.*

Доказательство. На бесконечной Д-размеченной цепи G , уложенной на одномерной целочисленной решетке, естественным образом выделяются два направления движения из произвольной начальной вершины – в сторону роста имен вершин и в сторону их убывания. Так как автомат не «видит» имена вершин, а только их метки, то для доказательства теоремы покажем как перемещается автомат в каждом из направлений с использованием периодичности Д-разметки цепи.

Без потери общности предположим, что $M = \{0, 1, 2\}$. Пусть $i \in \mathbb{Z}$ – произвольная вершина детерминированной цепи G . Тогда вершины из ее окрестности имеют метки $\mu(i) \oplus_3 1$ и $\mu(i) \oplus_3 (-1)$ (здесь \oplus_3 обозначает сложение по модулю 3). Пусть, далее, $\mu(i+1) = \mu(i) \oplus_3 1$. Тогда, в силу периодичности Д-разметки цепи, $\mu(i+2) = \mu(i+1) \oplus_3 1$ и т.д. Ясно, что в этом случае $\mu(i-1) = \mu(i) \oplus_3 (-1)$, $\mu(i-2) = \mu(i-1) \oplus_3 (-1)$ и т.д. Таким образом, на бесконечной детерминированной цепи можно определить два направления движения, которые условно назовем «восток» и «запад». Перемещение автомата по цепи на «восток» заключается в следующем. Автомат наблюдает метку $\mu(v)$ текущей вершины v и для перемещения выбирает в окрестности $O_{(v)}$ вершину, метка которой равна $\mu(v) \oplus_3 1$. Соответственно, для перемещения на «запад» автомат выбирает вершину, метка которой равна $\mu(v) \oplus_3 (-1)$.

Пусть автомат движется только на «восток» (или только на «запад»). Тогда для любого момента времени t равенство $v(t+T) - v(t) = v(t+2T) - v(t+T)$ выполняется при $T = 1$. Следовательно, описанный выше алгоритм действительно приводит к равномерному направленному перемещению автомата. Теорема доказана. \square

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Существует графоходный автомат, который обходит любую конечную Д-размеченную цепь.*

Доказательство. Докажем утверждение при помощи непосредственного построения алгоритма обхода произвольной цепи. Так как автомат за один шаг может переместиться только в вершину, смежную текущей, то, посетив обе висячие вершины цепи, он тем самым с необходимостью посетит и все вершины, располо-

женные между ними. Следовательно, посещение обоих концов цепи можно считать признаком окончания обхода. Составим алгоритм перемещений графоходного автомата так, чтобы гарантировано побывать в этих вершинах.

1. Двигаться на «восток» (метка следующей вершины определяется путем сложения метки текущей вершины с 1 по модулю 3) до тех пор, пока это возможно (в результате автомат окажется в одной из висячих вершин) и повернуть на «запад».

2. Двигаться на «запад» (метка следующей вершины определяется путем сложения метки текущей вершины с -1 по модулю 3) до тех пор, пока это возможно (в результате автомат окажется во второй висячей вершине).

Следуя этому алгоритму, автомат посетит обе висячие вершины цепи и, следовательно, все вершины, расположенные между ними. \square

Графоходный автомат имеет конечное число состояний и, таким образом, не может обойти бесконечную цепь без использования дополнительных средств. При исследованиях поведения автоматов в лабиринтах одним из таких средств считаются камни, то есть переносные маркеры, которые автомат может переносить, устанавливая и подбирать в вершинах графа [1, 2]. Для автоматов на графах камни играют роль внешней памяти. Положим, что камень обнаруживается автоматом при посещении вершины, в которой он расположен. Положим, далее, что камень, находящийся в вершине, не изменяет и не скрывает ее метку.

Теорема 3. *Существует графоходный автомат с двумя камнями, который обходит бесконечную D -размеченную цепь.*

Доказательство. Докажем утверждение непосредственным построением алгоритма обхода цепи. Изначально автомат с обоими камнями находится в произвольной начальной вершине. Пусть $a \in \{0, 1\}$ – метка этой вершины. Прежде чем войти в бесконечный цикл, автомат выполняет следующие действия:

1. Перейти на одну вершину на «восток» (в вершину с меткой $b = a \oplus_3 1$) и установить в текущей вершине один камень.

2. Перейти в начальную вершину (в вершину с меткой $a = b \oplus_3 (-1)$).

3. Перейти на одну вершину на «запад» (в вершину с меткой $c = a \oplus_3 (-1)$) и установить в ней второй камень.

В теле бесконечного цикла автомат повторяет следующую последовательность действий:

1. Двигаться на «восток» до тех пор, пока не обнаружен камень и подобрать его.

2. Перейти на одну вершину на «восток», установить в ней камень и перейти на одну вершину на «запад».

3. Двигаться на «запад» до тех пор, пока не обнаружен камень и подобрать его.

4. Перейти на одну вершину на «запад», установить в ней камень и перейти на одну вершину на «восток».

Покажем, что, следуя этому алгоритму, автомат действительно обходит бесконечную цепь. Выберем произвольную вершину цепи, отличную от начальной.

Пусть расстояние между этими вершинами равно $k > 1$. За каждую итерацию основного цикла автомат отодвигает камни на расстояние в одну вершину от начальной (один камень на «восток», второй – на «запад»). Тогда после $(k - 1)$ -й итерации автомат посетит как вершину, находящуюся на расстоянии k «восточнее» начальной, так и вершину, расположенную на расстоянии k «западнее» начальной. Так как вершина была выбрана произвольно, то, выполняя алгоритм, автомат побывает в любой вершине цепи. Следовательно, автомат обходит бесконечную D -помеченную цепь. \square

Ввиду применимости D -разметки для организации направленного перемещения автомата возникает следующая задача: можно ли построить автомат, который способен строить минимальную D -разметку непомеченной (или, что то же самое, помеченной одной меткой) цепи? Положительный ответ на вопрос этой задачи дает следующая теорема.

Теорема 4. *Существует автомат, который строит на бесконечной цепи минимальную D -разметку.*

Доказательство. Докажем утверждение при помощи непосредственного построения алгоритма D -разметки цепи. Пусть $M = \{0, 1, 2\}$ и все вершины цепи помечены одной и той же меткой $\lambda \notin M$. Вершины с меткой λ будем называть непомеченными. Положим, что автомат может переходить на непомеченные вершины, т. е. его выходной алфавит $Y = M \cup \{\lambda\}$. Расширим возможности автомата так, чтобы он мог переносить метки и устанавливать их в вершинах цепи. Положим, что автомат не может заменять и удалять метки, установленные им ранее. Положим, далее, что автомат восстанавливает запас переносимых им меток при посещении начальной вершины. Прежде, чем войти в бесконечный основной цикл алгоритма, автомат устанавливает в начальной вершине метку 0 и выбирает текущее направление движения «восток». Выбор направления заключается в фиксации слагаемого, 1 или -1 , которое автомат прибавляет к метке текущей вершины для определения метки следующей вершины. Первоначальный выбор направления не принципиален и «восток» здесь указан для определенности. В теле бесконечного основного цикла алгоритма автомат повторяет следующую последовательность действий:

1. Двигаться в выбранном направлении (на первой итерации на «восток») до тех пор, пока не окажется в первой вершине, в окрестности которой есть вершина с меткой λ .
2. Запомнить метку текущей вершины.
3. Перейти на вершину с меткой λ .
4. Поставить текущую вершину меткой, соответствующей текущему направлению движения («восток» – к метке предыдущей вершины прибавить 1 по модулю 3, «запад» – прибавить -1).
5. Перейти на предыдущую вершину.
6. Сменить направление движения на противоположное.

Покажем, что автомат, следуя приведенному алгоритму, действительно осу-

ществляет D -разметку бесконечной цепи. На каждой итерации основного цикла одна непомеченная вершина цепи получает метку из M . Причем на эту вершину автомат приходит из вершины, помеченной им ранее. Поэтому после каждой итерации получаем связную конечную помеченную цепь, которая включает в себя цепь, полученную на предыдущей итерации, и содержит на одну вершину больше. Предположим, что на некоторой итерации автомат оказался в непомеченной вершине v_i (здесь индексы вершин обозначают порядок их посещения при перемещениях автомата). Пусть он двигался на «восток» и $\mu(v_{i-1}) = a$, где $a \in M$. Тогда метка $\mu(v_{i-2}) = c$, где $c = a \oplus_3 (-1)$. Выполняя предписания алгоритма, автомат устанавливает $\mu(v_i) = b$, где $b = a \oplus_3 1$. На следующей итерации автомат движется на «запад» и помеченная цепь увеличивается на одну «западную» вершину. Следовательно, в процессе исполнения алгоритма любая вершина бесконечной цепи получит метку за конечное число шагов и разметка связной конечной цепи, полученной после очередной итерации, является детерминированной и минимальной. \square

Из теоремы 4 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Существует автомат, который строит на конечной цепи минимальную D -разметку.*

Действительно, для построения алгоритма поведения такого автомата достаточно дополнить алгоритм разметки цепи из доказательства теоремы 4 реакцией на достижение конца цепи. Пусть в процессе разметки автомат посетил, например, «восточный» конец цепи и, следовательно, дальнейшая разметка в «восточном» направлении невозможна. Тогда автомат продолжает челночное перемещение по помеченному подграфу цепи (т. к. по предварительной договоренности автомат может пополнить запас меток только проходя начальную вершину), но метки получают только непомеченные вершины, обнаруженные при движении на «запад». Автомат останавливается после разметки «западного» конца дуги.

5. Минимальная разметка, допускающая перемещения автомата.

В этом разделе рассматривается следующая задача: можно ли построить графоходный автомат, который сохраняет направление перемещения на бесконечной помеченной цепи, у которой число типов меток меньше трёх? В [12] показано, что для сохранения направления перемещения на бесконечной непомеченной (или, что то же самое, помеченной одной меткой) цепи автомату необходимо и достаточно наличие трёх различных камней. Здесь рассматривается случай, когда число типов меток равно двум.

Функцию разметки $\mu : V \rightarrow M$ будем называть слабо детерминированной или СД-разметкой, если для любой вершины $v \in V$ и любых вершин $s, t \in O_v$ из $s \neq t$ следует $\mu(s) \neq \mu(t)$ ($O_v = \{v' \in V \mid (v, v') \in E\}$ – окрестность вершины v). Помеченный граф со слабо детерминированной функцией разметки будем называть слабо детерминированным или СД-графом.

Покажем, что для СД-графов выполняется свойство D -графов, описанное леммой 1, т. е. для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ справедливо $|v \star w| =$

1, если $w \in L_v$ и $|v \star w| = 0$ в противном случае. Предположим, что это не так и для некоторой вершины v некоторого СД-графа G существует слово $w \in L_v$ такое, что $|v \star w| > 1$. Представим w в виде композиции $w_1 \circ w_2 \circ \dots \circ w_{|w|-1}$ его двухбуквенных подслов. Из определения СД-разметки следует, что $|v \star w_1| = 1$, $|(v \star w_1) \star w_2| = 1$ и так далее. Следовательно, $|v \star (w_1 \circ w_2)| = 1$, $|v \star (w_1 \circ w_2 \circ w_3)| = 1$ и так далее. Продолжая рассуждения получаем, что $|v \star w| = 1$, что противоречит нашему предположению. Из этого противоречия вытекает справедливость рассматриваемого утверждения. Приведенные рассуждения доказывают принципиальную возможность целенаправленного перемещения графоходного автомата по СД-графу.

Для СД-графов выполняются утверждения, аналогичные лемме 2 для Д-графов: для любых различных вершин $v', v'' \in V$ СД-графа G и любого слова $w \in L_{v'} \cap L_{v''}$ расстояние между вершинами $v' \star w$ и $v'' \star w$ или равно 2, или не меньше 4. Действительно, пусть $w = a_1 \dots a_k$, где $a_i \in M$, $1 \leq i \leq k$, $s = v' \star w$, $t = v'' \star w$. Доказательство того, что расстояние между s и t не может быть равно 1 или 3 аналогично доказательству леммы 2 с поправкой на то, что рассматриваются окрестности вершин (в лемме 2 рассматривались замкнутые окрестности). Пусть расстояние между вершинами s и t равно 2, т. е. $(s, t) \in E$. Тогда в окрестности O_s находится вершина t с меткой $\mu(t) = \mu(s) = a_k$, что не противоречит определению СД-разметки. Более того, других вершин с меткой a_k ни в O_s , ни в O_t нет. Пусть расстояние между s и t равно 4. Тогда $O_s \cap O_t = \emptyset$ и одинаковая разметка вершин s и t не противоречит определению СД-разметки.

Теорема 5. *Минимальная СД-разметка бесконечной цепи использует метки двух различных классов.*

Доказательство. Для любой вершины $v \in V$ бесконечной цепи выполняется равенство $|O_v| = 2$. Следовательно, для СД-разметки окрестности этой вершины необходимы метки не менее двух различных классов. Выберем произвольно вершину $v \in V$. Пусть $O_v = \{s, t\}$, $\mu(s) = a$, $\mu(t) = b$, где $M = \{a, b\}$. Исходя из определения СД-разметки вершина v может иметь или метку a , или метку b . Положим, для определенности, что $\mu(v) = a$. Пусть $h \in O_s$, $q \in O_t$, $h \neq v$, $q \neq v$. Тогда, по определению СД-разметки, $\mu(h) = a$ и $\mu(q) = b$. Продолжая рассуждения, по индукции получим СД-разметку бесконечной цепи с использованием меток двух различных типов. Теорема доказана. \square

Из теоремы 5 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Минимальная СД-разметка бесконечной цепи является периодической разметкой.*

Доказательство. Пусть бесконечная цепь с заданной на ней минимальной СД-разметкой уложена на одномерной целочисленной решетке. Пусть, далее, $i \in \mathbb{Z}$ – произвольная вершина этой цепи. Если $\mu(i) = \mu(i-1)$, то по определению СД-разметки, $\mu(i) \neq \mu(i+1)$ и $\mu(i) \neq \mu(i+2)$, но $\mu(i) = \mu(i+3)$ и $\mu(i) = \mu(i+4)$. Если $\mu(i) \neq \mu(i-1)$, то $\mu(i) = \mu(i+1)$, $\mu(i) \neq \mu(i+2)$, $\mu(i) \neq \mu(i+3)$, но $\mu(i) = \mu(i+4)$. Таким образом, метки вершин i и $i+4$ всегда совпадают. Так как вершина i выбрана произвольно, то из приведенных рассуждений следует, что ми-

нимальная СД-разметка бесконечной цепи является периодической в направлении
4. Следствие доказано. \square

Следующее утверждение показывает, что минимальная СД-разметка способствует направленному перемещению графоходного автомата на бесконечной цепи.

Теорема 6. *Существует графоходный автомат, осуществляющий направленное перемещение на бесконечной СД-размеченной цепи.*

Доказательство. Без потери общности предположим, что $M = \{a, b\}$. Пусть $i \in \mathbb{Z}$ – произвольная вершина слабо детерминированной цепи G и $\mu(i) = a$. Тогда вершины из ее окрестности имеют метки a и b . Пусть далее, $\mu(i-1) = a$ и $\mu(i+1) = b$. Тогда, по следствию 2, $\mu(i+2) = b$, $\mu(i+3) = \mu(i-1) = a$, $\mu(i+4) = \mu(i) = a$, $\mu(i+5) = \mu(i+1) = b$ и т. д. В этом случае $\mu(i-2) = \mu(i+2) = b$, $\mu(i-3) = \mu(i+1) = b$, $\mu(i-4) = \mu(i) = a$ и т. д.

Таким образом, для автомата, начинающего движение из произвольной вершины СД-размеченной цепи, есть два возможных направления движения: первое – на вершину, метка которой совпадает с меткой текущей вершины, и второе – на вершину, метка которой отличается от нее. Первое направление условной назовем «запад», а второе – «восток». Пусть $i, i+1 \in V$ и $\mu(i) = \mu(i+1)$. Тогда «восток» для автомата в вершине i означает «запад» для автомата в вершине $i+1$ и наоборот. В этом заключается отличие СД-разметки цепи от её Д-разметки, для которой «восток» и «запад» в любой вершине определены однозначно.

Перемещение автомата по цепи на «восток» заключается в последовательном повторении двух шагов: (1) перейти на вершину, метка которой отличается от метки текущей; (2) перейти на вершину, метка которой совпадает с меткой текущей. Перемещение на «запад» получаем если шаги (1) и (2) поменяем местами.

Пусть автомат движется только на «восток» (или только на «запад»). Тогда для любого момента времени t равенство $v(t+T) - v(t) = v(t+2T) - v(t+T)$ выполняется при $T = 1$. Следовательно, описанный выше алгоритм действительно приводит к направленному перемещению автомата. Теорема доказана. \square

Из теоремы 6 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 5. *Существует графоходный автомат, который обходит любую конечную СД-размеченную цепь.*

Доказательство. Признаком окончания обхода, как и при обходе конечной Д-размеченной цепи, будем считать посещение автоматом обоих висячих вершин. Составим алгоритм перемещений автомата. Начальное направление движения автомата не имеет принципиального значения. Положим для определенности, что автомат начинает двигаться на «восток».

1. Двигаться на «восток» до тех пор, пока это возможно (в результате автомат окажется на «восточном» конце цепи). Пусть v_k обозначает «восточный» конец цепи (здесь нижние индексы в именах вершин обозначают только последовательность их посещения автоматом при выполнении алгоритма).

2. Если $\mu(v_k) = \mu(v_{k-1})$, то двигаться на «запад». Если $\mu(v_k) \neq \mu(v_{k-1})$, то двигаться на «восток». Движение в выбранном направлении продолжать до

тех пор, пока это возможно (в результате автомат окажется на «западном» конце цепи).

Покажем, что автомат, выполняя предписания пункта 2, будет двигаться в направлении, противоположном тому, в котором он двигался в пункте 1. Пусть при движении на «восток» из начальной вершины v_0 , автомат последовательно посетил вершины v_0, v_1, \dots, v_k . Возможны два варианта разметки окрестности вершины v_k : либо $\mu(v_k) = \mu(v_{k-1})$, либо $\mu(v_k) \neq \mu(v_{k-1})$. Пусть $\mu(v_k) = \mu(v_{k-1})$. Тогда, по определению движения на «запад», автомат переходит на вершину, метка которой совпадает с $\mu(v_k)$. Единственной такой вершиной в окрестности O_{v_k} является v_{k-1} . Далее автомат переходит на вершину, метка которой отличается от $\mu(v_{k-1})$. Единственной такой вершиной в окрестности $O_{v_{k-1}}$ является v_{k-2} . Продолжая этот процесс автомат последовательно посетит вершины $v_k, v_{k-1}, \dots, v_1, v_0$ и далее будет двигаться к противоположному концу цепи. Пусть $\mu(v_k) \neq \mu(v_{k-1})$. Тогда, по определению движения на «восток», автомат переходит на вершину, метка которой отличается от $\mu(v_k)$. Единственной такой вершиной в окрестности O_{v_k} является v_{k-1} . Далее автомат переходит на вершину, метка которой совпадает с $\mu(v_{k-1})$. Единственной такой вершиной в окрестности $O_{v_{k-1}}$ является v_{k-2} . Продолжая этот процесс автомат последовательно посетит вершины $v_k, v_{k-1}, \dots, v_1, v_0$ и далее будет двигаться к противоположному концу цепи. Таким образом, автомат посетит обе висячие вершины цепи и, следовательно, все вершины, расположенные между ними. \square

Следующее утверждение является аналогом Теоремы 3 для бесконечной СД-размеченной цепи.

Теорема 7. *Существует графоходный автомат с двумя камнями, который обходит бесконечную СД-размеченную цепь.*

Доказательство. Изначально автомат с обоими камнями находится в произвольной начальной вершине. Обозначим метку этой вершины через $a \in M$. Тогда в ее окрестности находятся вершины с метками a и b , где $b \in M, b \neq a$. Прежде, чем войти в бесконечный цикл, автомат выполняет следующие действия:

1. Перейти на вершину с меткой b и оставить в ней один из камней.
2. Перейти на вершину с меткой a .
3. Перейти на вершину с меткой a и оставить в ней второй камень.

Для дальнейших перемещений автомату потребуются запоминать метку предыдущей вершины, т. е. вершины, из которой автомат непосредственно перешел в текущую. В начале каждой итерации основного цикла алгоритма автомат находится на вершине, в которой расположен один из камней. Автомату предстоит выполнить следующие действия:

1. Перейти на предыдущую вершину.
2. Если метка текущей вершины совпадает с меткой предыдущей, то двигаться на «восток» до тех пор, пока не будет обнаружен камень. Если метка текущей вершины отличается от метки предыдущей, то двигаться на «запад» до тех пор, пока не будет обнаружен камень.

3. Подобрать камень, перейти на вершину, метка которой отличается от метки предыдущей, и установить в ней камень.

Покажем, что автомат, следуя этому алгоритму, действительно обходит бесконечную СД-размеченную цепь. Автомат, совершая перемещения, описанные в пунктах 1 и 2, проходит только те вершины, которые он уже посетил ранее. Он оказывается на новой для него вершине только тогда, когда устанавливает в ней камень. После этого автомат возвращается на предыдущую вершину. Следовательно, является невозможной ситуация, когда автомат бесконечно перемещается в одном направлении в неисследованной части цепи. Выберем произвольную вершину цепи, отличную от начальной. Пусть расстояние между этой вершиной и начальной равно $k > 1$. На каждой итерации основного цикла автомат отодвигает один из камней на расстояние в одну вершину от начальной, а на следующей итерации – отодвигает на одну вершину второй камень. Если $k = 2$, то автомат посетит искомую вершину при первоначальной расстановке камней. Если $k > 2$, то после $(2k - 5)$ -й итерации автомат посетит как вершину, находящуюся на расстоянии k «западнее» начальной, так и вершину, расположенную на расстоянии k «восточнее» начальной. Так как вершина была выбрана произвольно, то, выполняя алгоритм, автомат посетит любую вершину цепи. Следовательно, автомат обходит бесконечную СД-размеченную цепь. \square

Рассмотрим следующую задачу: можно ли построить автомат, который способен строить минимальную СД-разметку непомеченной цепи? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 8. *Существует автомат, который строит на бесконечной цепи минимальную СД-разметку.*

Доказательство. Докажем утверждение при помощи непосредственного построения алгоритма, следуя которому автомат выполнит СД-разметку цепи. Пусть $M = \{a, b\}$ и все вершины цепи помечены одной и той же меткой $\lambda \notin M$. Положим, что автомат может переходить на вершины с меткой λ , то есть его входной алфавит $Y = M \cup \{\lambda\}$. Расширим возможности автомата так, чтобы он мог переносить метки из M и устанавливать их в вершинах цепи. Положим, что автомат не может заменять и удалять метки, которые он уже установил. Положим, далее, что автомат восстанавливает запас переносимых меток при посещении начальной вершины.

Прежде, чем войти в бесконечный цикл автомат выполняет следующие действия:

1. Пометить текущую (т. е. начальную) вершину меткой a .
2. Перейти на вершину с меткой λ (случайным образом выбирается из двух вершин, смежных с начальной).
3. Пометить текущую вершину меткой a .

В теле бесконечного цикла автомат повторяет следующую последовательность действий:

1. Перейти на предыдущую вершину.

2. Двигаться на «восток» (см. теорему 6) до тех пор, пока не окажется в первой вершине, в окрестности которой есть вершина с меткой λ .
3. Перейти на вершину с меткой λ .
4. Пометить текущую вершину меткой, отличающейся от метки предыдущей вершины.
5. Перейти на вершину с меткой λ .
6. Пометить текущую вершину меткой, совпадающей с меткой предыдущей вершины.

На каждой итерации основного цикла алгоритма две смежные непомеченные вершины цепи последовательно получают одинаковые метки из M . При этом автомат переходит в непомеченную вершину из вершины, которая была помечена им ранее. Поэтому после каждой итерации цикла получаем связную конечную помеченную цепь, которая включает в себя цепь, полученную на предыдущей итерации, и содержит на две вершины больше. Предположим, что на некоторой итерации автомат оказался в непомеченной вершине v_i (здесь нижние индексы обозначают только порядок посещения вершин при перемещениях автомата). Пусть метка предыдущей вершины $\mu(v_{i-1}) = a$ (в этом случае, согласно предписаниям алгоритма, $\mu(v_{i-2}) = a$). Автомат устанавливает $\mu(v_i) \neq \mu(v_{i-1})$, т. е. $\mu(v_i) = b$. Таким образом, $\mu(v_{i-1}) \neq \mu(v_{i+1})$ и разметка окрестности вершины v_i удовлетворяет условию слабой детерминированности. Следовательно, разметка связной конечной цепи, полученной на этой итерации, является слабо детерминированной. Затем автомат переходит на непомеченную вершину v_{i+1} и устанавливает $\mu(v_{i+1}) = \mu(v_i)$, т. е. $\mu(v_{i+1}) = b$. На следующей итерации автомат переходит на вершину v_i и, далее, совершает перемещения, которые заключаются в повторении двух шагов: (1) перейти на вершину, метка которой отличается от метки текущей; (2) перейти на вершину, метка которой совпадает с меткой текущей. Из сказанного выше следует, что $\mu(v_i) = \mu(v_{i+1})$ и $\mu(v_i) \neq \mu(v_{i+1})$, т. е. автомат на этой итерации будет перемещаться в направлении, противоположном тому, в котором он перемещался на предыдущей итерации. Таким образом, автомат достигнет противоположного конца помеченной части цепи и, затем, увеличит ее длину еще на две вершины. Следовательно, в процессе выполнения алгоритма любая вершина бесконечной цепи получит метку за конечное число шагов и разметка связной конечной цепи, полученной после каждой итерации, является слабо детерминированной и минимальной. \square

Из теоремы 8 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. *Существует автомат, который строит на конечной цепи минимальную СД-разметку.*

Доказательство. Для построения алгоритма поведения искомого автомата достаточно дополнить алгоритм разметки цепи из теоремы 8 реакцией на достижение конца цепи. Пусть G – конечная цепь, у которой $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ и $(v_i, v_{i+1}) \in E$ для всех $i = 1, \dots, k-1$. Положим, что автомат, исполняя алгоритм СД-разметки, установил метку в одном из концов цепи, например, в вершине v_k . Следовательно,

дальнейшая разметка в этом направлении невозможна. Автомат возвращается на предыдущую вершину и далее перемещается, следуя правилу: перейти на вершину, метка которой отличается от метки предыдущей. Покажем, что автомат, исполняя это предписание, будет перемещаться в направлении, противоположном тому, в котором он перемещался на предыдущей итерации. Предположим, что на предыдущей итерации автомат последовательно посетил помеченные ранее вершины v_i, \dots, v_k , где $1 < i < k$. Возможны два варианта разметки окрестности вершины v_k : либо $\mu(v_k) = \mu(v_{k-1})$, либо $\mu(v_k) \neq \mu(v_{k-1})$. В обоих случаях $\mu(v_{k-2}) \neq \mu(v_k)$ и $\mu(v_{k-3}) \neq \mu(v_{k-1})$. На текущей итерации автомат возвращается на вершину v_{k-1} и должен перейти на вершину, метка которой отличается от $\mu(v_k)$. В окрестности v_{k-1} единственной такой вершиной является v_{k-2} . Из v_{k-2} автомат должен перейти на вершину, метка которой отличается от $\mu(v_{k-1})$. В окрестности v_{k-2} единственной такой вершиной является v_{k-3} . Продолжая этот процесс автомат посетит вершину v_i . Таким образом, на каждой итерации автомат движется в направлении, противоположном тому, в котором он двигался на предыдущей. Далее автомат продолжает челночные перемещения по помеченному подграфу цепи (т. к. по предварительной договоренности автомат может пополнить запас меток только посещая начальную вершину), но добавляет помеченные вершины только к одному его концу. Автомат останавливается после разметки второй висячей вершины цепи. \square

6. Выводы.

В работе получены необходимые и достаточные условия в виде ограничений на свойства графоходного автомата и разметку бесконечной цепи, при которых автомат без компаса сохраняет направление перемещения на цепи. Предложены два типа вершинной разметки цепи, допускающие направленное перемещение автомата. Разработаны методы и алгоритмы автоматного обхода конечных и бесконечных помеченных цепей и построения обоих типов разметки для непомеченных цепей. Полученные результаты закладывают основы для изучения навигации автоматов без компаса и их коллективов в стационарных однородных дискретных средах.

Цитированная литература

1. Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш.М. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. – 2003. – Т. 15, вып. 2. – С. 3–39.
2. Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш.М. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. – 2003. – Т. 15, вып. 3. – С. 3–39.
3. Стаматович Б. Распознавание односвязных цифр автоматом // Интеллектуальные системы. – 1998. – Т. 3, вып. 3–4. – С. 281–305.
4. Стаматович Б. Распознавание двусвязных цифр коллективом автоматов // Интеллектуальные системы. – 1998. – Т. 4, вып. 1–2. – С. 321–337.
5. Деглина Ю.Б., Козловский В.А., Костокрыз К.А. Автоматное распознавание оцифрованных многоугольников // Искусственный интеллект. – 2004. – № 3. – С. 443–452.
6. Dudek G., Jenkin M. Computational Principles of Mobile Robotics. – Cambridge University Press, 2010. – 406 p.

7. *Blum M., Kozen D.* On the Power of the Compass // SFCS '78 Proc. 19th Annu. Symp. Found. Comput. Sci. – IEEE Computer Society Washington, 1978. – P. 132–142.
8. *Donald B.R.* The Compass That Steered Robotics // Logic and Program Semantics. – Springer, 2012. – P. 50–65.
9. *Bhatt S., Even S., Greenberg D., Tayar R.* Traversing Directed Eulerian Mazes // Journal of Graph Algorithms and Applications. – 2002. – Vol. 6, N. 2. – P. 157–173.
10. *Бабичев А.В.* Ориентирование в лабиринте // Автоматика и телемеханика. – 2008. – Вып. 2. – С. 135–145.
11. *Дицель Р.* Теория графов. – Новосибирск, Изд-во Ин-та математики, 2002. – 336 с.
12. *Курганский А.Н., Сапунов С.В.* О направленном перемещении коллектива автоматов без компаса на одномерной целочисленной решетке // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, Вып. 3. – С. 356–365.

References

1. *Kilibarda, G., Kudryavtsev, V.B., Uščumlić, Š.* (2003). Independent systems of automata in labyrinths. Discrete Mathematics and Applications, 13, is. 3, pp. 221–255.
2. *Kilibarda, G., Kudryavtsev, V.B., Uščumlić, Š.* (2003). Collectives of automata in labyrinths. Discrete Mathematics and Applications, 13, is. 5, pp. 429–466.
3. *Stamatovich, B.* (1998). Recognizing simply connected numerals by automata. Intellectualnyie sistemyi, 3, is. 3–4, pp. 281–305 (in Russian).
4. *Stamatovich, B.* (1998). Recognizing doubly connected numerals by collectives of automata. Intellectualnyie sistemyi, 4, is. 1–2, pp. 321–337 (in Russian).
5. *Deglina, Yu.B., Kozlovskii, V.A., Kostogryz, K.A.* (2004). Automata recognition of digitized polygons. Iskusstvennyiy intellekt, No. 3, pp. 443–452 (in Russian).
6. *Dudek, G., Jenkin, M.* (2010). Computational Principles of Mobile Robotics. Cambridge University Press, 406 p.
7. *Blum, M., Kozen, D.* (1978). On the Power of the Compass. SFCS '78 Proc. 19th Annu. Symp. Found. Comput. Sci. IEEE Computer Society Washington, pp. 132–142.
8. *Donald, B.R.* (2012). The Compass That Steered Robotics. Logic and Program Semantics. Springer, pp. 50–65.
9. *Bhatt, S., Even, S., Greenberg, D., Tayar, R.* (2002). Traversing Directed Eulerian Mazes. Journal of Graph Algorithms and Applications, 6, No. 2, pp. 157–173.
10. *Babichev, A.V.* (2008). Orientation in a maze. Automation and Remote Control, 69, is. 2, pp. 299–309.
11. *Diestel, R.* (2005). Graph Theory. Springer, 411 p.
12. *Kurganskyy, O.M., Sapunov, S. V.* (2016). On the Directional Movement of a Collective of Automata without a Compass on a One-dimensional Integer Lattice. Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Mat. Mekh. Inform., 16, is. 3, pp. 356–365.

S. V. Sapunov

On the Directional Movement of a Graph Walking Automaton without a Compass on Infinite Path Graph.

Automata walking on graphs are a mathematical formalization of autonomous mobile agents with limited memory operating in discrete environments. Under this model arose an intensively developing broad area of studies of the behaviour of automata in labyrinths (labyrinth is an embedded directed graph of special form). Research in this regard received a wide range of applications, for example, in the problems of image analysis and navigation of mobile robots. The results for automata and labyrinths are based on the important assumption that automata operating in labyrinths can distinguish directions,

that is, they have a compass. This paper deals with the problem of organizing a directional movement of a graph-walking automaton on infinite path graph (i.e. infinite connected two-regular graph). We consider the following problem. Initially the automaton located at an arbitrary vertex of the vertex-labelled path graph. The automaton looking over neighbourhood of the current vertex and may travel to some neighbouring vertex selected by its label. The automaton does not distinguish between equally labelled vertices by their coordinates of direction (that means automaton has no compass). It is required to find necessary and sufficient conditions in the form of restrictions on the properties of the automaton and on the labelling of the graph under which the automaton maintain movement direction. Two types of vertex labelling sufficient for automaton navigation are proposed. Labelling function is called weakly deterministic if all vertices in open neighbourhood of every vertex have different labels. Labelling function is called deterministic all vertices in closed neighbourhood of every vertex have different labels. It is shown that for the deterministic labelling the directions at any vertex are uniquely determined, but for the weakly deterministic labelling not. A vertex labelling that minimize the number of different label types is called a minimal labelling. It is demonstrated that for infinite chain: (1) minimal deterministic labelling uses three label types; (2) minimal weakly deterministic labelling uses two label types. Algorithms for constructing both types of labelling for finite and infinite unlabelled path graphs are developed. The obtained results lay the basis for studying navigation of automata without a compass and their collectives in stationary homogeneous discrete environments.

Keywords: *graph traversal, vertex labelling, labyrinth, finite automaton, mobile agent, robot, directional movement.*

С. В. Сапунов

Про спрямоване переміщення графохідного автомату без компаса на нескінченному ланцюзі.

Розв'язано задачу організації спрямованого переміщення графохідного автомату без компаса на нескінченному ланцюзі (тобто нескінченному зв'язному 2-регулярному графі). Отримані необхідні та достатні умови у вигляді обмежень на властивості автомата і розмітку ланцюга, за яких автомат зберігає напрямок переміщення на ланцюзі. Запропоновано два типи вершинної розмітки ланцюгу, що допускають спрямоване переміщення автомата: так звані детермінована і слабо детермінована розмітки. Розроблено методи та алгоритми обходу автоматом скінченних і нескінченних помічених ланцюгів. Для обох типів розмітки розроблено алгоритми розмітки ланцюгів, усі вершини яких не позначені або позначені однією і тією ж позначкою. Отримані результати закладають основи для вивчення навігації автоматів без компасу та їх колективів у стаціонарних однорідних дискретних середовищах.

Ключові слова: *обхід графу, вершинна розмітка, лабіринт, скінченний автомат, мобільний агент, робот, спрямоване переміщення.*

УДК 517.9

©2017. С. М. Чуйко, О. В. Несмелова (Старкова), Д. В. Сысоев

НЕЛИНЕЙНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Исследована задача о нахождении условий существования и построении решений периодической задачи для нелинейного уравнения Дюффинга. При этом, исследованная нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга не является слабонелинейной, в отличие от наиболее изученных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучен случай наличия простых корней уравнения для порождающих амплитуд. Для нахождения решений поставленной задачи в критическом случае получены конструктивные необходимые и достаточные условия существования, а также построена сходящаяся итерационная схема. Актуальность изучения нелинейного уравнения Дюффинга связана с многочисленными применениями уравнения Дюффинга в теории колебаний, механике, электронике, кардиологии. Для промежуточного вычисления корней нелинейных вещественных уравнений построена оригинальная итерационная техника с кубической сходимостью. Предложенная итерационная техника определяет на каждом шаге точное выполнение условий разрешимости, гарантирующее отсутствие вековых (или секулярных) членов, при этом приближения к решениям периодической задачи для уравнения Дюффинга являются периодическими функциями. Для контроля скорости сходимости итерационной схемы к точному решению периодической задачи для уравнения Дюффинга использованы невязки полученных приближений в уравнении Дюффинга в пространстве непрерывных функций, определенных на отрезке, длина которого определяется на каждом шаге итерационной схемы. Заметим также, что итерационная схема с кубической сходимостью применима для нахождения приближенных решений автономных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых каждое приближение в точности удовлетворяет краевому условию.

MSC: 34B15.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, критический случай, итерационная техника с кубической сходимостью, уравнение Дюффинга.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу о нахождении 2π -периодических решений $y(t) \in C^1[0; 2\pi]$ нелинейного уравнения Дюффинга с возмущением [1, 2]

$$y'' + y = f(t) + Y(y), \quad Y(y) := y^3. \quad (1)$$

Неоднородность $f(t)$ считаем непрерывной $f(t) \in C[0; 2\pi]$ 2π -периодической функцией. Периодические решения нелинейного уравнения Дюффинга (1) будем искать в окрестности решения

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cos t, \quad c_0 \in \mathbb{R}^1$$

однородной части этого уравнения. Полагаем выполненным условие разрешимости

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

2 π -периодической задачи для линейной части уравнения Дюффинга (1)

$$\int_0^{2\pi} \cos t f(t) dt = 0, \quad (2)$$

при этом линейная часть этой задачи имеет однопараметрическое семейство решений

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cos t + G \left[f(s) \right] (t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^1,$$

представимое оператором Грина

$$G \left[f(s) \right] (t) := \int_0^t \sin(t-s) f(s) ds$$

2 π -периодической задачи для линейной части

$$y'' + y = f(t)$$

уравнения Дюффинга (1). Периодические решения нелинейного уравнения Дюффинга (1)

$$y(t) = y_0(t, c_0) + x(t)$$

будем искать в окрестности решения $y_0(t, c_0)$ линейной части этого уравнения в виде разложения по косинусам независимой переменной. Для нахождения возмущения $x(t) \in C^1[0; 2\pi]$ приходим к 2 π -периодической задаче для уравнения

$$x'' + x = Y(y_0 + x),$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} Y(y_0(t, c_0) + x(t)) \cos t dt = 0. \quad (3)$$

Для нахождения амплитуды $c_0 \in \mathbb{R}^1$ порождающего решения $y_0(t, c_0)$ приходим к уравнению

$$F_0(c_0) := \int_0^{2\pi} Y(y_0(t, c_0)) \cos t dt = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) традиционно называют уравнением для порождающих амплитуд 2 π -периодической задачи для уравнения Дюффинга (1). Уравнение (4) при $f(t) = \cos 3t$ имеет единственный простой

$$B_0 = \frac{3\pi}{128} \neq 0$$

действительный корень

$$c_0^* = -\frac{1}{8}, \quad B_0 := F'(c_0^*).$$

Приближения к периодическому решению нелинейного уравнения Дюффинга (1) будем искать в окрестности порождающего решения $y_0(t, c_0^*)$ в виде

$$y_{k+1}(t) = y_0(t, c_0^*) + c_{k+1} \cos t + x_{k+1}(t), \quad (5)$$

$$x_{k+1}(t) := G \left[Y(y_0(s, c_0^*) + c_k \cos s + x_k(s)) \right] (t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Итерационная схема (5) соответствует методу простых итераций [3, 4]. Условием сходимости итерационной схемы (5) является требование сжимаемости

$$\left\| G'_x \left[Y(y_0(s, c_0^*) + c_k \cos s + x_k(s)) \right] \right\| < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

для оператора G . Условие сходимости выполнено для первого шага:

$$\left\| G'_x \left[Y(y_0(s, c_0^*)) \right] \right\| \approx 0,0455\,389 \ll 1.$$

Периодическая задача для уравнения первого приближения

$$x_1''(t) + x_1(t) = Y(y_0(t, c_0^*))$$

разрешима в силу равенства $F_0(c_0^*) = 0$, при этом

$$x_1(t) = -\frac{31 \cos t}{163\,840} + \frac{3 \cos 3t}{16\,384} + \frac{\cos 9t}{163\,840}.$$

Условие существования 2π -периодического решения уравнения Дюффинга (1) для первого шага имеет вид

$$F_1(c_1) := \int_0^{2\pi} Y(y_1(t, c_1)) \cos t \, dt = 0. \quad (6)$$

Условия существования 2π -периодического решения уравнения Дюффинга (1) для каждого шага, и, в частности, уравнение (6) являются ключевыми при построении 2π -периодического решения уравнения Дюффинга (1). Традиционно, для облегчения вычислений, применялась линеаризация этих условий, приводящая к появлению вековых членов в приближениях к решению 2π -периодической задачи для уравнения Дюффинга [3, 4]. Для избежания появления вековых членов в приближениях к решению краевых задач нами ранее был использован метод наименьших квадратов [5]. Целью данной статьи является построение итерационной схемы, основанной на максимально точном решении уравнений, представляющих собой

условия существования 2π -периодического решения уравнения Дюффинга (1) для каждого шага, в частности, уравнения (6).

2. Итерационная схема с кубической сходимостью.

Исследуем задачу о нахождении решения $z^* \in \mathbb{R}^1$ скалярного уравнения

$$f(z) := z + \varepsilon\varphi(z) = 0, \quad (7)$$

где $\varphi(z) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – нелинейная функция, трижды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ и ε – малый положительный параметр. Предположим, что уравнение (7) имеет на отрезке $[a, b]$ корень $z^* \in \mathbb{R}^1$. В малой окрестности $z_0 + x \in [a, b]$ нулевого приближения $z_0 \in (a, b)$ к решению уравнения (7) имеет место разложение

$$f(z_0 + x) = f(z_0) + f'(z_0)x + \frac{f''(z_0)}{2}x^2 + \dots$$

Полагая

$$f(z_0) + f'(z_0)x + \frac{f''(z_0)}{2}x^2 \approx 0,$$

для нахождения приближенного решения $z_0 + x$ уравнения (7) приходим к квадратному уравнению

$$f(z_0) + f'(z_0)x + \frac{f''(z_0)}{2}x^2 = 0; \quad (8)$$

здесь

$$f'(z_0) = 1 + \varepsilon\varphi'(z_0), \quad f''(z_0) = \varepsilon\varphi''(z_0).$$

Дискриминант квадратного уравнения (8)

$$\begin{aligned} D(z_0) &:= (1 + \varepsilon\varphi'(z_0))^2 - 2\varepsilon(z_0 + \varepsilon\varphi(z_0))\varphi''(z_0) = \\ &= 1 + 2\varepsilon\varphi'(z_0) - 2\varepsilon(z_0 + \varepsilon\varphi(z_0))\varphi''(z_0) + \varepsilon^2(\varphi'(z_0))^2 \end{aligned}$$

для достаточно малых положительных значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ положителен, поэтому уравнение (8) имеет действительный корень

$$x = \frac{\sqrt{D(z_0)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_0)}{\varepsilon\varphi''(z_0)},$$

который определяет приближенное решение уравнения (7)

$$z = z_0 + \frac{\sqrt{D(z_0)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_0)}{\varepsilon\varphi''(z_0)}, \quad D(z_0) \geq 0.$$

Кроме того, при условии $D(z_0) \geq 0$ уравнение (8) может иметь действительный корень

$$x = \frac{-\sqrt{D(z_0)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_0)}{\varepsilon\varphi''(z_0)}.$$

Таким образом, при условии $D(z_0) \geq 0$ для различных значений параметра ε и нулевого приближения $z_0 \in (a, b)$ уравнение (8) имеет по меньшей мере один корень

$$x = \frac{\pm\sqrt{D(z_0)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_0)}{\varepsilon\varphi''(z_0)}, \quad D(z_0) \geq 0,$$

который определяет приближенные решения уравнения (7)

$$z = z_0 + \frac{\pm\sqrt{D(z_0)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_0)}{\varepsilon\varphi''(z_0)}, \quad D(z_0) \geq 0.$$

Заметим, что решение $z = z(\varepsilon)$ уравнения (7) при $\varepsilon = 0$ обращается в нуль, поэтому для достаточно малых положительных значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ квадратное уравнение (8) имеет единственный действительный корень. Поскольку

$$z(\varepsilon) = \left(\varphi(z_0)\varphi'(z_0) + z_0\varphi'(z_0) - \frac{z_0^2}{2}\varphi''(z_0) \right) \varepsilon + \dots,$$

постольку найденное для достаточно малых положительных значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ приближенное решение $z = z(\varepsilon)$ уравнения (7) при $\varepsilon = 0$ также обращается в нуль. Кроме того, при условии $D(z_0) > 0$ уравнение (7) может иметь действительный корень, который при $\varepsilon = 0$ не обращается в нуль. Таким образом, при условии $D(z_0) \geq 0$ для различных значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ и нулевого приближения $z_0 \in (a, b)$ уравнение (7) имеет по меньшей мере один действительный корень.

Покажем, что для нахождения точного решения $z^* \in \mathbb{R}^1$ уравнения (7) при условии $D(z_k) \geq 0$ применима итерационная схема

$$z_{k+1} = z_k + \frac{\pm\sqrt{D(z_k)} - 1 - \varepsilon\varphi'(z_k)}{\varepsilon\varphi''(z_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Согласно принятому соглашению функция $f(z)$ трижды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, следовательно, имеет место формула Тейлора (11):

$$f(z^*) = f(z^* - z_k + z_k) = f(z_k) + f'(z_k)(z^* - z_k) + \frac{1}{2}f''(z_k)(z^* - z_k)^2 + r_2(z_k, z^* - z_k) := 0, \quad (10)$$

где

$$r_2(z_k, z^* - z_k) := \frac{1}{3!}f'''(\xi)(z^* - z_k)^3, \quad a < z_k \leq \xi \leq z^* < b$$

– дополнительный член в форме Лагранжа [6, с. 257]. Нами использована формула Тейлора

$$f(z_0 + x) = f(z_0) + f'(z_0)x + \frac{1}{2!}f''(z_0)x^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)x^k + r_k(z_0, x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где

$$r_k(z_0, x) := \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) x^{k+1}, \quad z_0 \leq \xi \leq z_0 + x$$

– дополнительный член в форме Лагранжа:

$$f(z^*) = f(z_k) + f'(z_k)(z^* - z_k) + \frac{1}{2} f''(z_k)(z^* - z_k)^2,$$

здесь произведена замена точного решения $z^* \in \mathbb{R}^1$ уравнения (7) приближенным решением z_{k+1} :

$$f(z_k) + f'(z_k)(z_{k+1} - z_k) + \frac{1}{2} f''(z_k)(z_{k+1} - z_k)^2 = 0. \quad (12)$$

Равенства (10) и (12) приводят к оценке

$$|z^* - z_{k+1}| \leq \frac{\|f'''(\xi)\| \cdot |z^* - z_k|^3}{|3f''(z_k)(z^* - 2z_k + z_{k+1}) + 6f'(z_k)|}.$$

Предположим, что для любых $k = 0, 1, 2, \dots$ имеют место неравенства

$$\|f'''(\xi)\|_{\mathbb{C}[|z_0-q, z_0+q]} \leq \psi_1(k), \quad (13)$$

$$|f''(z_k)(z^* - 2z_k + z_{k+1}) + 2f'(z_k)|^{-1} \leq \psi_2(k).$$

Пусть существует константа

$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\psi_1(k) \psi_2(k)}{3} \right\}.$$

В этом случае имеет место оценка

$$|z^* - z_{k+1}| \leq \theta \cdot |z^* - z_k|^3,$$

свидетельствующая о том, что если итерационная схема (9) сходится к точному решению z^* уравнения (7), то эта сходимость — кубическая. Найдем условие сходимости итерационной схемы (9) к точному решению z^* уравнения (7); для этого используем оценки

$$|z^* - z_1| \leq \theta \cdot |z^* - z_0|^3, \quad |z^* - z_2| \leq \theta \cdot |z^* - z_1|^3 \leq \theta^{1+3} \cdot |z^* - z_0|^{3^2},$$

$$|z^* - z_3| \leq \theta \cdot |z^* - z_2|^3 \leq \theta^{1+3+3^2} \cdot |z^* - z_0|^{3^3}, \quad \dots,$$

$$|z^* - z_k| \leq \theta \cdot |z^* - z_{k-1}|^3 \leq \theta^{1+3+3^2+\dots+3^{k-1}} \cdot |z^* - z_0|^{3^k}, \quad \dots$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$|z^* - z_k| \leq \theta^{\frac{3^k-1}{3-1}} \cdot |z^* - z_0|^{3^k} = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \cdot \left(\theta \cdot |z^* - z_0| \right)^{3^k},$$

свидетельствующее о сходимости итерационной схемы (9) к точному решению z^* уравнения (7) при условии

$$\theta \cdot |z^* - z_0| < 1,$$

причем эта сходимость — кубическая. На практике последнее неравенство можно заменить следующим: $\theta \cdot |z_k - z_0| < 1$.

Теорема. *Предположим, что для уравнения (7) выполнены следующие условия*

1. *Нелинейная функция $\varphi(z) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, трижды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$, имеет на отрезке $[a, b]$ корень $z^* \in \mathbb{R}^1$.*
2. *В окрестности $(z_0 - q, z_0 + q) \subseteq [a, b] \subseteq \mathbb{R}^1$ нулевого приближения z_0 для значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ имеют место неравенства*

$$\|f'''(\xi)\|_{C_{[z_0-q, z_0+q]}} \leq \psi_1(k), \quad |f''(z_{k+1})(z_{k+1} - z_k) + f'(z_{k+1})|^{-1} \leq \psi_2(k+1).$$

3. *В указанной окрестности нулевого приближения z_0 для значений параметра $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ имеют место неравенства*

$$D(z_k) \geq 0, \quad \theta \cdot |z_k - z_0| < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где

$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\psi_1(k) \psi_2(k)}{6} \right\}.$$

Тогда для нахождения решения z^* уравнения (7) применима итерационная схема (9), при этом скорость сходимости итерационной схемы (9) к решению z^* уравнения (7) кубическая.

Заметим, что итерационная схема (9) не повторяет метод Шредера [7, с. 154], комбинированный метод Дэккера и Брэнта [8, 9], метод Мюллера [10], а также четырехшаговый метод Риддерса [11].

3. Итерационная схема в случае периодической задачи для уравнения Дюффинга.

Для нахождения решения $c_1 \in \mathbb{R}^1$ уравнения (6) применим итерационную схему (9), при этом $D(c_0) \approx 0,0053\ 898 \neq 0$, следовательно

$$c_1^* \approx \frac{1\ 184\ 219}{6\ 286\ 734\ 039}, \quad F(c_1^*) \approx 0,$$

при этом условие (14) на первом шаге выполнено:

$$\theta \cdot |c_1^*| \approx 0,00\ 726\ 098 \ll 1.$$

Положим для второго шага

$$y_2(t) = y_0(t, c_0^*) + c_2 \cos t + x_2(t), \quad c_2 \in \mathbb{R}^1,$$

где

$$x_2(t) = -\frac{2\,679\,191 \cos t}{14\,223\,197\,261} + \frac{11\,140\,594 \cos 3t}{61\,113\,645\,011} + \frac{220\,541 \cos 9t}{36\,303\,344\,650} - \frac{835 \cos 15t}{2\,622\,815\,013\,818}.$$

Требование сжимаемости оператора G для уравнения второго приближения выполнено:

$$\left\| G'_x \left[Y(y_1(s, c_1^*)) \right] (\cdot) \right\|_{C[0;2\pi]} \approx 0,0454\,055 \ll 1.$$

Для нахождения константы $c_2 \in \mathbb{R}^1$ применим итерационную схему (9), при этом $D(c_1^*) \approx 0,00538\,994 \neq 0$, следовательно

$$c_2^* \approx \frac{1\,184\,219}{6\,286\,734\,039}, \quad F_2(c_2^*) \approx 0,$$

при этом условие (14) на втором шаге выполнено:

$$\theta \cdot |c_2^*| \approx 0,0362\,726 \ll 1.$$

Требование сжимаемости для оператора G для уравнения третьего приближения выполнено:

$$\left\| G'_x \left[Y(y_2(s, c_2^*)) \right] (\cdot) \right\|_{C[0;2\pi]} \approx 0,0454\,064 \ll 1.$$

Для нахождения константы $c_3 \in \mathbb{R}^1$ применим итерационную схему (9), при этом $D(c_2^*) \approx 0,00538\,994 \neq 0$, следовательно

$$c_3^* \approx \frac{2\,395\,933}{12\,719\,180\,575}, \quad F_3(c_3^*) \approx 0,$$

при этом условие (14) на третьем шаге выполнено:

$$\theta \cdot |c_3^*| \approx 0,0362\,733 \ll 1.$$

Заметим, что в отличие от использованного ранее метода Ньютона, итерационная схема (9) позволяет находить констант $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^1$ за одну итерацию. Таким образом, найдено третье приближение к решению нелинейного уравнения Дюффинга (1):

$$y_3(t) = -\frac{345 \cos t}{1\,608\,254\,353\,012} - \frac{19\,084\,003 \cos 3t}{152\,895\,002} + \frac{85\,835 \cos 9t}{14\,129\,039\,197} - \frac{1763 \cos 15t}{5\,564\,301\,169\,003}.$$

Для оценки точности найденных приближений к решению периодической задачи для уравнения Дюффинга (1) определим невязки

$$\Delta_k := \left\| y_k''(t) + y_k(t) - f(t) - y_k^3(t) \right\|_{C[0;2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

В частности

$$\Delta_0 \approx 0,00195\ 313, \Delta_1 \approx 8,87\ 541 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_2 \approx 3,93\ 095 \times 10^{-8}, \Delta_3 \approx 1,77\ 160 \times 10^{-10}.$$

В заключение, отметим, что исследованная нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга (1) не является слабонелинейной, в отличие от наиболее изученных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [3, 4, 12, 13, 14, 15]. Кроме того, при построении приближений к решению периодической задачи для уравнения Дюффинга (1), в отличие от статьи [16], на каждом шаге обеспечено точное выполнение условий разрешимости, гарантирующее отсутствие вековых членов. Заметим также, что итерационная схема (9) применима для нахождения приближенных решений автономных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [17], для которых каждое приближение в точности удовлетворяет краевому условию.

Цитированная литература

1. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
2. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Факториал. – 1997. – 512 с.
3. Voichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
4. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
5. Chuiko S.M. On approximate solution of boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations (N.Y.) – 2008. – **11**, № 4. – P. 585–604.
6. Физтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: ГИФМЛ. 1962. – 607 с.
7. Хаусхолдер А. Основы численного анализа. – М.: ГИИЛ. – 1956. – 320 с.
8. Brent R.P. An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function // Comput. J. – **14**. – 1971. – P. 422–425.
9. Dekker T.J. Finding a zero by means of successive linear interpolation // 1969 Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra. Proc. Sympos., Zurich-Ruschlikon, 1967. – Wiley-Interscience, New York. – P. 37–48.
10. Muller D.E. A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer // MTAC. – 1956. – **10**. – P. 208–215.
11. Ridders C. A new algorithm for computing a single root of a real continuous function // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1979. – **26**. – P. 979–980.
12. Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев.: Наук. думка, 1990. – 96 с.
13. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеро-вы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 1995. – 318 с.
14. Chuiko S.M., Voichuk I.A., Pirus O.E. On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton–Kantorovich method // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – **189**, № 5. – P. 867–881.
15. Chuiko S.M., Pirus O.E. On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – **191**, № 3. – P. 449–464.

16. *Boichuk A. A.* Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – **50**, № 2. – P. 186–195.
17. *Chuiko S. M., Boichuk I. A.* An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.). – 2009. – **12**, № 3. – P. 405–416.

References

1. *Malkin, I. G.* (1956). Nekotorye zadachi teorii nelineynykh kolebaniy. Moscow: Gostehizdat (in Russian).
2. *Zaytsev, V. F., Polyanin, A. D.* (1997). Spravochnik po nelineynym obyknovennym differentsialnyim uravneniyam. Moscow: Faktorial (in Russian).
3. *Boichuk, A. A., Samoilenko, A. M.* (2016). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). Berlin; Boston: De Gruyter.
4. *Grebenikov, E. A., Ryabov, Yu. A.* (1979). Konstruktivnyie metody analiza nelineynykh sistem. Moscow: Nauka (in Russian).
5. *Chuiko, S. M.* (2008). On approximate solution of boundary value problems by the least square method. Nonlinear Oscillations (N.Y.), 11, No. 4, pp. 585–604.
6. *Fihtengolts, G. M.* (1962). Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. T. 1. Moscow: GIFML (in Russian).
7. *Hausholder A.* (1956). Osnovyi chislennogo analiza. Moscow: GIIL (in Russian).
8. *Brent, R. P.* (1971). An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function. Comput. J., 14, pp. 422–425.
9. *Dekker, T. J.* (1969). Finding a zero by means of successive linear interpolation. Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra. Proc. Sympos.: Zurich-Ruschlikon; (1967) Wiley-Interscience: New York.
10. *Muller, D. E.* (1956). A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer. MTAC, 10, pp. 208–215.
11. *Ridders, C.* (1979). A new algorithm for computing a single root of a real continuous function. IEEE Transactions on Circuits and Systems. 26, pp. 979–980.
12. *Boychuk, A. A.* (1990). Konstruktivnyie metody analiza kraevyih zadach. Kiev: Nauk. dumka (in Russian).
13. *Boychuk, A. A., Zhuravlev, V. F., Samoilenko, A. M.* (1995). Obobschenno-obratnyie operatory i neterovyi kraevyye zadachi. Kiev: In-t matematiki NAN Ukrainyi (in Russian).
14. *Chuiko, S. M., Boichuk, I. A., Pirus, O. E.* (2013). On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem the Newton–Kantorovich method. Journal of Mathematical Sciences. 189, No. 5, pp. 867–881.
15. *Chuiko, S. M., Pirus, O. E.* (2013). On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. Journal of Mathematical Sciences. 191, No. 3, pp. 449–464.
16. *Boichuk, A. A.* (1998). Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. Ukrainian Mathematical Journal. 50, No.2, pp. 186–195.
17. *Chuiko, S. M., Boichuk, I. A.* (2009). An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. Nonlinear Oscillations (N.Y.). 12, No. 3, pp. 405–416.

S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova (Starkova), D. V. Sysoev

Periodic value problem for an equation of Duffing in the critical case.

We studied the problem of finding conditions of existence and constructing solutions of the periodic problem for the nonlinear Duffing equation. Moreover, the studied nonlinear periodic problem for the Duffing equation is not weakly nonlinear, in contrast to the most studied boundary-value problems for ordinary differential equations. We studied the case of simple roots of the equation for generating amplitudes. To find solutions to the problem in the critical case, constructive necessary and sufficient

conditions for existence were obtained, and a convergent iterative scheme was constructed. Actuality of studying the nonlinear Duffing equation is connected with numerous applications of the Duffing equation in the theory of oscillations, mechanics, electronics, and cardiology. For an intermediate calculation of roots of non-linear real equations, an original iterative technique with cubic convergence was constructed. The proposed iterative technique determines an exact fulfillment of solvability conditions at each step, guaranteeing the absence of secular terms, wherein approximations to solutions of the periodic problem for the Duffing equation are periodic functions. To control the rate of convergence of the iterative scheme to the exact solution of the periodic problem for the Duffing equation, the discrepancies of the approximations were used in the Duffing equation in the space of continuous functions defined on an interval whose length is determined at each step of the iteration scheme. We also note that the iterative scheme with cubic convergence is applicable for finding approximate solutions of autonomous boundary value problems for ordinary differential equations for which every approximation exactly satisfies the boundary condition.

Keywords: *periodic boundary value problem, critical case, iterative technique with cubic convergence, Duffing equation.*

С. М. Чуйко, О. В. Несмелова (Старкова), Д. В. Сисоев

Нелінійна періодична задача для рівняння Дюффінга в критичному випадку.

Досліджено задачу про знаходження умов існування та побудову розв'язків періодичної задачі для нелінійного рівняння Дюффінга. При цьому, досліджена нелінійна періодична задача для рівняння Дюффінга не є слабконелінійною, на відміну від найбільш вивчених крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Вивчено випадок наявності простих коренів рівняння для породжують амплітуд. Для знаходження розв'язків поставленої задачі в критичному випадку отримані конструктивні необхідні і достатні умови існування, а також побудована збіжна ітераційна схема. Актуальність вивчення нелінійного рівняння Дюффінга пов'язана з численними застосуваннями рівняння Дюффінга в теорії коливань, механіці, електроніці, кардіології. Для проміжного обчислення коренів нелінійних дійсних рівнянь побудована оригінальна ітераційна техніка з кубічною збіжністю. Запропонована ітераційна техніка визначає на кожному кроці точне виконання умов розв'язності, які гарантують відсутність вікових (або секулярних) членів, при цьому наближення до розв'язків періодичної задачі для рівняння Дюффінга є періодичними функціями. Для контролю швидкості збіжності ітераційної схеми до точного розв'язання періодичної задачі для рівняння Дюффінга використані невязки отриманих наближень в рівнянні Дюффінга в просторі неперервних функцій, визначених на відрізьку, довжина якого визначається на кожному кроці ітераційної схеми. Зауважимо також, що ітераційна схема з кубічною збіжністю застосовна для знаходження наближених розв'язків автономних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, для яких кожне наближення в точності задовольняє крайовій умові.

Ключові слова: *періодична крайова задача, критичний випадок, ітераційна техніка з кубічною збіжністю, рівняння Дюффінга.*

Донбасский государственный педагогический университет
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Славянск
chujko-slav@inbox.ru, star-o@ukr.net

Получено 27.12.17

UDK 517.9

©2017. С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, В. О. Чечетенко

ОПЕРАТОР ГРІНА МАТРИЧНОЇ ІНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Знайдені умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна лінійної крайової задачі для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром. Актуальність вивчення теорії крайових задач для лінійних інтегрально-диференціальних рівнянь пов'язана з численними застосуваннями в задачах механіки, аеродинаміки, відновлення параметрів, а також теорії коливань. Для розв'язання матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі застосовані оригінальні умови розв'язності, а також конструкція загального розв'язку матричного рівняння типу Сильвестра.

У роботі суттєво використовується апарат псевдообернення (за Муром–Пенроузом) матриць [1], конструкції узагальнених операторів Гріна, побудовані в роботах А. М. Самойленка і О. А. Бойчука [1] та методи розв'язання матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра, побудовані в роботах О. А. Бойчука, С. А. Кривошеї [6] та С. М. Чуйка [7, 12].

Запропоновані умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром узагальнюють умови розв'язку і конструкцію узагальненого оператора Гріна інтегрально-диференціальної крайової задачі [2, 8], а також матричної крайової задачі [9]. Крім того, аналогічні умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром можуть бути отримані для аналогічної крайової задачі в абстрактних просторах [1, 10]. Запропонована схема дослідження крайових задач матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1) аналогічно [8] може бути перенесена на нелінійні інтегрально-диференціальні системи типу Фредгольма з виродженим ядром, а також аналогічно [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] – на матричні крайові задачі для інтегрально-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром, що містять диференціально-алгебраїчний оператор. З іншого боку, у разі нерозв'язності матричні крайові задачі для інтегрально-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром можуть бути регуляризовані аналогічно [18, 19].

MSC: 34B15.

Ключові слова: оператор Гріна, матрична інтегрально-диференціальна система, крайова задача.

1. Постановка задачі.

Досліджуємо задачу про побудову розв'язку [1, 2]

$$Z(t) \in \mathbb{D}_{\alpha \times \beta}^2[a; b] := \mathbb{D}^2[a; b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad Z'(t) \in \mathbb{L}_{\alpha \times \beta}^2[a; b] := \mathbb{L}^2[a; b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром

$$Z'(t) = \Phi(t) \int_a^b \left[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s) \right] \Psi(t) ds + F(t), \quad (1)$$

Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України (номер державної реєстрації 0115U003182).

підпорядкованої крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (2)$$

Тут

$$\Phi(t) \in \mathbb{L}_{\alpha \times \gamma}^2[a; b], \quad A(t), B(t) \in \mathbb{L}_{\gamma \times \alpha}^2[a; b], \quad \Psi(t) \in \mathbb{L}_{\beta \times \beta}^2[a; b], \quad F(t) \in \mathbb{L}_{\alpha \times \beta}^2[a; b];$$

$\mathcal{L}Z(\cdot)$ – лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \mathbb{D}_{\alpha \times \beta}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{\mu \times \nu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ – довільні натуральні числа. Матрична крайова задача (1), (2) узагальнює традиційні постановки задач для інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма [1, 2]. Розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи (1) представимо у вигляді

$$Z(t) = \int_a^t \Phi(s) C_0 \Psi(s) ds + C_1 + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \int_a^t F(s) ds,$$

де

$$C_0 := \int_a^b \left[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s) \right] ds \in \mathbb{R}^{\gamma \times \beta}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

– невідомі сталі матриці, для знаходження яких приходимо до матричного рівняння типу Сильвестра [3]

$$C_0 - \int_a^b A(t) \int_a^t \Phi(s) C_0 \Psi(s) ds dt - \int_a^b A(t) C_1 dt - \int_a^b A(s) \Phi(s) C_0 \Psi(s) ds = \mathcal{B}; \quad (3)$$

тут

$$\mathcal{B} := \int_a^b \left[A(s)\mathcal{F}(s) + B(s)F(s) \right] ds \in \mathbb{R}^{\gamma \times \beta}$$

– стала матриця.

2. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші.

Визначимо оператор [3]

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}\mathcal{B} : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n},$$

який ставить у відповідність матриці $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор-стовпець $\mathcal{M}\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, складений з n стовпців матриці \mathcal{B} , а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A} : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ матрицю $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Позначимо $\Theta^{(j)} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \beta}$, $j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma$ – природний базис [4] простору $\mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$, а також

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha \cdot \beta$$

– природний базис простору $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, при цьому задача про знаходження розв'язку рівняння (1) приводить до задачі про знаходження векторів $\xi \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}$ и $\zeta \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}$, компоненти яких визначають розкладання матриць

$$C_0 = \sum_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \Theta^{(j)} \xi_j, \quad C_1 = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} \zeta_j, \quad \xi_j, \zeta_j \in \mathbb{R}^1, \quad c := \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta + \beta\gamma}.$$

У нових позначеннях, рівняння (3) набуває вигляду

$$\mathcal{D}c = \mathcal{M}\mathcal{B}, \quad \mathcal{D} := [\mathcal{D}_0; \mathcal{D}_1], \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 := \left[\mathcal{D}_0^{(j)} \right]_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \beta \cdot \gamma}, \quad \mathcal{D}_0^{(j)} := \mathcal{M}\Theta^{(j)} - \int_a^b A(s)\Phi(s)\Theta^{(j)}\Psi(s) ds - \\ - \mathcal{M} \int_a^b A(t) \int_a^t \Phi(s)\Theta^{(j)}\Psi(s) ds dt, \end{aligned}$$

а також

$$\mathcal{D}_1 := \left[\mathcal{D}_1^{(j)} \right]_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \alpha \cdot \beta}, \quad \mathcal{D}_1^{(j)} := -\mathcal{M} \int_a^b A(t)\Xi^{(j)} dt$$

– сталі матриці. Позначимо $P_{\mathcal{D}^*} \in \mathbb{R}^{\beta\gamma \times \beta\gamma}$ і $P_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{(\alpha+\gamma)\beta \times (\alpha+\gamma)\beta}$ матриці-ортопроектори:

$$P_{\mathcal{D}^*} : \mathbb{R}^{\beta\gamma} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}^*), \quad P_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^{\alpha\beta + \beta\gamma} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}^*).$$

За умови [1, 3, 14]

$$P_{\mathcal{D}^*}\mathcal{M}\mathcal{B} = 0 \quad (5)$$

загальний розв'язок рівняння (4)

$$c = \mathcal{D}^+\mathcal{M}\mathcal{B} + P_{\mathcal{D}_\rho}c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

визначає загальний розв'язок

$$C_0 = C_0(\mathcal{B}) + C_0(c_\rho), \quad C_0(\mathcal{B}) := \mathcal{M}^{-1} \left[\xi(\mathcal{B}) \right], \quad C_0(c_\rho) := \mathcal{M}^{-1} \left[\xi(c_\rho) \right],$$

$$C_1 = C_1(\mathcal{B}) + C_1(c_\rho), \quad C_1(\mathcal{B}) := \mathcal{M}^{-1} \left[\zeta(\mathcal{B}) \right], \quad C_1(c_\rho) := \mathcal{M}^{-1} \left[\zeta(c_\rho) \right]$$

матричного рівняння типу Сильвестра (3); тут

$$\xi(\mathcal{B}) := (I_{\beta\gamma} \quad O) \mathcal{D}^+\mathcal{M}\mathcal{B}, \quad \xi(c_\rho) := (I_{\beta\gamma} \quad O) P_{\mathcal{D}_\rho}c_\rho,$$

$$\zeta(\mathcal{B}) := (O \quad I_{\alpha\beta}) \mathcal{D}^+\mathcal{M}\mathcal{B}, \quad \zeta(c_\rho) := (O \quad I_{\alpha\beta}) P_{\mathcal{D}_\rho}c_\rho;$$

матриця $P_{\mathcal{D}_\rho} \in \mathbb{R}^{(\alpha+\gamma)\beta \times \rho}$ складена з ρ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{D}}$.

Лемма. *За умови (5) загальний розв'язок*

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + \mathcal{K} \left[F(s) \right] (t), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

задачі Коші $Z(a) = C_1(c_\rho)$ для рівняння (1) визначає узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші

$$\mathcal{K} \left[F(s) \right] (t) := \int_a^t \Phi(s) C_0(\mathcal{B}) \Psi(s) ds + C_1(\mathcal{B}) + \mathcal{F}(t);$$

тут

$$W(t, c_\rho) := C_1(c_\rho) + \int_a^t A(s) \Phi(s) C_0(c_\rho) \Psi(s) ds, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

– загальний розв'язок задачі Коші $Z(a) = 0$ для однорідної частини рівняння (1).

3. Узагальнений оператор Гріна інтегрально-диференціальної крайової задачі.

Позначимо

$$\Theta_\rho^{(j)} \in \mathbb{R}^\rho, \quad j = 1, 2, \dots, \rho$$

– природний базис простору \mathbb{R}^ρ . Підставляючи розв'язок рівняння (1) у крайову умову (2), приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$c_\rho = \sum_{j=1}^{\rho} \Theta_\rho^{(j)} \xi_j \in \mathbb{R}^\rho, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \rho$$

матричного рівняння типу Сильвестра [3, 6, 7]

$$LW(\cdot, c_\rho) + L\mathcal{K} \left[F(s) \right] (\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (6)$$

В критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умови (5) і [3, 7]

$$P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - L\mathcal{K} \left[F(s) \right] (\cdot) \right\} = 0 \quad (7)$$

розв'язок матричного рівняння (5) визначає вектор $c_\rho = c_\rho(c_r) + c_\rho(\mathcal{A}, F)$, де

$$c_\rho(\mathcal{A}, F) := \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - L\mathcal{K} \left[F(s) \right] (\cdot) \right\}, \quad c_\rho(c_r) := P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*} - (\mu \cdot \nu \times \mu \cdot \nu)$ – матриця-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu} \rightarrow N(\mathcal{Q}^*)$, де

$$\mathcal{Q} := \left[\mathcal{Q}_i \right]_{j=1}^{\rho} \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times \rho}, \quad \mathcal{Q}_j := \mathcal{M} \left\{ L\mathcal{M}^{-1} \left[W(\cdot, \Theta_{\rho}^{(j)}) \right] \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, \rho;$$

матриця $P_{\mathcal{Q}_r}$ складена з r лінійно-незалежних стовпців $(\rho \times \rho)$ – матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$; матриця $P_{\mathcal{Q}_d}^*$ складена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. Таким чином, в критичному випадку, за умови (5) і (7) розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), що задовольняє крайовій умові (2)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t) := W(t, c_{\rho}(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K} \left[F(s) \right] (t)$$

і загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2)

$$W(t, c_r) := C_1(c_{\rho}(c_r)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_{\rho}(c_r))\Psi(s) ds;$$

тут

$$W(t, c_{\rho}(\mathcal{A}, F)) := C_1(c_{\rho}(\mathcal{A}, F)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_{\rho}(\mathcal{A}, F))\Psi(s) ds.$$

Таким чином, доведена наступна достатня умова розв'язності матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), що задовольняє крайовій умові (2).

Теорема. В критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умови (5) і (7), розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), який задовольняє крайовій умові (2)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t) := W(t, c_{\rho}(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K} \left[F(s) \right] (t)$$

і загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2)

$$W(t, c_r) := C_1(c_{\rho}(c_r)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_{\rho})\Psi(s) ds;$$

тут

$$W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) := C_1(c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho(\mathcal{A}, F))\Psi(s) ds,$$

– загальний розв’язок однорідної частини крайової задачі (1), (2) та

$$\mathcal{K}\left[F(s)\right](t) := \int_a^t \Phi(s)C_0(\mathcal{B})\Psi(s) ds + C_1(\mathcal{B}) + \mathcal{F}(t);$$

– узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для лінійної матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1).

Знайдені умови розв’язності (5) і (7), а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), (2) узагальнюють традиційні результати для нетерових крайових задач [1, 2].

Приклад 1. Вимогам доведеної теореми задовольняє задача про побудову 2π -періодичних розв’язків матричної інтегрально-диференціальної системи

$$Z'(t) = \Phi(t) \int_a^b \left[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s) \right] \Psi(t) ds + F(t), \quad (8)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \\ 0 & \cos t \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{3 \times 2}$, а також

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Theta_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{2 \times 2}$; при цьому

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & \pi & -\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 1 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$P_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{\mathcal{D}_\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, то умова (5) виконана. Матриці

$$C_0(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0(c_\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1(c_\rho) = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}$$

визначають загальний розв'язок

$$W(t, c_\rho) = C_1(c_\rho), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^6$$

задачі Коші $Z(0) = 0$ для однорідної частини рівняння (8), а також узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші

$$\mathcal{K} \left[F(s) \right] (t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t - \pi \sin^2 t & \pi \cos t \sin t \\ (1 + \pi \cos t) \sin t & 1 - \cos t + \pi \sin^2 t \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\mathcal{Q} = 0$, $\mathcal{A} = 0$ і $L\mathcal{K}[F(s)](\cdot) = 0$, то умова (7) виконана, при цьому розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром, який задовольняє крайовій умові (8)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^6$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t) = \mathcal{K} \left[F(s) \right] (t)$$

і загальний розв'язок $W(t, c_r) = C_1(c_\rho)$ однорідної частини крайової задачі (8).

У некритичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) умова (7) виконується для будь-яких неоднорідностей крайової задачі (1), (2), при цьому розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), який задовольняє крайовій умові (2) визначає наступне твердження.

Наслідок. У некритичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) за умови (5) розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), який задовольняє крайовій умові (2)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t) := W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K} \left[F(s) \right] (t)$$

та загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2)

$$W(t, c_r) := C_1(c_\rho(c_r)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho)\Psi(s) ds.$$

Приклад 2. Вимогам доведеного наслідку задовольняє задача про побудову антиперіодичних розв'язків матричної інтегрально-диференціальної системи (8).

Загальний розв'язок $W(t, c_\rho)$, $c_\rho \in \mathbb{R}^6$ задачі Коші $Z(0) = 0$ для однорідної частини рівняння (8), а також узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $\mathcal{K}[F(s)](t)$ були знайдені в прикладі 1. Оскільки $\mathcal{Q} = 2I_6$, $\mathcal{A} = 0$ і $L\mathcal{K}[F(s)](\cdot) = 0$, то єдиний розв'язок

$$Z(t) = G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t)$$

матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром, який задовольняє крайовій умові $Z(0) + Z(2\pi) = 0$, визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t) = \mathcal{K} \left[F(s) \right] (t)$$

антиперіодичної крайової задачі (8).

Запропоновані умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі (1), (2) для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1) узагальнюють умови розв'язку і конструкцію узагальненого оператора Гріна інтегрально-диференціальної крайової задачі [2, 8], а також матричної крайової задачі [9]. Крім того, аналогічні умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1)

можуть бути отримані для аналогічної крайової задачі в абстрактних просторах [1, 10]. Запропонована схема дослідження крайових задач матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1) аналогічно [8] може бути перенесена на нелінійні інтегрально-диференціальні системи типу Фредгольма з виродженим ядром, а також аналогічно [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] — на матричні крайові задачі для інтегрально-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром, що містять диференціально-алгебраїчний оператор. З іншого боку, у разі нерозв’язності матричні крайові задачі для інтегрально-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром можуть бути регуляризовані аналогічно [18, 19].

Цитована література

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. *Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегродиференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, № 11. – С. 1576–1579.
3. *Чуйко С.М.* О решении линейных матричных уравнений // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2015. – 29. – С. 27–33.
4. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука. – 1984. – 318 с.
5. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – 210, № 1. – P. 9–21.
6. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – 50, № 8. – P. 1162–1169.
7. *Чуйко С.М.* О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник. – 2015. – 16, вып. 1. – С. 52–66.
8. *Boichuk A.A., Holovats'ka I.A.* Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – 203, № 3. – P. 306–321.
9. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equations. – 2001. – 37, № 4. – P. 464–471.
10. *Chuiko S.M.* On solvability of linear matrix boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – 230, № 5. – P. 799–801.
11. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. – San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. – 1980. – 178 p.
12. *Chuiko S.M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. – 2015. – 56, № 4. – P. 752–760.
13. *Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – 53, № 6. – P. 777–788.
14. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – 210, № 1. – P. 9–21.
15. *Chuiko S.M.* Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics. – 2016. – 60, № 8. – P. 64–73.
16. *Chuiko S.M.* Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – 38 (2). – P. 236–244.
17. *Chuiko S.M.* On the solvability of a matrix boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – 232, № 5. – P. 794–798.
18. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

19. *Chuiko S.M.* On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – 220, № 5. – P. 591–602.

References

1. *Boichuk, A. A., Samoilenko, A. M.* (2016). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). Berlin; Boston: De Gruyter.
2. *Samoylenko, A.M., Boychuk, O.A., Krivosheya, S.A.* (1996). Krayovi zadachi dlya sistem liniy nih integro-diferentsialnih rivnyan tipu Fredgolma z virozdhenim yadrom. Ukr. mat. zhurn., 48, No. 11, pp. 1576–1579 (in Ukrainian).
3. *Chuiko, S.M.* (2015). O reshenii lineynykh matrichnykh uravneniy // Visnik Harkivskogo natsionalnogo universitetu imeni V.N. Karazina. Seriya: Matematika, prikladna matematika i mehanika, 29, pp. 27–33 (in Russian).
4. *Voevodin, V.V., Kuznetsov, Yu.A.* (1984). Matritsy i vyichisleniya. Moscow: Nauka (in Russian).
5. *Chuiko, S.M.* (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), 210, No. 1, pp. 9–21.
6. *Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A.* (1998). Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. Ukrainian Mathematical Journal, 50, No. 8, pp. 1162–1169.
7. *Chuiko, S.M.* (2015). O reshenii obobschennogo matrichnogo uravneniya Silvestra. Chebyshevskiy sbornik, 16, No. 1. pp. 52–66 (in Russian).
8. *Boichuk, A.A., Holovats'ka, I.A.* (2014). Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations. Journal of Mathematical Sciences. 203, No. 3, pp. 306–321.
9. *Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A.* (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. Differential Equations. 37, No. 4, pp. 464–471.
10. *Chuiko, S.M.* (2018). On solvability of linear matrix boundary-value problem. Journal of Mathematical Sciences. 230, No. 5, pp. 799–801.
11. *Campbell, S.L.* (1980). Singular Systems of differential equations. San Francisco, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program.
12. *Chuiko, S.M.* (2015). The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem. Siberian Mathematical Journal. 56, No. 4. pp. 752–760.
13. *Boichuk, A.A., Pokutnyi, A.A., Chistyakov, V.F.* (2013). Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 53, No. 6, pp. 777–788.
14. *Chuiko, S.M.* (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). 210, No. 1, pp. 9–21.
15. *Chuiko, S.M.* (2016). Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation. Russian Mathematics. 60, No. 8. pp. 64–73.
16. *Chuiko, S.M.* (2017). Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem. Lobachevskii Journal of Mathematics. 38 (2), pp. 236–244.
17. *Chuiko, S.M.* (2018). On the solvability of a matrix boundary-value problem. Journal of Mathematical Sciences, 232, No. 5, pp. 794–798.
18. *Tihonov, A.N., Arsenin, V.Ya.* (1986). Metody resheniya nekorrektnykh zadach. Moscow: Nauka (in Russian).
19. *Chuiko, S.M.* (2017). On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem. Journal of Mathematical Sciences. 220, No. 5, pp. 591–602.

S. M. Chuiko, O. S. Chuiko, V. O. Chechetenko

Green's operator of a matrix integral-differential boundary value problem.

The conditions of solvability and construction of the generalized Green operator of the linear boundary value problem for a matrix integral-differential system of the Fredholm type with a degenerate kernel

were found. The current interest of studying the theory of boundary value problems for linear integral-differential equations is associated with numerous applications in problems of mechanics, aerodynamics, recovery of parameters, and also the theory of oscillations. The original solvability conditions and construction of a general solution of the Sylvester type matrix equation were used to solve the matrix integral-differential boundary value problem. In this work a pseudo-inversion apparatus (by Moore–Penrose) of the matrix [1], the construction of generalized Green operators constructed in the works of A. M. Samoilenko and O. A. Boichuk [1] and methods for solving the Lyapunov and Sylvester matrix equations constructed in the work of O. A. Boichuk, S. A. Krivosheya [6] and S. M. Chuiko [7, 12] are basically used. The proposed conditions of solvability and construction of a generalized Green operator of the boundary value problem for the matrix integral-differential system of the Fredholm type with a degenerate kernel, generalize the conditions of solvability and construction of a generalized Green operator of the integral-differential boundary value problem [2, 8], and of the matrix boundary value problem [9]. In addition, similar conditions of solvability, and construction of a generalized Green operator of a matrix integral differential system of the Fredholm type with a degenerate kernel, can be obtained for a similar boundary value problem in abstract spaces [1, 10]. The proposed scheme of studying the boundary value problems of the matrix integral differential system of the Fredholm type with a degenerate kernel (1) [8] can be transferred analogously to nonlinear integral-differential systems of the Fredholm type degenerate kernel, and similarly [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] can be transferred on matrix boundary value problems for integral-differential systems of the Fredholm type with degenerate kernel containing differential-algebraic operator. On the other hand, in case of unsolvability of matrix boundary value problems for integral-differential systems of the Fredholm type with a degenerate kernel can be analogously regularized [18, 19].

Keywords: *Green's operator, matrix integral-differential system, boundary value problem.*

С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, В. А. Чечетенко

Оператор Грина матричной интегрально-дифференциальной задачи.

Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной краевой задачи для матричной интегрально-дифференциальной системы типа Фредгольма с вырожденным ядром. Актуальность изучения теории краевых задач для линейных интегрально-дифференциальных уравнений связана с многочисленными приложениями в задачах механики, аэродинамики, восстановление параметров, а также теории колебаний. Для решения матричной интегрально-дифференциальной краевой задачи применены оригинальные условия разрешимости, а также конструкция общего решения матричного уравнения типа Сильвестра. В работе существенно используется аппарат псевдообращения (по Муру–Пенроузу) матриц [1], конструкции обобщенных операторов Грина, построенные в работах А. М. Самойленко и А. А. Бойчука [1] и методы решения матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра, построенные в работах А. А. Бойчука, С. А. Кривошеи [6] и С. М. Чуйко [7, 12]. Предложенные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина краевой задачи для матричной интегрально-дифференциальной системы типа Фредгольма с вырожденным ядром обобщают условия разрешимости и конструкцию обобщенного оператора Грина интегрально-дифференциальной краевой задачи [2, 8], а также матричной краевой задачи [9]. Кроме того, аналогичные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина матричной интегрально-

дифференциальной системы типа Фредгольма с вырожденным ядром могут быть получены для аналогичной краевой задачи в абстрактных пространствах [1, 10]. Предложенная схема исследования краевых задач матричной интегрально-дифференциальной системы типа Фредгольма с вырожденным ядром (1) аналогично [8] может быть перенесена на нелинейные интегрально-дифференциальные системы типа Фредгольма с вырожденным ядром, а также аналогично [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] – на матричные краевые задачи для интегрально-дифференциальных систем типа Фредгольма с вырожденным ядром, содержащие дифференциально-алгебраический оператор. С другой стороны, в случае неразрешимости матричные краевые задачи для интегрально-дифференциальных систем типа Фредгольма с вырожденным ядром могут быть регуляризованы аналогично [18, 19].

Ключевые слова: оператор Грина, матричная интегрально-дифференциальная система, краевая задача.

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
chujko-slav@inbox.ru

Отримано 19.12.17

УДК 517.928

©2017. О. Д. Кичмаренко, Е. В. Платонова

ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

Асимптотические методы широко используются при исследовании задач оптимального управления. В статье рассматривается приближённый метод решения линейных задач оптимального управления с разрывным оптимальным управлением. В работе Тынянского и Сокола рассмотрена линейная задача оптимального быстродействия, в которой оптимальные управления будут разрывны. Ими предложен приближённый метод решения задачи оптимального быстродействия. На основании этого метода предложены способы построения множества допустимых управлений, которые обеспечивают гладкость оптимальных управлений и близость траекторий приближённой и исходной задач управления. Предложенный способ построения множества допустимых управлений позволяет построить приближение для множества в пространствах R^2 , R^3 и больших размерностей. Рассмотрен приближённый способ построения множества достижимости. Доказаны близость множеств достижимости и близость траекторий исходной и аппроксимирующей задач.

MSC: 34C29, 34B99, 49J15, 93C05, 34E99.

Ключевые слова: оптимальное управление, множество достижимости, асимптотические методы, принцип максимума

1 Введение

При конструировании систем автоматического управления возникает задача определения оптимального программного управления, которое реализует движение системы в оптимальном (в соответствии с некоторым критерием) режиме, а понимая законы управления, можно разработать некоторые управляющие устройства, обеспечивающие движение системы по траекториям близким к оптимальным.

Система дифференциальных уравнений с малым параметром является математической моделью сложных процессов, содержащих элементы с существенно различными инерционными свойствами. Асимптотические методы широко используются при исследовании систем с малым параметром. Строгое обоснование применения метода усреднения к дифференциальным уравнениям с малым параметром представлено в работах Крылова и Боголюбова [1, 2]. Идеи применения метода усреднения для задач оптимального управления впервые высказал Н. Н. Моисеев, определив два основных подхода [3]: первый – усреднение краевой задачи принципа максимума Понтрягина, второй – усреднение уравнений управляемого движения.

Реализация первого подхода, с одной стороны, позволяет получить асимптотически оптимальное управление, но, с другой, сопряжена с реализацией схемы усреднения краевой задачи с разрывной правой частью, которая возникает из-за природы управляющих функций: как правило, они являются разрывными. Метод

усреднения краевых задач с разрывной правой частью был обоснован в работах В. А. Плотникова и его учеников [4]. Но всё же эти схемы не предполагали перехода к непрерывной задаче.

Поэтому представляется интересным для задач оптимального управления с разрывными управляющими функциями построение соответствующей задачи оптимального управления с непрерывными функциями управления таким образом, чтобы траектории этих систем были близкими.

В статье приведены несколько аппроксимаций множеств допустимых управлений, которые позволяют перейти к задачам с гладким оптимальным управлением, доказана близость множеств достижимости исходной и полученной систем.

2 Постановка задачи

Рассматривается линейная задача оптимального управления объектом, движение которого описывается системой дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad u \in U. \quad (1)$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in U \subset \text{conv}(R^s)$ – множество допустимых управлений, которое является выпуклым компактом, содержащим начало координат; $A(t)$, $B(t)$ – матрицы, удовлетворяющие условиям:

A1) матрицы $A(t)$, $B(t)$ аналитические, $t \in [t_0, \infty]$;

A2) матрица $B(t)$ – обратима, $t \in [t_0, \infty]$.

В качестве класса допустимых управлений принимается класс измеримых ограниченных функций $u(t)$, зависящих от времени $t \in R^1$ и принимающих значения в U .

Будем рассматривать решение системы (1) на интервале $[t_0 = 0, T]$, где $T > 0$ – некоторый известный параметр.

Поставим в соответствие системе (1) следующую систему:

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u, \quad u \in U_k, \quad (2)$$

где множество U_k удовлетворяет условиям:

B1) множество U_k – сильно выпуклый компакт, содержащий начало координат;

B2) граница ∂U_k множества U_k бесконечно гладкая;

B3) для некоторого $\varepsilon_1 \leq 0$ выполняется $h(U_k, U) \leq \varepsilon_1$ ($h(\cdot, \cdot)$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами).

В данной работе рассмотрены вопросы близости траекторий и множеств достижимости систем (1) и (2), а также приведены несколько примеров построения множества U_k .

Построение множества U_k возможно в силу следующей леммы:

Лемма. [6] *Любой выпуклый компакт, содержащий начало координат, с любой степенью точности можно приблизить множеством со свойствами B1) и B2).*

В работе Н. Т. Тынянского и В. А. Сокола [6] показано, что для системы (2), удовлетворяющей условиям B1), B2) (для множества допустимых управлений) и A1), A2) (для матриц $A(t)$ и $B(t)$), оптимальное управление, с помощью которого осуществляется переход из точки x_0 в начало координат, бесконечно дифференцируемо по t .

3 Построение аппроксимаций для множества допустимых управлений

Пусть множество допустимых управлений системы (1) имеет вид:

$$U = [-\alpha_1, \alpha_1] \times [-\alpha_2, \alpha_2] \times \dots \times [-\alpha_s, \alpha_s], \alpha_i > 0, i = 1, \dots, s.$$

Рассмотрим сначала случай $s=2$, т.е. $U \subset R^2$.

Множество допустимых управлений $U = [-\alpha_1, \alpha_1] \times [-\alpha_2, \alpha_2]$ – выпуклый компакт содержащий начало координат, по лемме 1 его можно приблизить множеством U_k . Зададим, например, границу U_k следующим образом:

$$\partial U_k = \begin{cases} \{ \alpha_1(1 - \sin^{2k+1} \varphi), \alpha_2(1 - \cos^{2k+1} \varphi) \}, & 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ \{ \alpha_1(-1 + \sin^{2k+1} \varphi), \alpha_2(1 + \cos^{2k+1} \varphi) \}, & \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \\ \{ \alpha_1(-1 - \sin^{2k+1} \varphi), \alpha_2(-1 - \cos^{2k+1} \varphi) \}, & \pi < \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ \{ \alpha_1(1 + \sin^{2k+1} \varphi), \alpha_2(-1 + \cos^{2k+1} \varphi) \}, & \frac{3\pi}{2} < \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Полученное множество U_k является сильно выпуклым компактом, содержащим начало координат, его граница – бесконечно гладкая.

Например, для $U = [-1, 1] \times [-1, 1]$, при $k = 3$ множества U, U_k имеют вид, как на Рис.1.

Найдём расстояние по Хаусдорфу между множествами U и U_k .

$$h(U, U_k) = \min\{d > 0 | S_d(U_k) \subset U, S_d(U) \subset U_k\} = d_{\min}$$

$$h(U, U_k) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot 2^{-2k + 1/2}.$$

Можно выбрать k^0 так, чтобы выполнялось $h(U, U_{k^0}) \leq \varepsilon_0$, для любого заданного ε_0 :

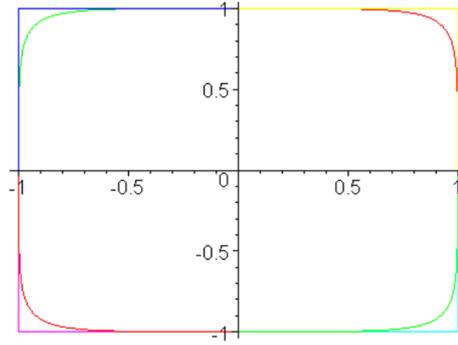


Рис. 1. Множество U , U_k при $k = 3$

$$k \geq 0.5 \cdot \left(-2 \cdot \frac{\ln \varepsilon_0 - 0.5 \cdot \ln(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{\ln 2} - 1 \right). \quad (3)$$

Таким образом, если $k^0 = 0.5 \cdot \left(-2 \cdot \frac{\ln \varepsilon_0 - 0.5 \cdot \ln \beta}{\ln 2} - 1 \right)$, где $\beta = f(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, то для любого $k \geq k^0$ выполняется $h(U, U_k) \leq \varepsilon_0$.

Таким же способом можно задать множество U_k для случая $s = 3, 4, \dots$

4 Построение множества достижимости для линейных систем

Пусть уравнение движения управляемого объекта имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ u &\in U \subset \text{conv}(R^s), \quad x \in R^n, \quad x(t_0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Для системы (4) поставим следующую задачу оптимального управления. Найти допустимое управление $u(t) \in U$ и соответствующую ему траекторию $x(t)$ системы (4), на которых достигает своего максимального значения функционал:

$$J[u] = c^T x(T) \rightarrow \max_{x \in R^n}. \quad (5)$$

Здесь $T > t_0$ – фиксированный момент окончания процесса, c – заданный ненулевой вектор, причем $\|c\| > 0$.

Пусть эта задача решена, и её решение есть пара функций – оптимальное управление $u^*(t)$ и оптимальная траектория $x^*(t)$. Тогда получаем оптимальное значение критерия (5):

$$J^* = c^T x^*(T) = \max_{x \in D(T, t_0, x_0)} (c, x)^*. \quad (6)$$

Выражение справа в (6) есть ни что иное, как опорная функция множества достижимости системы (4) из $t_0 = 0$ к моменту времени T , т.е.

$$C(D(T, t_0, x_0), c) = J^*.$$

Таким образом, решение задачи (4), (5) позволяет определить опорную функцию множества достижимости $D(T, t_0, x_0)$ для вектора c и построить опорную гиперплоскость к этому множеству в точке $x^*(T)$. Уравнение этой гиперплоскости $(c, x) = (c, x^*(T))$.

Решая задачу (4) для всевозможных векторов c , нормированных условием $\|c\| = 1$, будем получать при каждом c точку $x^*(T)$, лежащую на границе множества достижимости. Таким способом можно построить границу множества достижимости.

Пусть множество допустимых управлений имеет вид $U = [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1]$.

Для системы (4) с функционалом (5) оптимальное управление в соответствии с принципом максимума будет иметь вид:

$$u(t) = \begin{cases} \text{sign}(B(t)\psi(t))_i, & B(t)\psi(t) \neq 0 \\ [-1, 1], & B(t)\psi(t) = 0, \end{cases}$$

где $\phi(t)$ – решение краевой задачи сопряжённой системы

$$\dot{\phi} = -A^T(t)\phi, \quad \phi(T) = c.$$

Таким образом, для некоторых задач оптимальное управление может быть разрывным, и мы получим систему дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, для которой неприменима классическая теория дифференциальных уравнений. Поэтому интерес представляет переход к задачам, в которых оптимальное управление будет гладким или непрерывным. Покажем близость траекторий и множеств достижимости непрерывной задачи к траекториям и множествам достижимости задачи (4), (5).

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(t)y + B(t)u_k, \\ u_k &\in U_k \subset \text{conv}(R^s), \quad y \in R^n, \quad y(t_0) \in M_0, \quad y(T) \in M_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$J[u_k] = c^T y(T) \rightarrow \max_{y \in R^n}, \quad (8)$$

где $T > t_0$ – фиксированный момент окончания процесса, c – заданный ненулевой вектор, причем $\|c\| > 0$, как и в задаче (4), (5).

Если множество допустимых управлений U_k будет удовлетворять условиям В1), В2) и В3), то оптимальное управление, с помощью которого будет осуществляться переход из точки x_0 в начало координат, будет бесконечно дифференцируемо по t . Следующая теорема устанавливает близость между множествами достижимости систем (4) и (7).

Теорема. Пусть для систем (4) и (7) выполнены условия A1) и A2), а множества U_k удовлетворяют условиям B1) и B2).

Тогда для любых $\eta > 0$ и $T > t_0$ существуют такие $\delta(\eta, T) > 0$ и $k^0(\delta, \eta, T) \geq 0$, что для всех $k \geq k^0$ и $t_0 \leq t \leq T$ справедливы следующие неравенства:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta \tag{9}$$

$$h(D(t, t_0, x_0), D_k(t, t_0, y_0)) < \eta, \tag{10}$$

где $x(t), y(t)$ – траектории систем (4) и (7), соответствующие управлениям $u \in U$ и $u_k \in U_k$ соответственно, $D(t, t_0, x_0)$ и $D_k(t, t_0, y_0)$ – множества достижимости в момент времени t систем (4) и (7) соответственно, при $x_{t_0} = y_{t_0}$ и $h(U, U_k) < \delta$.

Доказательство. По определению множества достижимости

$$D(t, t_0, x_0) = \{x(t) | \dot{x} = A(t)x + B(t)u, x(t_0) = x_0, u \in U\}$$

$$D_k(t, t_0, y_0) = \{y(t) | \dot{y} = A(t)y + B(t)u_k, y(t_0) = y_0, u_k \in U_k\}.$$

Заменим системы (4) и (7) соответствующими интегральными уравнениями.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t [A(s)x(s) + B(s)u(s)] ds \tag{11}$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t [A(s)y(s) + B(s)u_k(s)] ds. \tag{12}$$

Вычтем (12) из (11), и воспользуемся тем, что $x(t_0) = y(t_0)$.

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t [A(s)x(s) - A(s)y(s)] ds + \int_{t_0}^t [B(s)u(s) - B(s)u_k(s)] ds.$$

Тогда,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|x(s) - y(s)\| ds + \int_{t_0}^t \|B(s)\| \|u(s) - u_k(s)\| ds. \tag{13}$$

Потребуем чтобы $h(U, U_k) < \delta$. Тогда, как было показано выше, для любого $\delta > 0$ можно выбрать k^0 так, что для любого $k \geq k^0$ будет выполняться $h(U, U_{k^0}) < \delta$.

Например, для $U = [-\alpha_1, \alpha_1] \times \dots \times [-\alpha_n, \alpha_n]$ можно выбрать k^0 равным $k^0 = 0.5 \cdot \left(-2 \cdot \frac{\ln \delta - 0.5 \cdot \ln \beta}{\ln 2} - 1\right)$, где $\beta = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$.

Тогда слева в (13) во втором интеграле для любого $u(s) \in U$ существует $u_k(s) \in U_k$ такое, что $\|u - u_k\| \leq \delta$, и наоборот. Поэтому

$$\int_{t_0}^t \|B(s)\| \|u(s) - u_k(s)\| ds \leq \delta \int_{t_0}^t \|B(s)\| ds \leq \delta \int_{t_0}^T \|B(s)\| ds = \delta \cdot \gamma$$

(13) примет вид: $\|x(t) - y(t)\| \leq \|A(s)\| \cdot \|x(s) - y(s)\| ds + \delta \cdot \gamma$.

Воспользуемся леммой Гронуолла–Беллмана

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta \cdot \gamma \cdot \exp \left\{ \int_{t_0}^{L\varepsilon^{-1}} \|A(s)\| ds \right\}.$$

Тогда можно выбрать $\delta(\eta, T) > 0$ и $k^0(\delta, \eta, T) \geq 0$ так, чтобы для любого $k \geq k_0$ выполнялось:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta \cdot \gamma \cdot \exp \left\{ \int_{t_0}^T \|A(s)\| ds \right\} < \eta.$$

Таким образом, оценка (9) выполнена.

То есть, мы получили, что для любых $\eta > 0$ и $T > t_0$ можно выбрать $\delta(\eta, T) > 0$ и $k^0(\eta, T, \delta)$ такие, что для любых $k \geq k^0$ и $t_0 \leq t \leq T$ выполняется и неравенство (10) $h(D(t, t_0, x_0), D_k(t, t_0, y_0)) < \eta$, при $x_{t_0} = y_{t_0}$ и $h(U, U_k) < \delta$.

Теорема доказана. \square

5 Выводы

Таким образом, в статье рассмотрен метод приближённого построения множества достижимости для задач оптимального управления. Рассмотрен случай задач с разрывным оптимальным управлением. Предложен способ построения множества допустимых управлений для приближённой задачи управления, обеспечивающий гладкость приближённого решения и близость к траекториям исходной задачи. Доказана близость множеств достижимости и траекторий исходной и приближённой систем.

Литература

1. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
3. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
4. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. – Киев–Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
5. Lee E.B., Markus L. Foundations of optimal control theory. – Krieger Pub Co, 1986.
6. Сокол В.А., Тынянский Н.Т. Приближённый метод решения линейной задачи оптимального быстрогодействия // Журнал выч. математики и мат. физики. – 1980. – №2.

References

1. Krylov, N.M., Bogoljubov N.N. (1937). Vvedenie v nelinejnuju mehaniku. K.: Izd-vo AN USSR, 363 p.
2. Bogoljubov, N.N., Mitropol'skij, Ju.A. (1974). Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij. M.: Nauka, 503 p.
3. Moiseev, N.N. (1981). Asimptoticheskie metody nelinejnoj mehaniki. M.: Nauka, 400 p.

4. Plotnikov, V.A. (1992). Metod usrednenija v zadachah upravljenja. Kiev–Odessa:Lybid', 188 p.
5. Lee, E.B., Markus, L. (1986). Foundations of optimal control theory. Krieger Pub Co.
6. Sokol, V.A., Tynjanskij, N.T. (1980). Priblizhjonnyj metod reshenija linejnoj zadachi optimal'nogo bystrodejstvija. Zhurnal vych. matematiki i mat. fiziki, No. 2.

О. Д. Кичмаренко, Е. В. Платонова

The construction of approximation of reach set for linear control problems.

Asymptotic methods are widely used in the study of optimal control problems. In this paper we consider an approximate method for solving linear optimal control problems with discontinuous optimal control. In the work of Tyniansky and Sokol, a linear problem of optimal speed is considered, in which optimal controls will be discontinuous. They proposed an approximate method for solving the optimal speed problem. Methods are proposed for constructing a set of admissible controls that ensure the smoothness of the optimal controls and the closeness of the trajectories of the approximate and original control problems, based on Tyniansky method. The proposed method for constructing the set of admissible controls allows us to construct an approximation for the set in the spaces R^2 , R^3 and higher dimensions. An approximate way of constructing the set of reach is considered. The proximity of sets of attainability and the proximity of trajectories of the initial and approximating problems is proved.

Keywords: *optimal control, set of reach, asymptotic methods, principle of maximum.*

О. Д. Кічмаренко, Є. В. Платонова

Побудова апроксимації множини досяжності для лінійних задач керування.

Асимптотичні методи широко використовуються при дослідженні задач оптимального керування. У статті розглядається наближений метод розв'язання лінійних задач оптимального керування з розривним оптимальним керуванням. В роботі Тинянського і Сокола розглянута лінійна задача оптимальної швидкодії, в якій оптимальні керування будуть розривні. Ними запропонований наближений метод розв'язання задачі оптимальної швидкодії. На підставі цього методу запропоновано способи побудови множини допустимих керувань, які забезпечують гладкість оптимальних керувань і близькість траєкторій наближеною і вихідної задач керування. Запропонований спосіб побудови множини допустимих керувань дозволяє побудувати наближення для множини в просторах R^2 , R^3 і більших розмірностей. Розглянуто наближений спосіб побудови множини досяжності. Доведено близькість множин досяжності і близькість траєкторій вихідної і апроксимуючої задач.

Ключові слова: *оптимальне керування, множина досяжності, асимптотичні методи, принцип максимуму.*

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова,
Одесса
olga.kichmarenko@gmail.com, jane.platonova@gmail.com

Получено 19.05.17