Наукове видання

ПРАЦІ
ІНСТИТУТУ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
І МЕХАНІКИ НАН УКРАЇНИ

Том 32

Підписано до друку 28.12.2018

Інститут прикладної математики і механіки
НАН України

84100, м. Слов'янск, вул. Добровольського, 1;
тел.: (0626) 66 55 00

Формат 60 x 84 1/8. Ум. адрук. арк. 10.
Друк лазерний. Зам № 5540. Тираж 100 прим.

Надруковано в ТОВ “ТехПринтЦентр”
Адреса: м. Слов'янск, вул. Батюка, 19,
тел.: +38 06262 3 20 99

Праці ІПММ НАН України, Том 32, 2018

Том 32
2018

ISSN 1683 - 4720

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
НАУК УКРАЇНИ

ПРАЦІ

ІНСТИТУТУ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ НАН УКРАЇНИ

Науковий збірник "Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України" публікує оригінальні статті в галузі фундаментальної та прикладної математики. Всі статті проходять рецензування міжнародною редакційною колегією.
Обсяг: 10 друк. арк.
Згідно Наказу Міністерства освіти і науки України від 04.04.2018 року № 326
збірник включено до Переліку наукових фахових видань України.

Адреса редколегії: 84100 Слов'янськ, вул. Добровольського, 1
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Тел. (0626) 66 55 00

Затверджено до друку Вченою радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України
10.12.2018 протокол № 12
Свідоцтво про реєстрацію: серія КВ № 22887-12787 ПР від 03.07.2017 р.

The journal "Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine" is devoted to the publication of original papers in pure and applied mathematics, and is reviewed and edited by an international editorial board.
Volume: 10 prints. the arch.
According to the Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated 04.04.2018 No. 326
the journal is included in the List of scientific professional editions of Ukraine

Editorial Address: 84100 Slovyansk, Dobrovolsky str., 1
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine
Tel. (0626) 66 55 00

Approved for publication by the Academic Council of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, December 10, 2018 protocol 12
Certificate of registration: series KB No. 22887-12787 ПР from 07.03.2017.

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Том 32

Слов'янськ, 2018

Заснований у 1997 р.

Праці інституту прикладної математики і механіки НАН України

ЗМІСТ

УДК 517.54
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-1

©2018. **А.К. Бахтин, И.Я. Дворак**

ЗАДАЧА ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ ПЛОСКОСТИ

В данной работе изучается одна известная проблема об описании экстремальных конфигураций, которые максимизируют произведение внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей следующего вида

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{1}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множестве всех систем взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, таких, что $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$.

MSC: 34N05.

Ключевые слова: *внутренний радиус, неналегающие области, n-лучевая система точек, "управляющий" функционал, квадратичный дифференциал.*

1. Введение.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$, $t \in \mathbb{R}^+$ — функция Жуковского. Пусть $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ [4,5].

Системой непересекающихся областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1,n}$.

Систему точек $A_n := \{ a_k \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1,n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi$.

Введем обозначения $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ рассмотрим следующий "управляющий" функционал:

$$\mathcal{M}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_k|.$$

В данной работе рассматривается задача об экстремизации функционала

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{1}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множестве всех систем взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, таких, что $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Следует отметить, что система круговых областей Λ_0, Λ_∞, Λ_k, $k=\overline{1,n}$ квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2-2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2, \tag{2}$$

представляет из себя систему взаимно непересекающихся областей, таких что $0 \in \Lambda_0$, $\infty \in \Lambda_\infty$, $\lambda_k \in \Lambda_k$, $\lambda_k = exp(\frac{2\pi(n-1)}{n})$, $k=\overline{1,n}$

При $\gamma = 1/2$ и $n \geqslant 2$ точная оценка для функционала (1) для систем непересекающихся областей была впервые получена в работе [6]. В работе [7] в случае односвязных областей была получена оценка функционала (1) при $\gamma \in (0, \frac{n^2}{8}]$, $n \geqslant 2$. Задача об оценке функционала (1) при начальных значениях натурального параметра n рассматривалась в [10, 11]. В работе [12] при $n \geqslant 7$ получили точные оценки функционала (1) для систем произвольных многосвязных областей при $\gamma \in (0, 0.08n^2)$ В данной работе улучшены оценки функционала (1) при $n \geq 6$ для больших интервалов значений параметра γ.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_6 = 4,64$, $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229$, $n \geq 7$. *Тогда для* $\gamma \in (0, \gamma_n]$, *любой* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *такой, что* $\mathcal{M}(A_n) = 1$ *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_0, B_k, B_∞ ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$), *справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)\, r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(B_k,a_k) \leqslant [r(\Lambda_0,0)\, r(\Lambda_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^n r(\Lambda_k,\lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k *и точки* 0, ∞, λ_k ($k=\overline{1,n}$, $n \geq 6$) *— соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (2).*

Доказательство. Применяя к системе точек $\{a_k\}_{k=1}^n$ и областей $\{B_k\}_{k=1}^n$ кусочно-разделяющее преобразования, развитое в [4, с. 120], [5, с. 48–50], аналогично работам [6, 9–11], получим неравенство

$$J_n(\gamma) \leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^n \Phi(\tau_k)\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \cdot \left[\prod_{k=1}^n \tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right]^{1/2},$$

где $\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} \cdot |1-\tau|^{-(1-\tau)^2} \cdot (1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$, $\tau \geqslant 0$, $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k=\overline{1,n}$.

Пусть

$$S(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2} \quad \text{и} \quad F(x) = \ln(S(x)).$$

$F(x)$ выпуклая функция на интервале $[0, x_0]$, $x_0 \approx 0,88441$. Далее, аналогично работе [6, 8] мы рассмотрим следующую экстремальную проблему

$$\prod_{k=1}^{n} F(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}.$$

Пусть $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ – произвольный экстремальный набор точек выше указанной задачи. Далее, следуя работе [8], получаем если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)}$, тогда

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}), \quad k, j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

$$F'(x) = 4x\ln(x) - 2(x-1)\ln|x-1| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$$

(см. Рис.1).

Учитывая соотношение (3) и то, что $\gamma \in (0, \gamma_n]$ покажем, что выполняется условие $x_k^{(0)} \in (0,\, x_0]$, $k = \overline{1, n}$, и $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Для этого, аналогично [12] введем следующие обозначения.

Пусть $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t < 0$, где y_0 – значение функции $y_0 = F''(x_0)$, где x_0 – корень уравнения $F''(x) = 0, y_0 \approx -1,0599$. Найдем решение уравнения $F'(x) = t$. Для $\forall t \in [y_0, 0)$ уравнение $F'(x) = t$ имеет два решения: $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, \infty]$ при $n \geq 6$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$. Тогда из условия (3) необходимо показать, что случай, когда $x_2(t) \in (x_0, \infty]$ невозможен при $\gamma \in (0, \gamma_n]$.

Предположим, что один из корней $x_k^{(0)}, k = \overline{1, n}$, принадлежит промежутку $(x_0, \infty]$. Тогда

$$\sum x_k^{(0)} = (n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)}.$$

С другой стороны обычное исследование графика функции $F'(x)$ показывает, что функция монотонно убывает на $(0, x_0]$ от $(\infty, y_0]$ и монотонно возрастает на $[x_0, \infty)$ от $[y_0, 0)$. График пересекает ось OX в точке $x \approx 0.5814$.

Тогда,

$$(n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)} > (n-1)\cdot 0.5814 + 0.8844 = 0.5814n + 0.303 = 2\sqrt{\gamma_n}.$$

Отсюда следует, что $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.0088n + 0.0229$. С другой стороны при $\gamma \in (0, \gamma_n]$

$$2\sqrt{\gamma} = (n-1)x_1^{(0)} + x_2^{(0)} \geq (n-1)\cdot 0.5814 + 0.8844 = 2\sqrt{\gamma_n} > 2\sqrt{\gamma}.$$

Полученное противоречие означает, что ни одна из точек $x_k^{(0)}$, при $\gamma \in (0, \gamma_n]$ не может принадлежать промежутку $(x_0, \infty]$. Отсюда из соотношения (3) приходим к заключению, что $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$.

Непосредственные вычисления величин $x_1(t) + x_2(t)$ представлены в таблице приведенной ниже. Теорема 1 доказана для $n > 6$ и все предыдущие доказательства будут справедливыми при $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$.

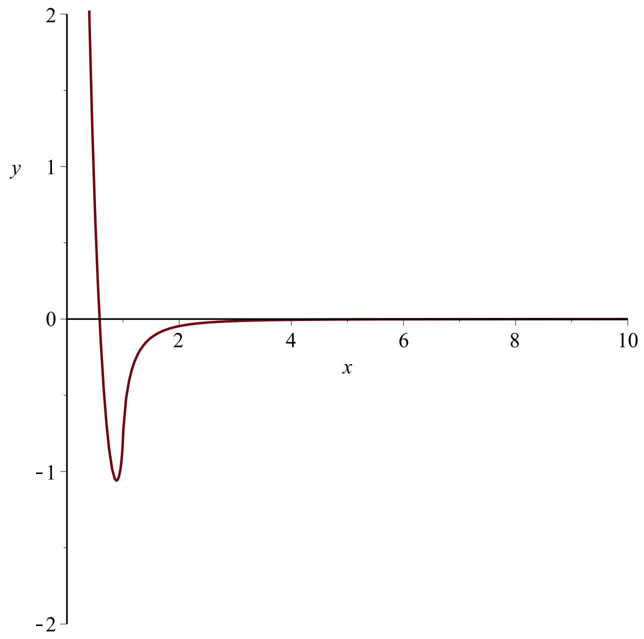

Рис. 1.

Из таблицы непосредственно следует, что $5x_1(t) + x_2(t) > 5x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$. С другой стороны $5x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) \geq 4.3093$. Полагая, что $2\sqrt{\gamma_6} = 4.3093$, получаем $\gamma_6 = 4.6425$. тогда ясно, что при $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$

$$2\sqrt{\gamma} = (n-1)x_1 + x_2 > 4.3093 = 2\sqrt{\gamma_6} \geq 2\sqrt{\gamma}.$$

Из полученого противоречия следует, что теорема 1 доказана для $n \geq 6$. $\square$

Следствие 1. Учитывая условия Теоремы 1 выполняется следующее неравенство

$$[r(B_0, 0)r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \left[\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)}}{\left|\frac{2\sqrt{\gamma}}{n} - 1\right|^{\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}-1\right)^2} \left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n} + 1\right)^{\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}+1\right)^2}} \right]^{\frac{n}{2}}.$$

Равенство достигаеться, если 0, ∞, a_k, и B_0, B_∞, B_k, $k = \overline{1,n}$, соответственно полюсы и круговые области квадратичного дифференциала (2).

Следствие 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 7$, $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_n = 0.0845n^2 + 0.088n + 0.0229$. Тогда для любых точек окружности $|a_k| = R$, $k = \overline{1,n}$, и любых попарно непересекающихся систем областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset$

$\mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, следующее неравенство будет справедливым

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)\, r(\Lambda_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k, и точки 0, ∞, λ_k, $k = \overline{1,n}$, соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dz^2 = -\frac{\gamma z^{2n} + (n^2 - 2\gamma)z^n + \gamma R^{2n}}{z^2(z^n - R^n)^2}\, dz^2.$$

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k) + x_2(t_k)$	$5x_1(t_k) + x_2(t_k)$
1	- 0.01	0.5828021018	3.260279515	3.843081617	3.260279515
2	- 0.11	0.5970820203	1.545735484	2.142817504	4.459745993
3	- 0.21	0.6122971332	1.293903211	1.906200344	4.279313313
4	- 0.31	0.6286014379	1.174953460	1.803554898	4.236439126
5	- 0.32	0.6302991009	1.166313092	1.796612193	**4.309320282**
6	- 0.33	0.6320098820	1.158091600	1.790101482	4.309587104
7	- 0.34	0.6337340285	1.150260011	1.783994040	4.310309421
8	- 0.35	0.6354717961	1.142792181	1.778263977	4.311462323
9	- 0.36	0.6372234490	1.135664453	1.772887902	4.313023433
10	- 0.37	0.6389892608	1.128855360	1.767844621	4.314972605
11	- 0.38	0.6407695144	1.122345376	1.763114890	4.317291680
12	- 0.39	0.6425645030	1.116116696	1.758681199	4.319964268
13	- 0.40	0.6443745303	1.110153049	1.754527579	4.322975564
14	- 0.41	0.6461999112	1.104439534	1.750639445	4.326312186
15	- 0.51	0.6653767445	1.058525923	1.723902668	4.289525479
16	- 0.61	0.6865478929	1.027618247	1.714166140	4.354501969
17	- 0.71	0.7103700492	1.007406764	1.717776813	4.440146228
18	- 0.81	0.7380052769	0.9961511698	1.734156447	4.548001416
19	- 0.91	0.7719538507	0.9775830704	1.749536921	4.667609454
20	- 1.01	0.8206625498	0.9420885500	1.762751100	4.801857804

Литература

1. *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – 5. – С. 159 – 245.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж.А.* Однолистные функции и конформные отображения. –М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Дубинин В.Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. // Владивосток “Дальнаука” ДВО РАН – 2009. – 390 с.
5. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1 (295). – С. 3–76.

6. *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48–66.
7. *Кузъмина Г.В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы// Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – **276**. – С. 253–275.
8. *Ковалев Л.В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – 2. – С. 96–98.
9. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту матем. НАН України. – 2008. – 308 с.
10. *Бахтин А.К., Денега И.В.* Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек // Теорія наближення функцій та суміжні питання / Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – Т. 8, № 1. – С. 12–21.
11. *Бахтін А.К., Бахтіна Г.П., Вьюн В.Є.* Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 141–152.
12. *Denega I.V., Targonskii A.L.* Separating problem on extermal decomposition of the complex plane // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 147–152.

References

1. Lavrent'ev, M.A (1934). On the theory of conformal mappings. *Travaux Inst. Physico-Math. Stekloff Acad. Sci. USSR*, *5*, 159-245.
2. Goluzin, G.M. (1969). *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable.* Translations of Mathematical Monographs, no. 26, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
3. Jenkins, J.A. (1958). *Univalent functions and conformal mapping.* Ergeb. Math. Grenzgeb. Neue Folge, vol. 18, Reihe: Moderne Funktiontheorie, Springer-Verlag.
4. Dubinin, V.N. (2009). *Capacities of condensers and symmetrization in geometric function theory of complex variables.* Dal'nayka, Vladivostok, 390 (in Russian).
5. Dubinin, V.N. (1994). Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Uspekhi Mat. Nauk*, *49*(1), 3-76 (in Russian). Translation in (1994) *Russian Math. Survey*, 49(1), 1-79.
6. Dubinin, V.N. (1988). The separating transformation of domains and problems on the extremal partition. *Analytical theory of numbers and theory of functions. Part 9, Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, *168*, 48-46 (in Russian). Translation in (1991) *J. Soviet Math.*, 53(3), 252-263.
7. Kuzmina, G.V. (2001). Problems of extremal decomposition of the Riemann sphere. *Analytical theory of numbers and theory of functions. Part 17, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 276*, 253-275 (in Russian). Translation in (2003) *J. Math. Sci. (N. Y.), 118*(1), 4880-4894.
8. Kovalev L.V. (1996). On the problem of extremal decomposition with free poles on a circle. *Dal'nevost. Mat. Sb., 2*, 96-98 (in Russian).
9. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Zelinskii, Yu.B. (2008). Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (in Russian).*
10. Bakhtin, A.K., Denega I.V. (2011). Some estimates of functionals for N-ray point systems. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 8*(1), 12-21 (in Russian).
11. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Vjun, V.E. (2014). On some inequalities in the theory of disjoint domains. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 11*(1), 141-152 (in Ukrainian).
12. Denega, I.V., Targonskii, A.L. (2017). Separating problem on extremal decomposition of the complex plane. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 14*(1), 147-152.

A.K. Bakhtin, I.Ya. Dvorak

The problem of extreme decomposition of the plane.

Considered here is one quite general problem about the description of extremal configurations maximizing the product of inner radii mutually non-overlapping domains the next following form:

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \qquad (1)$$

where $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – n-radial points system, B_0, B_∞, $\{B_k\}_{k=1}^n$ – set of systems of mutually disjoint domains, ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$), achieved for some configuration of domains B_0, B_k, B_∞ and points a_0, a_k, ∞, $k = \overline{1,n}$. The functional (1) evaluation for the first time was obtained in 1988 by V.M. Dubinin [6] for $\gamma = \frac{1}{2}$ и $n \geqslant 2$ for systems of disjoint domains using symmetrization method. A special case, when domains are univalent, was examined by G.V. Kuzmina in [7] After the result of V.M. Dubinin in the general formulation for the arbitrary multiply-concted domains was not until 2017. In 2017 in the work of I. Dengi, A. Targonsky [12] was the result for $\gamma_n = 0.08n^2$, $n \geq 7$. The result was obtained through a lower bound of $min_t(n-1)x_1 + x_2$, where $x_1(t)+x_2(t)$ is the equation $F'(x) = t$ solution, $F'(x) = 4x\ln(x) - 2(x-1)\ln|x-1| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$, $y_0 \leqslant t < 0$, $y_0 \approx -1,0599$. In this paper, a much better estimate of $min_t(n-1)x_1 + x_2$ was obtained through a lower bound with the specified parameters. On the basis of this, the article succeeded in obtaining an estimate of the maximum of the functional (1) over a larger interval of the parameter γ, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $n \geq 7$. Received the result for for any points of the circle $|a_k| = R$, $k = \overline{1,n}$, and any pairwise disjoint systems of domains B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$.

Keywords: *inner radius, non-overlapping domains, n-radial system of points, "control" functional, quadratic differential.*

О.К. Бахтін, І.Я. Дворак

Задача про екстремальне розбиття площини.

В даній роботі вивчається одна загальна проблема про описання екстремальних конфігурацій, які максимізують добуток внутрішніх радіусів областей, що не перетинаються наступного виду $J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$ при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множині всіх систем взаємно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \subset B_0 \subset \mathbb{C}$, $\infty \subset B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Ключові слова: *внутрішній радіус, області, що не перетинаються, n-променева система точок, "керуючий" функціонал, квадратичний диференціал.*

Институт математики НАН Украины, Киев
`dvorakinna@gmail.com`

Получено 04.11.2018

УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-2

©2018. **Л.В. Вигівська**

ЗАДАЧА ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНЕ РОЗБИТТЯ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ З ФІКСОВАНИМИ ПОЛЮСАМИ НА КОЛІ

Дана робота присвячена дослідженню однієї екстремальної задачі з фіксованими полюсами. Це задача про добуток внутрішніх радіусів взаємно неперетинних симетричних областей відносно точок на одиничному колі на деяку додатну степінь внутрішнього радіуса області відносно початку координат.

MSC: 30C75.

Ключові слова: *внутрішній радіус області, неперетинні області, фіксована система точок, розділяюче перетворення, квадратичний диференціал, функція Гріна.*

1. Вступ.

Задачі про екстремальне розбиття почали свій розвиток з роботи М.О. Лаврентьєва [1], який поставив та розв'язав задачу про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних областей. Екстремальними задачами для неперетинних областей з фіксованими полюсами в різні роки займались такі відомі математики як М.О. Лаврентьєв, Г. Грьотш, Г.М. Голузін, М.А. Лєбєдєв, П.П. Куфарев, А.Е. Фалес, Г.В. Кузьміна, В.М. Дубінін, Л.І. Колбіна, І.П. Мітюк, Ю.Є. Алєніцин, Дж.А. Дженкінс, М. Шиффер, П. Дюрен, З. Нехарі та ін.

2. Позначення та означення.

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — сфера Рімана. Нехай $r(B,a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, відносно точки $a \in B$. Внутрішній радіус області B пов'язаний з узагальненою функцією Гріна $g_B(z,a)$ області B наступними співвідношеннями

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \ln r(B,a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Набір точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}, \quad k = \overline{1,n}$ будемо називати $n-$ променевою системою точок. В роботі будемо розглядати такі a_k, що $|a_k| = 1, \quad k = \overline{1,n}$.

Нехай $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 2$.

Системою неперетинних областей називається скінченний набір довільних попарно неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, що $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k,m = \overline{1,n}$.

Автор висловлює подяку професору О.К. Бахтіну за постановку задачі та цінні зауваження при написанні роботи.

3. Постановка задачі.

Розглянемо наступну екстремальну задачу.

Нехай $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — довільна система взаємно неперетинних областей така, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0,n}$, $|a_k| = |e^{\frac{2\pi ki}{n}}| = 1$, $k = \overline{1,n}$, причому області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ — симетричні відносно одиничного кола.

Довести, що максимум функціонала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

де $\gamma > 1$, досягається для областей, які володіють $n-$ кратною симетрією.

4. Основний результат.

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тоді для довільного $\gamma \in (1; 0,5n^2]$ та довільного набора взаємно неперетинних областей B_k таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k = \exp(\frac{2\pi ki}{n}) \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ — симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}, \tag{1}$$

знак рівності досягаєтьcя коли $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$ є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2. \tag{2}$$

Доведення. Зробимо розділяюче перетворення системи областей B_k за допомогою функцій $\zeta = \{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n} = \left(e^{-\frac{2\pi ki}{n}} w\right)^{\frac{n}{2}}$, де вибрана така вітка цієї багатозначної функції, яка реалізує однолисте відображення кута P_k на верхню півплощину.

Нехай $D_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, позначає область площини $\mathbb{C}_z$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_k) = 1$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. Позначимо через $D_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, таку область площини $\mathbb{C}_z$, яка отримана в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $\pi_k(a_{k+1}) = -1$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Крім того, позначимо через $D_k^{(0)}$ таку область площини $\mathbb{C}_z$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, яка містить точку $z = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної осі. З визначення функцій π_k, випливає, що

$$|\pi_k(w)| \sim |w_k|^{\frac{n}{2}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)-\pi_k(e^{\frac{2\pi ki}{n}})|\sim\frac{n}{2}\cdot|w-e^{\frac{2\pi ki}{n}}|,\quad w\to e^{\frac{2\pi ki}{n}},\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)-\pi_k(e^{\frac{2\pi(k+1)i}{n}})|\sim\frac{n}{2}\cdot|w-e^{\frac{2\pi(k+1)i}{n}}|,\quad w\to e^{\frac{2\pi(k+1)i}{n}},\quad w\in\overline{P_k}.$$

Далі, використовуючи результати робіт [5,6] та симетрію структури траєкторій квадратичного диференціала, отримаємо нерівності

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\frac{4}{n^2}}\left(D_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\frac{4}{n^2}r\left(D_k^{(1)},1\right)r\left(D_{k-1}^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n}.$$

Отже, обчислюючи значення функціоналу $J_n(\gamma)$, отримаємо наступну оцінку

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{4}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\gamma\frac{4}{n^2}}\left(D_k^{(0)},0\right)r\left(D_k^{(1)},1\right)r\left(D_k^{(2)},-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},\qquad(3)$$

де $D_k^{(0)},D_k^{(1)},D_k^{(2)}$ — довільні неперетинні області такі, що $0\in D_k^{(0)}\subset\mathbb{C},1\in D_k^{(1)}\subset\mathbb{C},-1\in D_k^{(2)}\subset\mathbb{C}$.

Нехай

$$T_k:=\{z:(-1)^{k+1}Im\,z>0\},\quad k\in\{1,2\},$$

$$G_1=\overline{T_1}\cap U_1,\quad G_2=\overline{\mathbb{C}}\backslash U_1\cap\overline{T_1},\quad G_3=\overline{T_2}\cap U_1,\quad G_4=\overline{\mathbb{C}}\backslash U_1\cap\overline{T_2},$$

$$\zeta=\beta(z)=\frac{2z}{1+z^2}.$$

З визначення функцій $\beta(z)$ слідує, що

$$|\beta(z)|\sim2|z|,\quad z\to0,\quad z\in\overline{T_k},$$

$$|\beta(z)-1|\sim\frac{1}{2}\left|z-1\right|^2,\quad z\to1,\quad z\in\overline{T_k},$$

$$|\beta(z)+1|\sim\frac{1}{2}\left|z+1\right|^2,\quad z\to-1,\quad z\in\overline{T_k}.$$

Знову застосуємо розділяюче перетворення до областей D_0,D_1,D_2 відносно функції $\beta(z)$ та системи областей $\{\overline{G}_k\}_{k=1}^4$ позначимо через $\Omega_0^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$; позначимо результат розділяючого перетворення областей D_j, $j\in\{1,2\}$, відносно функції $\beta(z)$ та системи областей $\{\overline{G}_k\}_{k=1}^4$ через області $\Omega_1^{(k)},\Omega_2^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$.

Використовуючи результати робіт [5, 6] та симетрію областей D_0, D_1, D_2, справедливі співвідношення

$$r\left(D_0,0\right) \leqslant \left[\frac{1}{2^2} r\left(\Omega_0^{(1)},0\right) \cdot r\left(\Omega_0^{(3)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(D_1,1\right) \leqslant \left[2^4 r\left(\Omega_1^{(1)},1\right) r\left(\Omega_1^{(2)},1\right) r\left(\Omega_1^{(3)},1\right) r\left(\Omega_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}},$$

$$r\left(D_2,-1\right) \leqslant \left[2^4 r\left(\Omega_2^{(1)},-1\right) r\left(\Omega_2^{(2)},-1\right) r\left(\Omega_2^{(3)},-1\right) r\left(\Omega_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Звідси маємо

$$r^{\gamma\frac{4}{n^2}}\left(D_0,0\right) r\left(D_1,1\right) r\left(D_2,-1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 r\left(\Omega_0^{(1)},0\right) \cdot r\left(\Omega_0^{(3)},0\right)\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[2^4 r\left(\Omega_1^{(1)},1\right) r\left(\Omega_1^{(2)},1\right) r\left(\Omega_1^{(3)},1\right) r\left(\Omega_1^{(4)},1\right)\right]^{\frac{1}{8}} \times$$

$$\times \left[2^4 r\left(\Omega_2^{(1)},-1\right) r\left(\Omega_2^{(2)},-1\right) r\left(\Omega_2^{(3)},-1\right) r\left(\Omega_2^{(4)},-1\right)\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Так як області Ω_j^1, симетричні відносно одиничного кола областям Ω_j^2, а області Ω_j^3 симетричні Ω_j^4, $j \in \{1,2\}$ то одержимо

$$r^{\gamma\frac{4}{n^2}}\left(D_0,0\right) r\left(D_1,1\right) r\left(D_2,-1\right) \leqslant \left[\frac{1}{2} r\left(\Omega_0^{(1)},0\right) \cdot \frac{1}{2} r\left(\Omega_0^{(3)},0\right)\right]^{\frac{2\gamma}{n^2}} \times$$

$$\times \left[\left(2r\left(\Omega_1^{(1)},1\right)\right)^2 \left(2r\left(\Omega_1^{(3)},1\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{8}}$$

$$\times \left[\left(2r\left(\Omega_2^{(1)},-1\right)\right)^2 \left(2r\left(\Omega_2^{(3)},-1\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{8}}.$$

Остаточно одержимо таку нерівність

$$r^{\gamma\frac{4}{n^2}}\left(D_0,0\right) r\left(D_1,1\right) r\left(D_2,-1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\frac{4\gamma}{n^2}} \left\{\left[r^{\frac{8\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0^{(1)},0\right) r\left(\Omega_1^{(1)},1\right) r\left(\Omega_2^{(1)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}}\right\} \times \tag{4}$$

$$\times \left\{\left[r^{\frac{8\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0^{(3)},0\right) r\left(\Omega_1^{(3)},1\right) r\left(\Omega_2^{(3)},-1\right)\right]^{\frac{1}{4}}\right\}.$$

Переходячи до максимуму правої частини нерівності (4) отримаємо, що

$$r^{\frac{8\gamma}{n^2}}\left(\Omega_0^{(3)},0\right) r\left(\Omega_1^{(3)},1\right) r\left(\Omega_2^{(3)},-1\right) \leqslant$$

$$r^{\frac{8\gamma}{n^2}}\left(E_0,0\right) r\left(E_1,1\right) r\left(E_2,-1\right),$$

де E_0, E_1, E_2 — кругові області квадратичного диференціала

$$-\frac{(n^2-2\gamma)z^2+2\gamma}{z^2(z^2-1)^2}\,dz^2,$$

причому $0\in E_0$, $1\in E_1$, $-1\in E_2$.

Оскільки величина $\frac{8\gamma}{n^2}\leqslant 4$ при всіх $\gamma\in(1,\frac{n^2}{2}]$, то використовуючи результат роботи [6], справедлива рівність

$$r^{\frac{8\gamma}{n^2}}\left(E_0,0\right) r\left(E_1,-1\right) r\left(E_2,1\right) =$$

$$= 2^{\frac{8\gamma}{n^2}+6}\cdot\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{8\gamma}{n^2}}\cdot\left(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(2-\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n})^2}\cdot\left(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(2+\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n})^2} =$$

$$= 2^2\cdot\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{8\gamma}{n^2}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-2-\frac{4\gamma}{n^2}}\left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\frac{4}{n}\sqrt{2\gamma}}.$$

Підставимо одержану величину в (4), маємо

$$r^{\gamma\frac{4}{n^2}}\left(\Omega_0,0\right) r\left(\Omega_1,1\right) r\left(\Omega_2,-1\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2-\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-1-\frac{2\gamma}{n^2}}\left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}}.$$

Тепер залишилось підставити праву частину останньої рівності в (3), маємо

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{4}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}}\left[2^{2-\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}\cdot\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{-1-\frac{2\gamma}{n^2}}\left[\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right]^{\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}}\right]^{\frac{n}{2}} =$$

$$=\left(\frac{4}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{2\gamma}}{n}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}, \qquad (5)$$

де $B_k^{(0)}$, a_k, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, — кругові області та полюси квадратичного диференціала (2), відповідно. $\square$

5. Наслідки з теореми 1.

Наслідок 1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тоді для довільного $\gamma \in (1; 0,5n^2]$ та довільного набора взаємно неперетинних областей B_k таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k = \exp(\frac{2\pi k i}{n}) \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ — симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k\right),$$

де $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$ є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Наслідок 2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тоді для довільного $\gamma \in (1; 0,5n^2]$ та довільного набора взаємно неперетинних областей B_k таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k = R \cdot \exp(\frac{2\pi k i}{n}) \in B_k \subset \mathbb{C}$, $R > 0$, $k = \overline{0,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ — симетричні відносно кола радіуса R, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}} \cdot R^{\gamma+n},$$

знак рівності досягається коли $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$ є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)R^n w^n + R^{2n}\gamma}{w^2(w^n-R^n)^2}\, dw^2.$$

Наслідок 3. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тоді для довільного $\gamma \in (1; 0,5n^2]$ та довільного набора взаємно неперетинних областей B_k таких, що $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $a_k = \exp(\frac{2\pi k i}{n}) \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{0,n}$, причому області B_k, $k = \overline{1,n}$ — симетричні відносно одиничного кола, справедлива нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\frac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}},$$

знак рівності досягається коли $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$ є круговими областями квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\, dw^2.$$

Цитована література

1. *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений// Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
2. *Тамразов П.М.* Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Известия АН СССР, серия мат. – 1968. – **32**, № 5. – С. 1033–1043.
3. *Бахтин А., Бахтина Г., Зелинский Ю.* Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе// Праці ін-ту мат-ки НАН України. – 2008. – 308 с.
4. *Выговская Л.В.* О проблемме В.Н. Дубинина для симметричных многосвязных областей// Український математичний вісник. – 2017. – Т. 14, № 2. – С. 295–302.
5. *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
6. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. – 1994. – **49** (295), № 1. – С. 3–76.

References

1. Lavrent'ev, M.A (1934). On the theory of conformal mappings. *Travaux Inst. Physico-Math. Stekloff Acad. Sci. USSR*, *5*, 159-245.
2. Tamrazov, P.M. (1968). Extreme conformal mappings and poles quadratic differentials. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 32*(5), 1033-1043 (in Russian). Translation in (1968) *Math. USSR-Izv., 2*(5), 987-996.
3. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Zelinskii, Yu.B. (2008). Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (in Russian).*
4. Vyhivska, L. (2018). On the problem of V.N. Dubinin for symmetric multiply connected domains. *J. Math. Sci., 229*(1), 108-113.
5. Dubinin, V.N. (1988). The separating transformation of domains and problems on the extremal partition. *Analytical theory of numbers and theory of functions. Part 9, Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, *168*, 48-46 (in Russian). Translation in (1991) *J. Soviet Math.*, 53(3), 252-263.
6. Dubinin, V.N. (1994). Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Uspekhi Mat. Nauk*, *49*(1), 3-76 (in Russian). Translation in (1994) *Russian Math. Survey*, 49(1), 1-79.

L.V. Vyhivska

The problem of extreme decomposition of a complex plane with fixed poles on a circle.

The problem of extreme decomposition of a complex plane with fixed poles on a circle. Investigation on geometric function theory has been conducted by several researchers, however, few studies have reported on the problem considering extremal configurations the product of inner radii of non-overlapping domains with respect to fixed poles. The paper describes the problem of finding the maximum of the product of inner radii of mutually non-overlapping symmetric domains with respect to points on a unit circle multiply by a certain positive degree γ of the inner radius of the domain with respect to the zero. The problem was studied using the method of separating transformation. Proving the theorem shows that the maximum is obtained if $\gamma \in (1, n^2]$ and for all $n \geqslant 2$. Its results and the method for the obtaining of these results can be used in the theory of potential, approximations, holomorphic dynamics, estimation of the distortion problems in conformal mapping, and complex analysis.

Keywords: *inner radius of domain, non-overlapping domains, fixed system of points, separating transformation, quadratic differential, Green's function.*

Л.В. Выговская

Задача об экстремальном разбиении комплексной плоскости с фиксированными полюсами на окружности.

Данная работа посвящена исследованию одной экстремальной задачи с фиксированными полюсами. Это задача о произведении внутренних радиусов взаимно неналегающих симметричных областей относительно точек на единичной окружности на некоторую положительную степень внутреннего радиуса области относительно начала координат.

Ключевые слова: *внутренний радиус области, неналегающие области, фиксированная система точек, разделяющее преобразование, квадратичный дифференциал, функция Грина.*

Інститут математики НАН України, Київ
lyudmilavygivska@ukr.net

Отримано 19.05.18

УДК 517.5, 539.3
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-3

©2018. **С.В. Грищук**

МОНОГЕННІ ФУНКЦІЇ У ДВОВИМІРНИХ КОМУТАТИВНИХ АЛГЕБРАХ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПЛОСКОЇ ОРТОТРОПІЇ

Серед двовимірних комутативних, асоціативних алгебр з одиницею над полем комплексних чисел другого рангу знайдено опис алгебр $\mathbb{B}_0$ (складається з єдиної напівпростої алгебри), які містять базис (e_1, e_2), такий, що $e_1^4 + 2pe_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0$ для кожного фіксованого p, $-1 < p < 1$. Будуються $\mathbb{B}_0$-значні "аналітичні" функції $\Phi(xe_1 + ye_2)$ ((e_1, e_2) фіксований, x та y є дійсними змінними), такі, що їх дійснозначні компоненти-функції задовольняють рівняння для знаходження функції напружень u у випадку ортотропних плоских деформацій $\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x, y) = 0$. Знайдено характеризацію розв'язків u даного рівняння у обмежених однозв'язних областях через дійсні компоненти функції Φ.

MSC: 30G35, 74B05.

Ключові слова: *анізотропне (ортотропне) середовище, комутативні алгебри, моногенні функції, функція напружень.*

1. Модель механіки суцільних середовищ.

Розглянемо однорідне плоске анізотропне тіло, що геометрично зображується у вигляді області D декартової площини xOy, а фізично підпорядковується узагальненому закону Гука вигляду

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-(a_{12})^2} & 0 & -\frac{a_{12}}{1-(a_{12})^2} \\ 0 & \frac{1}{2(p-a_{12})} & 0 \\ -\frac{a_{12}}{1-(a_{12})^2} & 0 & \frac{1}{1-(a_{12})^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

що у оберненій формі перетворюється на

$$\varepsilon_x = \sigma_x + a_{12}\sigma_y,\ \gamma_{xy} = 2\,(p - a_{12})\,\tau_{xy},\ \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + \sigma_y, \tag{2}$$

де σ_x, τ_{xy}, σ_y і ε_x, $\frac{\gamma_{xy}}{2}$, ε_y є компонентами тензору напружень [3, с. 15] і деформацій [3, с. 16], відповідно, p — дійсне число.

Числова матриця (її елементи — дійсні числа) у правій частині рівності (1) (матриця *модулей пружності* [3, с. 25]) є додатньо визначеною (див., наприклад, [4]). Тому маємо систему нерівностей відносно a_{12}:

$$\begin{cases} \frac{1}{1-(a_{12})^2} > 0, \\ \frac{1}{2(p-a_{12})} > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Робота частково підтримана грантом Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U001528).

Очевидно, що система (3) має непорожній розв'язок лише при $p > -1$.

Для випадку $p > -1$, одержуємо шукані числові проміжки (розв'язки системи (3)) для a_{12}:

$$-1 < a_{12} < p. \tag{4}$$

Випадок $p > 1$ розглянуто у [1, 2]. Значення $p = 1$ відповідає ізотропному середовищу.

Тому скрізь у даній роботі, будемо вважати, що p є довільним чином фіксованим числом, таким, що

$$-1 < p < 1. \tag{5}$$

Відмітимо також, що узагальнений закон Гука (1) (або (2)) відповідає плоскому випадку анізотропії, який називається *ортотропним* (див. [3, с. 33–34]), причому його частинному випадку.

Враховуючи узагальнений закон Гука (2), рівняння для знаходження функції напружень $u(x,y)$ $(\sigma_x(x_\circ,y_\circ) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_\circ,y_\circ)$, $\tau_{xy}(x_\circ,y_\circ) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_\circ,y_\circ)$, $\sigma_y(x_\circ,y_\circ) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_\circ,y_\circ)$ при всіх $(x_\circ,y_\circ) \in D)$ має вигляд (див., наприклад, [3–7]):

$$\widetilde{l}_p u(x,y) := \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x,y) = 0. \tag{6}$$

Як зазначалось вище, рівняння (6) при $p \le -1$ не має застосувань у плоскій анізатропній теорії пружності.

Рівняння (6) є частинним випадком *узагальненого бігармонічного рівняння* (даний термін вживається, наприклад, в [5, с. 603] або [8]), останнє відповідає загальному випадку плоскої анізотропії (за умови, що коефіцієнти підпорядковані відповідному узагальненому закону Гука) та є рівнянням для функції напружень.

Введемо для кожних комплексних чисел c_1, c_2, $c_k \in \mathbb{C}, k = 1,2$, позначення:

$$l_p(c_1,c_2) := c_1^4 + 2pc_1^2c_2^2 + c_2^4. \tag{7}$$

Характеристичне рівняння для (6) має вигляд

$$l_p(s,1) \equiv s^4 + 2ps^2 + 1 = 0, s \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

його корені є комплексними і попарно різними:

$$\{s_1, s_2, \overline{s_1}, \overline{s_2}\} =: \ker l_p(s,1), \tag{9}$$

де $\overline{x+iy} := x - iy \equiv \mathrm{Re}z - i\mathrm{Im}z$, $x,y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ (i — уявна комплексна одиниця);

$$s_1 = P_1 - P_2 i, s_2 = -P_1 + P_2 i, P_1 = \frac{\sqrt{2(1-p)}}{2}, P_2 = \frac{\sqrt{2(1+p)}}{2}. \tag{10}$$

Очевидно, що

$$(P_1)^2 + (P_2)^2 = 1,\ (P_1)^2 - (P_2)^2 = -p,\ P_1P_2 = \frac{\sqrt{1-p^2}}{2},\ P_k \neq 0, k = 1, 2. \tag{11}$$

З (10) та (11) одержуємо співвідношення між s_1 і s_2:

$$s_1 + s_2 = 0,\ s_1s_2 = p + \sqrt{1-p^2}\, i,\ s_1 \neq s_1,\ s_1 \neq \overline{s_2}. \tag{12}$$

2. Комутативні алгебри другого рангу над полем комплексних чисел та їх базиси, асоційовані з рівнянням (6)**.**

Знайдемо усі можливі асоціативні, комутативні над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебри другого рангу з одиницею e, які містять принаймні один базис (e_1, e_2), що задовольняє умову, асоційовану з рівнянням (6), а саме:

$$\mathcal{L}_p(e_1, e_2) := e_1^4 + 2pe_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0. \tag{13}$$

Крім того, розширимо поставлену задачу питанням про знаходження у шуканих алгебрах (або алгебрі у випадку, коли вона єдина) базисів (e_1, e_2), що задовольняють умову (13).

При $p > 1$ дана проблема поставлена та розв'язана у [1], а при $p = 1$ — схожа проблема (з додатковою умовою: $e_1^2 + e_2^2 \neq 0$) у [9].

Як відомо (див. [10]), існує (з точністю до ізоморфізму) дві асоціативні, комутативні над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебри другого рангу з одиницею e. Це алгебри, породжені базисами (e, ρ), (e, ω), відповідно:

$$\mathbb{B} := \{c_1e + c_2\rho : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\},\ \rho^2 = 0, \tag{14}$$

$$\mathbb{B}_0 := \{c_1e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\},\ \omega^2 = e. \tag{15}$$

Очевидно, що алгебра $\mathbb{B}_0$ є напівпростою (див. означення, наприклад, у [11, с. 37]), містячи базис з ортогональних ідемпотентів $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$, де

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}(e + \omega),\ \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}(e - \omega),\ \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = 0. \tag{16}$$

Очевидно, що

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = e,\ \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 = \omega. \tag{17}$$

Зв'язок алгебри (15) з алгебрами, які є загальновживаними у зарубіжних наукових працях, наведено у [1].

Оскільки алгебра $\mathbb{B}$ містить ненульовий радикал $\{c\rho : c \in \mathbb{C}\}$ (див. [12]), то алгебра $\mathbb{B}$ не є напівпростою. Елемент $a = c_1e + c_2\rho$ з $\mathbb{B}$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $c_1 \neq 0$, у випадку виконання цієї умови справедлива рівність: $a^{-1} = \frac{1}{c_1}\, e - \frac{c_2}{(c_1)^2}\, \rho$ (див. [13]).

Теорема 1. *Алгебра $\mathbb{B}$ не містить жодного базису* (e_1, e_2)*, що задовольняє умову* (13)*.*

Існує множина потужності континуум, що складається з базисів (e_1, e_2), $e_k \in \mathbb{B}_0$, $k = 1, 2$, *які задовольняють* (13):

$$e_1 = \alpha\,\mathcal{I}_1 + \beta\,\mathcal{I}_2, e_2 = \widetilde{s}_1\alpha\,\mathcal{I}_1 + \widetilde{s}_2\beta\,\mathcal{I}_2\,\forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \tag{18}$$

де $\widetilde{s}_1 \neq \widetilde{s}_2$, $\widetilde{s}_k \in \ker l_p(s, 1)$, $k = 1, 2$.

Доведення. Нехай існують шукані базиси у алгебрі $\mathbb{B}$. Тоді $e_k = \alpha_k e + \beta_k\rho$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $\beta_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, $\Delta_{e_1,e_2} := \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Розглянемо два можливі випадки:

1) Існує обернений елемент e_2^{-1} до e_2: $e_2^{-1}e_2 = e$.

2) Не існує e_2^{-1}.

Нехай має місце випадок 1). Тоді існують $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, такі, що $e_1 e_2^{-1} = \alpha e + \beta\rho =: E$.

Доведемо, що $\beta \neq 0$. Нехай $\beta = 0$, тоді $e_1 e_2^{-1} = \alpha e$, $\alpha \neq 0$. Домножаючи останню рівність на e_2, приходимо до: $e_1 = \alpha e_2$, що суперечить співвідношенню $\Delta_{e_1,e_2} \neq 0$. Отже, $\beta \neq 0$.

Враховуючи, що $E^2 = \alpha^2 e + 2\alpha\beta\rho$, $E^4 = \alpha^4 e + 4\alpha^3\beta\rho$, одержуємо після множення обох частей рівності (13) на $(e_2^{-1})^4$ ланцюжок рівностей:

$$0 = (e_2^{-1})^4\mathcal{L}_p(e_1, e_2) = L_p(E, e) \equiv l_p(\alpha, 1)e + 4\alpha\beta\left(\alpha^2 + p\right)\rho.$$

Тому, маємо систему рівнянь: $l_p(\alpha, 1) = 0, \alpha\beta\left(\alpha^2 + p\right) = 0$. Беручи до уваги рівності (9), (10) та нерівності (5), $\beta \neq 0$, приходимо до висновку, що дана система не має розв'язків.

Нехай має місце випадок 2). Тоді базисні елементи подаються у вигляді: $e_2 = \alpha_2\rho$, $\alpha_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $e_1 = \alpha_1 e + \beta_1\rho$. Встановлюємо, що $\alpha_1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, оскільки у протилежному випадку $\Delta_{e_1,e_2} = 0$. Тому, одержуємо нерівність $\mathcal{L}_p(e_1, e_2) = e_1^4 \equiv \alpha_1^4 e + 4\alpha_1^3\beta_1\rho \neq 0$, що протирічить умові (13).

Тому не існує базисів (e_1, e_2), $e_k \in \mathbb{B}$, $k = 1, 2$, що задовольняють умову (13).

Безпосередня перевірка показує, що базиси (18) задовольняють умову (13).

Теорему доведено. $\square$

Зауважимо, що при при $p > 1$ аналогічна теорема доведена у [1], там знайдено усі шукані базиси.

У даній роботі акцентуємо увагу на базисі з (18) у випадку $\alpha = \beta = 1$, а саме:

$$e_1 = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \equiv e,\; e_2 = \widetilde{s}_1\mathcal{I}_1 + \widetilde{s}_2\,\mathcal{I}_2, \tag{19}$$

де

$$(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2) \in \left\{(s_1, s_2),\, (\overline{s_1}, \overline{s_2}),\, (s_1, \overline{s_2}),\, (\overline{s_1}, s_2),\, (s_2, \overline{s_1}),\, (\overline{s_2}, s_1),\, (\overline{s_2}, \overline{s_1}),\, (s_2, s_1)\right\}, \tag{20}$$

тобто $\widetilde{s}_k, k = 1, 2$, крім умов теореми 1 задовольняють ще одну додаткову: $\widetilde{s}_1 \neq \overline{\widetilde{s}_2}$.

Зауважимо, що формула (19) описує також усі базиси (e_1, e_2), що задовольняють умову (13) з точністю до перестановки (термін вживається у [1]) для випадку, коли один з базисних елементів співпадає з одиницею алгебри e, а другий має коефіцієнти $A_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, відповідно при ідемпотентах $\mathcal{I}_k, k = 1, 2$, що задовольняють умову: $A_1 \neq \overline{A_2}$.

З (19) одержуємо вираження ідемпотентів $\mathcal{I}_k$, $k = 1, 2$, через e_k, $k = 1, 2$:

$$\mathcal{I}_1 = \widetilde{s}_2 s_{12}\, e_1 - s_{12}\, e_2,\, \mathcal{I}_2 = -\widetilde{s}_1 s_{12}\, e_1 + s_{12}\, e_2, \tag{21}$$

де

$$s_{12} := \frac{1}{\widetilde{s}_2 - \widetilde{s}_1}.$$

З урахуванням (19) та (21) одержуємо рівності

$$e_1 = e,\, e_1 e_2 = e_2,\, e_2^2 = -\widetilde{s}_1 \widetilde{s}_2\, e_1 + (\widetilde{s}_1 + \widetilde{s}_2)\, e_2. \tag{22}$$

3. Моногенні функції площини, породженої елементами (20)**.**

Розглянемо площину $\mu_{e_1,e_2} := \{xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, де e_k, $k = 1, 2$, визначаються рівностями (19).

Нехай D є областю декартової площини xOy. Позначимо: $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 \in \mu_{e_1,e_2} : (x, y) \in D\}$.

Надалі, вважатимемо: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\zeta = xe_1 + ye_2 \in \mu_{e_1,e_2}$.

Зауважимо, що якщо кожен елемент $\zeta \in \mu_{e_1,e_2} \setminus \{0\}$ є оборотним.

Розглядаємо *моногенні* в D_ζ функції, тобто функції $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ вигляду:

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)\, e_1 + U_2(x, y)\, ie_1 + U_3(x, y)\, e_2 + U_4(x, y)\, ie_2, \tag{23}$$

що мають класичну похідну $\Phi'(\zeta)$ в кожній точці ζ з D_ζ:

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h\to 0,\, h\in\mu_{e_1,e_2}} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)\, h^{-1}\,. \tag{24}$$

Кожну компоненту $U_k\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{1, \ldots, 4\}$, з (23) позначаємо через $\mathrm{U}_k\,[\Phi]$, тобто $\mathrm{U}_k\,[\Phi(\zeta)] := U_k(x, y)$, $k \in \{1, \ldots, 4\}$.

Аналогічно [1, Теорема 2] встановлюємо наступну теорему.

Теорема 2. *Функція* $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ *є моногенною в області* D_ζ *тоді і тільки тоді, коли її компоненти* $U_k\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 4}$, *з розкладу* (23) *диференційовні в області* D *та виконується наступний аналог умов Коші – Рімана*:

$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial y}\, e_1 = \frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial x}\, e_2 \quad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\,. \tag{25}$$

Підставляючи у (25) розклад (23), далі, використовуючи (22), одержуємо покомпонентну форму рівності (25) у вигляді системи чотирьох рівнянь відносно компонент U_k, $k = \overline{1,4}$, функції (23):

$$\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y} = -\mathrm{Re}\,(\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial x} + \mathrm{Im}\,(\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial x}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial y} = -\mathrm{Im}\,(\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial x} - \mathrm{Re}\,(\widetilde{s}_1\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial x}, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial U_1(x,y)}{\partial x} + \mathrm{Re}\,(\widetilde{s}_1+\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial x} - \\ &- \mathrm{Im}\,(\widetilde{s}_1+\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial x},\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial U_2(x,y)}{\partial x} + \mathrm{Im}\,(\widetilde{s}_1+\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial x} + \\ &+ \mathrm{Re}\,(\widetilde{s}_1+\widetilde{s}_2)\,\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial x},\end{aligned} \tag{29}$$

для кожного $(x,y) \in D$.

Для змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 \in \mu_{e_1,e_2}$ (або $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) та довільним чином фіксованої пари $(\widetilde{s_1}, \widetilde{s_2})$ з (20) введемо до розгляду комплексні змінні $Z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1,2$, за допомогою формул

$$Z_k = x + \widetilde{s}_k y, k = 1,2, \tag{30}$$

а також області комплексної площини:

$$D_{Z_k} := \{Z_k = x + \widetilde{s}_k y \in \mathbb{C} : xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\}, k = 1,2. \tag{31}$$

З рівностей (19) випливає, що змінна ζ подається у вигляді

$$\zeta = Z_1\mathcal{I}_1 + Z_2\mathcal{I}_1. \tag{32}$$

Аналогічно [1, Теорема 3] встановлюємо наступну теорему.

Теорема 3. *Функція $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є моногенною в області D_ζ тоді і тільки тоді, коли має місце рівність*

$$\Phi(\zeta) = F_1\,(Z_1)\,\mathcal{I}_1 + F_2\,(Z_2)\,\mathcal{I}_2 \;\forall \zeta \in D_\zeta, \tag{33}$$

де F_k є деякою голоморфною функцію комплексної змінної Z_k в області D_{Z_k}, відповідно при $k = 1,2$.

Оскільки з існування границі (24) випливає, що функція $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є неперервною, то функція Φ є також моногенною у сенсі робіт [14–16] (неперервні і диференційовні за Гато у напрямку додатних променів). Для позначення останньої моногенності будемо вживати термін G^+*-моногенність*. Аналогічно випадку $p > 1$, де показано, що G^+-моногенні функції зображаються у вигляді (33) (див. [1, 14–16]), доводимо аналогічне твердження для випадку $-1 < p < 1$. Тому, як і при $p > 1$, обидва види моногенності (моногенність у сенсі рівності (24) та G^+-моногенність) співпадають.

Підставляючи (21) у (33), та, замінюючи, без втрати загальності, $s_{12}\widetilde{s}_2 F_1$ на F_1, а $(-s_{12}\widetilde{s}_1)F_2$ на F_2, одержуємо зображення моногенної функції Φ за базисом (19) у вигляді

$$\Phi(\zeta) = (F_1(Z_1) + F_2(Z_2))\, e_1 - \left(\frac{1}{\widetilde{s}_2} F_1(Z_1) + \frac{1}{\widetilde{s}_1} F_2(Z_2)\right) e_2 \, \forall \zeta \in D_\zeta. \qquad (34)$$

4. Моногенні функції площини, породженої елементами (20)**, та рівняння** (6)**.**

З теореми 3 випливає, що моногенна функція (23) має похідні довільного порядку $\Phi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Наслідком цього є рівності

$$\widetilde{l}_p \Phi(\zeta) = \mathcal{L}_p(e_1, e_2)\Phi(\zeta) \equiv 0 \, \forall \zeta \in D_\zeta. \qquad (35)$$

З (35) та моногенності $\widetilde{l}_p \Phi$ випливають рівності

$$\mathrm{U}_k \left[\widetilde{l}_p \Phi(\zeta)\right] = 0 \, \forall \zeta \in D_\zeta, k = \overline{1, 4}, \qquad (36)$$

тобто, дійснозначні компоненти-функції $U_k = \mathrm{U}_k[\Phi]$, $k = \overline{1, 4}$, з (23) задовольняють рівняння (6) в області D.

З рівності (34) випливає, що компоненти $U_k(x, y) = \mathrm{U}_k[\Phi(\zeta)]$, $k = \overline{1, 4}$, моногенної функції Φ, є нескінченно диференційовними в області D. Таку саму гладкість мають компоненти $U_k, k = \overline{1, 4}$, розв'язків систему рівнянь (26) – (29)

Будемо вважати тут і надалі, що область D є обмеженою і однозв'язною.

Відомо (див., наприклад, [3, §20, с. 136] або [4]), що загальний розв'язок рівняння (6) подається у вигляді:

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\, (F_1(Z_1) + F_2(Z_2)) \;\; \forall (x, y) \in D, \qquad (37)$$

$F_k \colon D_{Z_k} \longrightarrow \mathbb{C}, k = 1, 2,$ — довільні аналітичні функції відповідних комплексних змінних.

Користуючись (34), переписуємо рівність (37) у вигляді

$$u(x, y) = \mathrm{U}_1[\Phi(\zeta)] \; \forall \zeta \in D_\zeta, \qquad (38)$$

де $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ — довільна моногенна функція.

Позначемо через $\mathbf{V}_0 := (U_{10}, U_{20}, U_{30}, U_{40})$, де $U_{10} \equiv 0$, $U_{k0} := U_k \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{2, 4}$, є нескінченно диференційовними в D функціями, що задовольняють систему рівнянь (26)–(29). Зауважимо, що $\mathbf{V}_0$ є загальним розв'язком розв'язком системи (26)–(29) з $U_1 \equiv 0$.

Нехай $\Phi_{1,0} \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є довільною моногенною функцією, такою, що $\mathrm{U}_k[\Phi_{1,0}] = U_{k0}$, $k = \overline{1, 4}$.

Для фіксованого розв'язку u рівняння (6) справедливий обернений результат про його подання через моногенні функції Φ.

Теорема 4. *Нехай u — певний розв'язок рівняння* (6). *Деякі аналітичні функції $F_k\colon D_{Z_k} \longrightarrow \mathbb{C}$, $k=1,2$, задовольняють рівність* (37). *Моногенна функція $\Phi_{12}\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ задовольняє умову*

$$\mathrm{U}_1\left[\Phi_{12}(\zeta)\right] + i\mathrm{U}_2\left[\Phi_{12}(\zeta)\right] = F_1(Z_1) + F_2(Z_2)\,\forall \zeta \in D_\zeta. \tag{39}$$

Усі моногенні функції Φ, такі, що

$$\mathrm{U}_1\left[\Phi\right] = u(x,y)\,\forall (x,y) \in D, \tag{40}$$

подаються у вигляді

$$\Phi(\zeta) = \Phi_{12}(\zeta) + \Phi_{1,0}(\zeta)\,\forall \zeta \in D_\zeta. \tag{41}$$

Доведення. Доведення теореми випливає з вищенаведених міркувань та лінійності операції $\mathrm{U}_1\left[\cdot\right]$. $\square$

Зауважимо, що аналогічні твердження до теореми 4 можна встановити для інших компонент $U_k = \mathrm{U}_k\left[\Phi\right]$, $k \in \{2,3,4\}$.

Розглянемо випадки, коли $\Phi_{1,0}$ знаходиться у явному вигляді. Нехай $\widetilde{s}_k := s_k$, $k=1,2$. Тоді, використовуючи (12) для системи рівнянь з частинними похідними першого порядку (26) – (29) з $U_1 \equiv 0$, та здійснюючи елементарні перетворення, приходимо до рівносильної системи

$$\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial x} = -\sqrt{1-p^2}\,\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial y}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial x} = -p\,\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial y}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial U_3(x,y)}{\partial y} = 0, \tag{44}$$

$$\frac{\partial U_4(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial U_2(x,y)}{\partial x}, \tag{45}$$

для кожного $(x,y) \in D$.

Оскільки $\widetilde{l}_p\left(U_3\right) = 0$ *в області D* (далі, для спрощення запису, будемо, при нагоді, опускати дане словосполучення), то підставляючи (44) у зазначене вище рівняння, приходимо до рівності $\frac{\partial^4 U_3}{\partial x^4} = 0$, тому з використанням останньої рівності та рівнянь-наслідків з (44) виду $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^k U_3}{\partial x^k}\right) = 0$ ($k \in \{3,2,1,0\}$), одержуємо послідовним інтегруванням рівності

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^3} = const,\ \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} = P_1(x),\ \frac{\partial^2 U_3}{\partial x} = P_2(x),\ U_3 = P_3(x),$$

де $const$ позначає довільну дійсну сталу, $P_k(x)$ є поліномом відносно дійсної змінної x з (довільними) дійсними коефіцієнтами, що є не вище k-го степеня для кожного $k \in \{1, 2, 3\}$.

Отже, доведена рівність

$$U_3(x, y) = P_3(x) \ \forall (x, y) \in D. \tag{46}$$

Підставляючи (46) у (42), одержуємо

$$\frac{\partial U_2(x, y)}{\partial y} = \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p^2 - 1} P_3'(x) \ \forall (x, y) \in D, \tag{47}$$

де P_3' позначає похідну від P_3.

Підставляючи тепер вже (47) у (43), маємо

$$\frac{\partial U_4(x, y)}{\partial x} = \frac{p\sqrt{1 - p^2}}{1 - p^2} P_3'(x) \ \forall (x, y) \in D. \tag{48}$$

Підставляючи (47) у рівняння, що одержується з (45) при диференціюванні обох частин за змінною y, приходимо до рівності

$$\frac{\partial^2 U_4(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{1 - p^2}}{p^2 - 1} P_3''(x) \ \forall (x, y) \in D. \tag{49}$$

Для P_3 введемо позначення:

$$P_3(x) = \frac{a}{6} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx + d, \tag{50}$$

де a, b, c, d — довільні дійсні сталі.

Здійснюючи міркуванням для рівностей (48) і (49) з урахуванням (46), аналогічні тим, що застосовувались при доведенні (49), приходимо до рівності

$$U_4(x, y) = \frac{\sqrt{1 - p^2}}{1 - p^2} \left(p \left(\frac{a}{6} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + c\,x \right) - (ax + b) \left(\frac{y^2}{2} + e\,y \right) + f \right) \ \forall (x, y) \in D, \tag{51}$$

де e, f — довільні дійсні сталі.

З урахуванням (51) рівності (45), (47) набувають, відповідно, вигляду

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = -\frac{\sqrt{1 - p^2}}{1 - p^2}(ax + b)(y + e), \ \frac{\partial U_2}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1 - p^2}}{1 - p^2} \left(\frac{a}{2} x^2 + bx + c \right).$$

Звідки інтегруванням знаходимо U_2, одержуємо рівність

$$U_2(x, y) = -\frac{\sqrt{1 - p^2}}{1 - p^2} \left(\left(\frac{a}{2} x^2 + bx \right) (2y + e) + cy + g \right) \ \forall (x, y) \in D \tag{52}$$

(g — довільна дійсна стала).

Отже, шукана $\Phi_{1,0}$ має компоненти $\mathrm{U}_k\left[\Phi_{1,0}\right] = U_k$, $k = \overline{1, 4}$, де $U_1 \equiv 0$, U_2 визначається рівністю (52), U_3 — формулами (46) і (50), U_4 — рівністю (51), в усіх рівностях a, b, c, d, e, f, g позначають довільні дійсні сталі.

Цитована література

1. *Грищук С.В.* Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. I // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 8. – С. 1058–1071.
2. *Грищук С.В.* Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. II // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 10. – С. 1382–1389.
3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. *Шерман Д.И.* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды // Труды сейсм. ин-та АН СССР. – 1938. – № 86. – С. 51–78.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
6. *Фридман М.М.* Математическая теория упругости анизотропных сред // Прикладная математика и механика. – 1950. – Т. 14, № 3. – С. 321–340.
7. *Боган Ю.А.* Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи в анизотропной двумерной теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 4. – С. 17–26.
8. *Михлин С.Г.* Плоская задача теории упругости // Труды сейсм. ин-та АН СССР. – 1934. – № 65. – 83 с.
9. *Мельниченко И.П.* Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, № 2. – С. 252–254.
10. *Study E.* Über systeme complexer zahlen und ihre anwendungen in der theorie der transformationsgruppe. Monatshefte für Mathematik. – 1890. – **1**, No. 1. –P. 283–354.
11. *Чеботарев Н.Г.* Введение в теорию алгебр. – Изд. 3-е. /Физико-математическое наследие: математика (алгебра). – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 88 с.
12. *Ковалев В.Ф., Мельниченко И.П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 25–27.
13. *Грищук С.В., Плакса С.А.* О логарифмичном вычете моногенных функций бигармонической переменной. Комплексний аналіз і течії з вільними границями // Зб. праць Ін-ту матемематики НАН України. – 2010. – Т. 7, № 2. – С. 227–234.
14. *Плакса С.А., Пухтаєвич Р.П.* Конструктивний опис моногенних функцій в скінченновимірній напівпростій комутативній алгебрі // Доповіді НАН України. – 2014. – № 1. – С. 14–21.
15. *Plaksa S.A., Pukhtaievych R.P.* Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra // An. St. Univ. Ovidius Constanta. – 2014. – **22**, No. 1. – P. 221–235.
16. *Shpakivskyi V.S.* Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. – 2015. – **12**, № 3. –P. 251–268.

References

1. Gryshchuk, S.V. (2018). Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. I. *Ukr. Mat. Zh., 70*(8), 1058-1071 (in Ukrainian).
2. Gryshchuk, S.V. (2018). Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. II. *Ukr. Mat. Zh., 70*(10), 1382-1389 (in Ukrainian).
3. Lekhnitskii, S.G. (1981) *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body.* Moscow: MIR Publishers.
4. Sherman, D.I. (1938). The plane problem of the theory of elasticity for an anisotropic medium. *Tr. Seism. Inst. Akad. Nauk SSSR, 86*, 51-78 (in Russian).
5. Muskhelishvili, N.I. (1977). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* Springer Netherlands.
6. Fridman, M.M. (1950). Mathematical theory of elasticity in the anisotropic media. *Prikl. Mat. Mech., 14*(3), 321-340 (in Russian).
7. Bogan, Yu.A. (2005). Regular integral equations for the second boundary value problem in anisotropic two-dimensional theory of elasticity. *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela, 4*, 17-26 (in Russian).
8. Mikhlin, S.G. (1935). The plane problem of the theory of elasticity. *Tr. Seism. Inst. Akad. Nauk SSSR, 65* (in Russian).

9. Mel'nichenko, I.P. (1986). Biharmonic bases in algebras of the second rank. *Ukr. Mat. Zh., 38*(2), 224-226 (in Russian). Translation in (1986) *Ukr. Math. J., 38*(2), 252-254.
10. Study, E. (1890). Über systeme complexer zahlen und ihre anwendungen in der theorie der transformationsgruppe. *Monatshefte für Mathematik, 1*(1), 283-354.
11. Chebotarev, N.G. (2008). *Introduction to the Theory of Algebras.* Moscow: Publ. House "LKI" (in Russian).
12. Kovalev, V.F., Mel'nichenko, I.P. (1981). Biharmonic functions on the biharmonic plane. *Reports Acad. Sci. USSR, ser. A., 8*, 25-27 (in Russian).
13. Gryshchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2010). On logarithmic residue of monogenic functions of biharmonic variable. In *Complex analysis and flows with free boundaries. Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 7*(2), 227-234 (in Russian).
14. Plaksa, S.A., Pukhtaievych, R.P. (2014). Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional semisimple commutative algebra. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., 1*, 14-21 (in Ukrainian).
15. Plaksa, S.A., Pukhtaievych, R.P. (2014). Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra. *An. St. Univ. Ovidius Constanta, 22*(1), 221-235.
16. Shpakivskyi, V.S. (2015). Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 12*(3), 251-268.

S.V. Gryshchuk

Monogenic functions in two dimensional commutative algebras to equations of plane orthotropy.

Among all two-dimensional commutative and assosiative algebras of the second rank with the unity e over the field of complex numbers $\mathbb{C}$ we find a semi-simple algebra $\mathbb{B}_0 := \{c_1e + c_2\omega : c_k \in \mathbb{C}, k = 1,2\}$, $\omega^2 = e$, containing a basis (e_1, e_2), such that $e_1^4 + 2pe_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0$ for any fixed p such that $-1 < p < 1$. A domain $\mathcal{B}_1 = \{(e_1, e_2)\}$, $e_1 = e$, is discribed in an explicit form. We consider an approach of $\mathbb{B}_0$-valued "analytic" functions $\Phi(xe_1 + ye_2) = U_1(x,y)e_1 + U_2(x,y)ie_1 + U_3(x,y)e_2 + U_4(x,y)ie_2$ ($(e_1, e_2) \in \mathcal{B}$, x and y are real variables) such that their real-valued components U_k, $k = \overline{1,4}$, satisfy the equation on finding the stress function u in the case of orthotropic plane deformations (with absence of body forses): $\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x,y) = 0$ for every $(x,y) \in D$, where D is a domain of the Cartesian plane xOy. A characterization of solutions u for this equation in a bounded simply-connected domain via real components U_k, $k = \overline{1,4}$, of the function Φ is done in the following sense: let D be a bounded and simply-connected domain, a solution u is fixed, then u is a first component of monogenic function Φ_u. The variety of such Φ_u is found in a complete form. We consider a particular case of $(e, e_2) \in \mathcal{B}_1$ for which Φ_u can be found in an explicit form. For this case a function Φ_u is obtained in an explicit form. Note, that in case of orthotropic plane deformations, when Eqs. of the stress function is of the form: $\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x,y) = 0$, here p is a fixed number such that $p > 1$, a similar research is done in [*Gryshchuk S. V.* Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. I. Ukr. Mat. Zh. 2018. **70**, No. 8. pp. 1058–1071 (Ukrainian); *Gryshchuk S. V.* Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. II. Ukr. Mat. Zh. 2018. **70**, No. 10. pp. 1382–1389 (Ukrainian)].

Keywords: *anisotropic (orthotropic) media, commutative algebras, monogenic functions, stress function.*

С.В. Грищук

Моногенные функции в двумерных коммутативных алгебрах для уравнений плоской ортотропии.

Среди двумерных коммутативных, ассоциативных алгебр второго ранга с единицей над полем комплексных чисел найдено множество алгебр $\mathbb{B}_0$ (состоит из одной полупростой алгебры), которые содержат базисы (e_1, e_2), такие, что $e_1^4 + 2pe_1^2e_2^2 + e_2^4 = 0$ для каждого фиксированного p, $-1 < p < 1$. Построены $\mathbb{B}_0$-значные "аналитические" функции $\Phi(xe_1 + ye_2)$ ((e_1, e_2) фиксирован, x и y — действительные переменные), такие, что их вещественнозначные компоненты-функции удовлетворяют уравнению для функции напряжений u в случае плоских ортотропных деформаций $\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x, y) = 0$. Найдена характеризация решений u данного уравнения, рассматриваемого в ограниченных односвязных областях, через вещественнозначные компоненты функции Φ.

Ключевые слова: *анизотропная (ортотропная) среда, коммутативные алгебры, моногенные функции, функция напряжений.*

Інститут математики НАН України, Київ *Отримано 03.11.18*
serhii.gryshchuk@gmail.com

UDC 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-4

©2018. **V. Gutlyanskiĭ, V. Ryazanov, E. Yakubov**

DIRICHLET PROBLEM FOR POISSON EQUATIONS IN JORDAN DOMAINS

First, we study the Dirichlet problem for the Poisson equations $\triangle u(z) = g(z)$ with $g \in L^p$, $p > 1$, and continuous boundary data $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ in arbitrary Jordan domains D in $\mathbb{C}$ and prove the existence of continuous solutions u of the problem in the class $W^{2,p}_{\rm loc}$. Moreover, $u \in W^{1,q}_{\rm loc}$ for some $q > 2$ and u is locally Hölder continuous. Furthermore, $u \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}$ with $\alpha = (p-2)/p$ if $p > 2$. Then, on this basis and applying the Leray–Schauder approach, we obtain the similar results for the Dirichlet problem with continuous data in arbitrary Jordan domains to the quasilinear Poisson equations of the form $\triangle u(z) = h(z) \cdot f(u(z))$ with the same assumptions on h as for g above and continuous functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, either bounded or with nondecreasing $|f|$ of $|t|$ such that $f(t)/t \to 0$ as $t \to \infty$. We also give here applications to mathematical physics that are relevant to problems of diffusion with absorbtion, plasma and combustion. In addition, we consider the Dirichlet problem for the Poisson equations in the unit disk $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ with arbitrary boundary data $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ that are measurable with respect to logarithmic capacity. Here we establish the existence of continuous nonclassical solutions u of the problem in terms of the angular limits in $\mathbb{D}$ a.e. on $\partial\mathbb{D}$ with respect to logarithmic capacity with the same local properties as above. Finally, we extend these results to almost smooth Jordan domains with qusihyperbolic boundary condition by Gehring–Martio.

MSC: Primary 30C62,31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35J61. Secondary 30E25, 31C05, 34M50, 35F45, 35Q15.

Keywords: *Dirichlet problem, quasilinear Poisson equation, logarithmic potential, logarithmic capacity, angular limits.*

1. Introduction.

First of all, recall that the **Poisson kernel** is the $2\pi-$periodic function

$$P_r(\Theta) \ := \ \frac{1-r^2}{1-2r\cos\Theta + r^2} \ , \ r<1 \ , \ \Theta \in \mathbb{R} \ . \tag{1}$$

Here we will apply the notation of the **Poisson integral** in the unit disk $\mathbb{D}$:

$$\mathcal{P}_\varphi(z) \ := \ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t) \ \varphi(e^{it}) \ dt \ , \quad z = re^{i\vartheta}, \ r<1 \ , \ \vartheta \in \mathbb{R} \tag{2}$$

for arbitrary continuous functions $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$. As known, $\mathcal{P}_\varphi$ is a harmonic function in $\mathbb{D}$ that is extended by continuity to $\overline{\mathbb{D}}$ with φ as its boundary data, see e.g. I.D.2 in [18].

Similarly, given a Jordan domain D in $\mathbb{C}$ and a continuous boundary function $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$, let us denote by $\mathcal{D}_\varphi$ the harmonic function in D that has the continuous extension to $\overline{D}$ with φ as its boundary data. As known, by the Lindelöf maximum principle, see e.g. Lemma 1.1 in [10], we have the uniqueness theorem for the bounded harmonic functions with continuous boundary data. By the Riemann theorem, see e.g. Theorem II.2.1 in [14], there is a conformal mapping $f : D \to \mathbb{D}$ that is extended to a homeomorphism $\tilde{f} : \overline{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ by the Caratheodory theorem, see e.g. Theorem II.3.4 in [14]. Thus, the **Dirichlet operator** $\mathcal{D}_\varphi$ has the following useful representation

$$\mathcal{D}_\varphi(z) \;=\; \mathcal{P}_{\varphi\circ f_*^{-1}}(f(z)),\; z\in D, \qquad \text{where } f_* = \tilde{f}|_{\partial D}\ . \tag{3}$$

It is also known, see e.g. Corollary 1 in [16], that the **Newtonian potential**

$$N_g(z) \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \log|z-w|\, g(w)\; dm(w) \tag{4}$$

of integrable functions $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ with compact support satisfies the **Poisson equation**

$$\triangle N_g \;=\; g \tag{5}$$

in the distributional sense, i.e.,

$$\int\limits_{\mathbb{C}} N_g(z)\,\triangle\psi(z)\,dm(z) \;=\; \int\limits_{\mathbb{C}} \psi(z)\,g(z)\,dm(z) \qquad \forall\ \psi\in C_0^\infty(\mathbb{C})\ . \tag{6}$$

As usual, here $C_0^\infty(\mathbb{C})$ denotes the class of all infinitely differentiable functions $\psi :\ \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ with compact support in $\mathbb{C}$, $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ is the Laplace operator and $d\,m(z)$ corresponds to the Lebesgue measure in $\mathbb{C}$.

2. Dirichlet problem with continuous data.

By Theorem 2 in [16] we come to the following result on the existence, regularity and representation of solutions for the Dirichlet problem to the Poisson equation in arbitrary Jordan domains D in $\mathbb{C}$ where we assume that the charge density g is extended by zero outside of D.

Theorem 1. *Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$, $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ be a continuous function and $g : D \to \mathbb{R}$ belong to the class $L^p(D)$ for $p > 1$. Then the function*

$$U \;:=\; N_g \;-\; \mathcal{D}_{N_g^*} \;+\; \mathcal{D}_\varphi\ , \qquad N_g^* \;:=\; N_g|_{\partial D}\ , \tag{7}$$

is continuous in $\overline{D}$ with $U|_{\partial D} = \varphi$, belongs to the class $W^{2,p}_{\rm loc}(D)$ and satisfies the Poisson equation $\triangle U = g$ a.e. in D. Moreover, $U \in W^{1,q}_{\rm loc}(D)$ for some $q > 2$ and U is locally Hölder continuous in D. Furthermore, $U \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}(D)$ with $\alpha = (p-2)/p$ if $g \in L^p(D)$ for $p > 2$.

Remark 1. Note also by the way that a generalized solution of the Dirichlet problem to the Poisson equation in the class $C(\overline{D})\cap W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ is unique at all, see e.g. Theorem 8.30 in [13], and (7) gives the effective representation of this unique solution.

The case of quasilinear Poisson equations is reduced to the case of the linear Poisson equations by the Leray–Schauder approach.

Theorem 2. *Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$, $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ be a continuous function and $h : D \to \mathbb{R}$ be a function in the class $L^p(D)$ for $p > 1$. Suppose that a continuous function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ has nondecreasing $|f|$ of $|t|$ and*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} \ = \ 0 \ . \tag{8}$$

Then there is a continuous function $U : \overline{D} \to \mathbb{R}$ with $U|_{\partial D} = \varphi$, $U|_D \in W^{2,p}_{\rm loc}$ such that

$$\triangle U(z) \ = \ h(z) \cdot f(U(z)) \qquad \text{for a.e. } z \in D \ . \tag{9}$$

Moreover, $U \in W^{1,q}_{\rm loc}(D)$ for some $q > 2$ and U is locally Hölder continuous. Furthermore, $U \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}(D)$ with $\alpha = (p-2)/p$ if $p > 2$.

In particular, the latter statement in Theorem 2 implies that $U \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}(D)$ for all $\alpha = (0,1)$ if h is bounded.

Proof. If $\|h\|_p = 0$ or $\|f\|_C = 0$, then the Dirichlet operator $\mathcal{D}_\varphi$ gives the desired solution of the Dirichlet problem for equation (9), see e.g. I.D.2 in [18]. Hence we may assume further that $\|h\|_p \neq 0$ and $\|f\|_C \neq 0$.

By Theorem 1 and the maximum principle for harmonic functions, we obtain the family of operators $F(g;\tau) : L^p(D) \to L^p(D)$, $\tau \in [0,1]$:

$$F(g;\tau) \ := \ \tau h \cdot f(N_g - \mathcal{D}_{N_g^*} + \mathcal{D}_\varphi) \ , \ N_g^* := N_g|_{\partial D} \ , \qquad \forall \ \tau \in [0,1] \tag{10}$$

which satisfies all groups of hypothesis H1-H3 of Theorem 1 in [22].

H1). First of all, $F(g;\tau) \in L^p(D)$ for all $\tau \in [0,1]$ and $g \in L^p(D)$ because by Theorem 1 $f(N_g - \mathcal{D}_{N_g^*} + \mathcal{D}_\varphi)$ is a continuous function and, moreover, by Theorem 1 in [16]

$$\|F(g;\tau)\|_p \ \leq \ \|h\|_p \ |f\,(\,2M\,\|g\|_p + \|\varphi\|_C)\,| \ < \ \infty \qquad \forall \ \tau \in [0,1] \ .$$

Thus, by Theorem 1 in combination with the Arzela–Ascoli theorem, see e.g. Theorem IV.6.7 in [6], the operators $F(g;\tau)$ are completely continuous for each $\tau \in [0,1]$ and even uniformly continuous with respect to the parameter $\tau \in [0,1]$.

H2). The index of the operator $F(g;0)$ is obviously equal to 1.

H3). By Theorem 1 in [16] and the maximum principle for harmonic functions, we have the estimate for solutions $g \in L^p$ of the equations $g = F(g;\tau)$:

$$\|g\|_p \ \leq \ \|h\|_p \ |f\,(\,2M\,\|g\|_p + \|\varphi\|_C)\,| \ \leq \ \|h\|_p \ |f(\,3M\,\|g\|_p)|$$

whenever $\|g\|_p \geq \|\varphi\|_C/M$, i.e. then it should be

$$\frac{|f(\,3M\,\|g\|_p)|}{3M\,\|g\|_p} \ \geq \ \frac{1}{3M\,\|h\|_p} \tag{11}$$

and hence $\|g\|_p$ should be bounded in view of condition (8).

Thus, by Theorem 1 in [22] there is a function $g \in L^p(D)$ such that $g = F(g;1)$ and, consequently, by our Theorem 1 the function $U := N_g - \mathcal{D}_{N_g^*} + \mathcal{D}_\varphi$ gives the desired solution of the Dirichlet problem for the quasilinear Poisson equation (9). □

Remark 2. As it is clear from the proof, Theorem 2 is valid if f is an arbitrary continuous bounded function. Moreover, condition (8) can be replaced by the weaker

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{|f(t)|}{t} \ < \ \frac{1}{3M\|h\|_p} \tag{12}$$

where M is the constant from the estimate (14) of Theorem 1 in [16].

Theorem 2 together with Remark 2 can be applied to some physical problems. The first circle of such applications is relevant to reaction-diffusion problems. Problems of this type are discussed in [5], p. 4, and, in detail, in [2]. A nonlinear system is obtained for the density u and the temperature T of the reactant. Upon eliminating T the system can be reduced to the equation

$$\triangle u \ = \ \lambda \cdot f(u) \tag{13}$$

with $h(z) \equiv \lambda > 0$ and, for isothermal reactions, $f(u) = u^q$ where $q > 0$ is called the order of the reaction. It turns out that the density of the reactant u may be zero in a subdomain called a **dead core.** A particularization of results in Chapter 1 of [5] shows that a dead core may exist just if and only if $0 < q < 1$ and λ is large enough, see also the corresponding examples in [15]. In this connection, the following statements may be of independent interest.

Corollary 1. *Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$, $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ be a continuous function and let $h : D \to \mathbb{R}$ be a function in the class $L^p(D)$, $p > 1$. Then there exists a continuous function $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ with $u|_{\partial D} = \varphi$ such that $u \in W^{2,p}_{\rm loc}(D)$ and*

$$\triangle\, u(z) \ = \ h(z) \cdot u^q(z)\ , \quad 0 \ < \ q \ < \ 1 \tag{14}$$

a.e. in D. Moreover, $u \in W^{1,\beta}_{\rm loc}(D)$ for some $\beta > 2$ and u is locally Hölder continuous in D. Furthermore, $u \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}(D)$ with $\alpha = (p-2)/p$ if $p > 2$.

Corollary 2. *Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$ and $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Then there is a continuous function $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ with $u|_{\partial D} = \varphi$ such that $u \in W^{2,p}_{\rm loc}(D)$ for all $p \geq 1$ and*

$$\triangle\, u(z) \ = \ u^q(z)\ , \quad 0 \ < \ q \ < \ 1\ , \tag{15}$$

a.e. in D. Moreover, $u \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}(D)$ for all $\alpha \in (0,1)$.

Note also that certain mathematical models of a thermal evolution of a heated plasma lead to nonlinear equations of the type (13). Indeed, it is known that some of them have the form $\triangle\psi(u) = f(u)$ with $\psi'(0) = +\infty$ and $\psi'(u) > 0$ if $u \neq 0$ as, for instance, $\psi(u) = |u|^{q-1}u$ under $0 < q < 1$, see e.g. [5]. With the replacement of the function $U = \psi(u) = |u|^q \cdot \operatorname{sign} u$, we have that $u = |U|^Q \cdot \operatorname{sign} U$, $Q = 1/q$, and, with the choice $f(u) = |u|^{q^2} \cdot \operatorname{sign} u$, we come to the equation $\triangle U = |U|^q \cdot \operatorname{sign} U = \psi(U)$.

Corollary 3. *Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$ and $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Then there is a continuous function $U : \overline{D} \to \mathbb{R}$ with $U|_{\partial D} = \varphi$ such that $u \in W^{2,p}_{\rm loc}(D)$ for all $p \geq 1$ and*

$$\triangle U(z) \ = \ |U(z)|^{q-1}U(z) \ , \quad 0 \ < \ q \ < \ 1 \ , \tag{16}$$

a.e. in D. Moreover, $U \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}(D)$ for all $\alpha \in (0,1)$.

Finally, we recall that in the combustion theory, see e.g. [3], [24] and the references therein, the following model equation

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \ = \ \frac{1}{\delta} \cdot \triangle u \ + \ e^u \ , \quad t \geq 0, \ z \in D, \tag{17}$$

takes a special place. Here $u \geq 0$ is the temperature of the medium and δ is a certain positive parameter.

We restrict ourselves here by the stationary case, although our approach makes it possible to study the parabolic equation (17), see [15]. Namely, the equation (9) is appeared here with $h \equiv \delta > 0$ and the function $f(u) = e^{-u}$ that is bounded as in Remark 2.

Corollary 4. *Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$ and $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Then there is a continuous function $U : \overline{D} \to \mathbb{R}$ with $U|_{\partial D} = \varphi$ such that $u \in W^{2,p}_{\rm loc}(D)$ for all $p \geq 1$ and*

$$\triangle U(z) \ = \ \delta \cdot e^{-U(z)} \ , \quad \delta > 0 \ , \tag{18}$$

a.e. in D. Moreover, $U \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}(D)$ for all $\alpha \in (0,1)$.

Due to the factorization theorem in [15], we plan to extend these results to semi–linear equations describing the corresponding physical phenomena in anisotropic and inhomogeneous media in arbitrary Jordan domains.

3. The definition and preliminary remarks on the logarithmic capacity.

Given a bounded Borel set E in the plane $\mathbb{C}$, a **mass distribution** on E is a nonnegative completely additive function ν of a set defined on its Borel subsets with $\nu(E) = 1$. The function

$$U^{\nu}(z) := \int\limits_E \log \left| \frac{1}{z-\zeta} \right| \, d\nu(\zeta) \tag{19}$$

is called a **logarithmic potential** of the mass distribution ν at a point $z \in \mathbb{C}$. A **logarithmic capacity** $C(E)$ of the Borel set E is the quantity

$$C(E) = e^{-V} \ , \qquad V \ = \ \inf_{\nu} \ V_{\nu}(E) \ , \qquad V_{\nu}(E) \ = \ \sup_{z} \ U^{\nu}(z) \ . \tag{20}$$

It is also well-known the following geometric characterization of the logarithmic capacity, see e.g. the point 110 in [23]:

$$C(E) \ = \ \tau(E) \ := \ \lim_{n\to\infty} \ V_n^{\frac{2}{n(n-1)}} \tag{21}$$

where V_n denotes the supremum of the product

$$V(z_1, \ldots, z_n) \ = \ \prod_{k<l}^{l=1,\ldots,n} |z_k - z_l| \tag{22}$$

taken over all collections of points $z_1, \ldots, z_n$ in the set E. Following Fékete, see [9], the quantity $\tau(E)$ is called the **transfinite diameter** of the set E.

Remark 3. Thus, we see that if $C(E) = 0$, then $C(f(E)) = 0$ for an arbitrary mapping f that is continuous by Hölder and, in particular, for quasiconformal mappings on compact sets, see e.g. Theorem II.4.3 in [21].

In order to introduce sets that are measurable with respect to logarithmic capacity, we define, following [7], **inner** C_* and **outer** C^* **capacities** :

$$C_*(E) \ : \ = \ \sup_{F\subseteq E} \ C(E), \qquad \qquad C^*(E) \ : \ = \ \inf_{E\subseteq O} \ C(O) \tag{23}$$

where supremum is taken over all compact sets $F \subset \mathbb{C}$ and infimum is taken over all open sets $O \subset \mathbb{C}$. A **set** $E \subset \mathbb{C}$ is called **measurable with respect to the logarithmic capacity** if $C^*(E) = C_*(E)$, and the common value of $C_*(E)$ and $C^*(E)$ is still denoted by $C(E)$.

A **function** $\varphi : E \to \mathbb{C}$ defined on a bounded set $E \subset \mathbb{C}$ is called **measurable with respect to logarithmic capacity** if, for all open sets $O \subseteq \mathbb{C}$, the sets

$$\Omega = \{z \in E : \varphi(z) \in O\} \tag{24}$$

are measurable with respect to logarithmic capacity. It is clear from the definition that the set E is itself measurable with respect to logarithmic capacity.

Note also that sets of logarithmic capacity zero coincide with sets of the so-called **absolute harmonic measure** zero introduced by Nevanlinna, see Chapter V in [23]. Hence a set E is of (Hausdorff) length zero if $C(E) = 0$, see Theorem V.6.2 in [23]. However, there exist sets of length zero having a positive logarithmic capacity, see e.g. Theorem IV.5 in [7].

Remark 4. It is known that Borel sets and, in particular, compact and open sets are measurable with respect to logarithmic capacity, see e.g. Lemma I.1 and Theorem III.7 in [7]. Moreover, as it follows from the definition, any set $E \subset \mathbb{C}$ of finite logarithmic capacity can be represented as a union of a sigma-compactum (union of countable collection of compact sets) and a set of logarithmic capacity zero. Thus, the measurability of functions with respect to logarithmic capacity is invariant under Hölder continuous change of variables.

It is also known that the Borel sets and, in particular, compact sets are measurable with respect to all Hausdorff's measures and, in particular, with respect to measure of length, see e.g. theorem II(7.4) in [27]. Consequently, any set $E \subset \mathbb{C}$ of finite logarithmic capacity is measurable with respect to measure of length. Thus, on such a set any function $\varphi : E \to \mathbb{C}$ being measurable with respect to logarithmic capacity is also measurable with respect to measure of length on E. However, there exist functions that are measurable with respect to measure of length but not measurable with respect to logarithmic capacity, see e.g. Theorem IV.5 in [7].

Dealing with measurable boundary functions $\varphi(\zeta)$ with respect to the logarithmic capacity, we will use the **abbreviation q.e. (quasi-everywhere)** on a set $E \subset \mathbb{C}$, if a property holds for all $\zeta \in E$ except its subset of zero logarithmic capacity, see [19].

4. Dirichlet problem with measurable data in the unit disk.

In the paper [8], it was proved as Theorem 3.1 the following analog of the known Luzin theorem in terms of logarithmic capacity, cf. e.g. Theorem VII(2.3) in [27].

Proposition 1. *Let $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a measurable function with respect to logarithmic capacity. Then there is a continuous function $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ such that $\Phi'(x) = \varphi(x)$ q.e. on (a, b). Furthermore, the function Φ can be chosen such that $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ and $|\Phi(x)| \le \varepsilon$ under arbitrary prescribed $\varepsilon > 0$ for all $x \in [a, b]$.*

Corollary 5. *Let $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ be a measurable function with respect to logarithmic capacity. Then there is a continuous function $\Phi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ such that $\Phi'(e^{it}) = \varphi(e^{it})$ q.e. on $\mathbb{R}$.*

The **Poisson–Stieltjes integral**

$$\Lambda_\Phi(z) \ := \ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta - t)\ d\Phi(e^{it}) \ , \quad z = re^{i\vartheta},\ r < 1\ ,\ \vartheta \in \mathbb{R} \tag{25}$$

is well-defined for arbitrary continuous functions $\Phi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, see e.g. Section 2 in [26].

Directly by the definition of the Riemann–Stieltjes integral and the Weierstrass type theorem for harmonic functions, see e.g. Theorem I.3.1 in [14], Λ_Φ is a harmonic function in the unit disk $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ because the function $P_r(\vartheta - t)$ is the real part of the analytic function

$$\mathcal{A}_\zeta(z) \ := \ \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \ , \quad \zeta = e^{it}, \quad z = re^{i\vartheta}\ ,\ r < 1\ ,\ \vartheta \text{ and } t \in \mathbb{R}\ . \tag{26}$$

Next, by Theorem 1 in [26] we have the following useful conclusion.

Proposition 2. *Let $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ be a measurable function with respect to logarithmic capacity and $\Phi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ be a continuous function with $\Phi'(e^{it}) = \varphi(e^{it})$ q.e. on $\mathbb{R}$. Then Λ_Φ has the angular limit*

$$\lim_{z\to\zeta} \Lambda_\Phi(z) \ = \ \varphi(\zeta) \qquad q.e. \ on \ \partial\mathbb{D} \ . \tag{27}$$

Finally, by Theorem 2 in [16], Proposition 2 and the known Poisson formula, see e.g. I.D.2 in [18], we come to the following result on the existence, regularity and representation of solutions for the Dirichlet problem to the Poisson equation in the unit disk $\mathbb{D}$. We assume that the charge density g is extended by zero outside of $\mathbb{D}$ in the next theorem.

Theorem 3. *Let a function $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ be measurable with respect to logarithmic capacity and let a continuous function Φ correspond to φ by Corollary 5. Suppose that a function $g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ is in the class $L^p(\mathbb{D})$ for $p > 1$. Then the following function in $\mathbb{D}$*

$$U \ := \ N_g \ - \ \mathcal{P}_{N_g^*} \ + \ \Lambda_\Phi \ , \qquad\qquad N_g^* \ := \ N_g|_{\partial\mathbb{D}} \ , \tag{28}$$

belongs to the class $W^{2,p}_{\rm loc}(\mathbb{D})$, satisfies the Poisson equation $\triangle U = g$ a.e. in $\mathbb{D}$ and has the angular limit

$$\lim_{z\to\zeta} U(z) \ = \ \varphi(\zeta) \qquad q.e. \ on \ \partial\mathbb{D} \ . \tag{29}$$

Moreover, $U \in W^{1,q}_{\rm loc}(\mathbb{D})$ for some $q > 2$ and U is locally Hölder continuous. Furthermore, $U \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}(\mathbb{D})$ with $\alpha = (p-2)/p$ if $g \in L^p(\mathbb{D})$ for $p > 2$.

Remark 5. Note that by the Luzin result, see also Theorem 3 in [26], the statement of Theorem 3 is valid in terms of the length measure as well as the harmonic measure on $\partial\mathbb{D}$. However, by the well–known Ahlfors–Beurling example, see [1], the sets of length zero as well as of harmonic measure zero are not invariant with respect to quasiconformal changes of variables. The latter circumstance does not make it is possible to apply the result in the future for the extension of the statement to generalizations of the Laplace equation in anisotropic and inhomogeneous media. Hence we prefer to use logarithmic capacity.

5. Dirichlet problem with measurable data in almost smooth domains.

We say that a Jordan curve Γ in $\mathbb{C}$ is **almost smooth** if Γ has a tangent q.e. Here it is said that a straight line L in $\mathbb{C}$ is **tangent** to Γ at a point $z_0 \in \Gamma$ if

$$\limsup_{z\to z_0, z\in\Gamma} \frac{\text{dist}\,(z, L)}{|z - z_0|} \ = \ 0 \ . \tag{30}$$

In particular, Γ is almost smooth if Γ has a tangent at all its points except a countable set. The nature of such Jordan curves Γ is complicated enough because the countable set can be everywhere dense in Γ.

Now, given a domain D in $\mathbb{C}$, $k_D(z, z_0)$ denotes the **quasihyperbolic distance**,

$$k_D(z, z_0) \ := \ \inf_{\gamma} \int\limits_{\gamma} \frac{ds}{d(\zeta, \partial D)} \ , \tag{31}$$

introduced in the paper [12]. Here $d(\zeta, \partial D)$ denotes the Euclidean distance from the point $\zeta \in D$ to ∂D and the infimum is taken over all rectifiable curves γ joining the points z and z_0 in D.

Next, it is said that a domain D satisfies the **quasihyperbolic boundary condition** if

$$k_D(z, z_0) \ \leq \ a \ln \frac{d(z_0, \partial D)}{d(z, \partial D)} + b \qquad \forall \ z \in D \tag{32}$$

for constants a and b and a point $z_0 \in D$. The latter notion was introduced in [10] but, before it, was first applied in [4].

Remark 6. Given a Jordan domain D in $\mathbb{C}$ with the almost smooth boundary satisfying the quasihyperbolic boundary condition. By the Riemann theorem, see e.g. Theorem II.2.1 in [14], there is a conformal mapping $f : D \to \mathbb{D}$ that is extended to a homeomorphism $\tilde{f} : \overline{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ by the Caratheodory theorem, see e.g. Theorem II.3.4 in [14]. Moreover, $f_* := \tilde{f}|_{\partial D}$, as well as f_*^{-1}, is Hölder continuous by Corollary to Theorem 1 in [4]. Thus, by Remark 4 a function $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ is measurable with respect to logarithmic capacity if and only if the function $\psi := \varphi \circ f_*^{-1} : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ is so. Set $\Phi := \Psi \circ f_*$ where $\Psi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ is a continuous function corresponding to ψ by Corollary 5.

Proposition 3. *Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$ with the almost smooth boundary satisfying the quasihyperbolic boundary condition. Suppose that $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ is measurable with respect to logarithmic capacity and $\Phi : \partial D \to \mathbb{R}$ is the continuous function corresponding to φ by Remark 6. Then the harmonic function $\mathcal{L}_{\Phi}(z) := \Lambda_{\Phi \circ f_*^{-1}}(f(z))$ has the angular limit φ q.e. on ∂D.*

Proof. Indeed, by Remark 6 and Proposition 2 there is the angular limit

$$\lim_{w \to \xi} \ \Lambda_{\Psi}(w) \ = \ \psi(\xi) \qquad \text{q.e. on } \partial\mathbb{D} \ . \tag{33}$$

By the Lindelöf theorem, see e.g. Theorem II.C.2 in [18], if ∂D has a tangent at a point ζ, then

$$\arg \, [\tilde{f}(\zeta) - \tilde{f}(z)] - \arg \, [\zeta - z] \to const \qquad \text{as } z \to \zeta \ .$$

After the change of variables $\xi := \tilde{f}(\zeta)$ and $w := \tilde{f}(z)$, we have that

$$\arg \, [\xi - w] - \arg \, [\tilde{f}^{-1}(\xi) - \tilde{f}^{-1}(w)] \to const \qquad \text{as } w \to \xi \ .$$

In other words, the conformal images of sectors in $\mathbb{D}$ with a vertex at ξ is asymptotically the same as sectors in D with a vertex at ζ. Thus, nontangential paths in $\mathbb{D}$ are transformed under $\tilde{f}^{-1}$ into nontangential paths in D.

Recall that firstly the almost smooth Jordan curve ∂D has a tangent q.e., secondly by Remark 6 the mappings f_* and f_*^{-1} are Hölder continuous, and thirdly by Remark 3 they transform sets of logarithmic capacity zero into sets of logarithmic capacity zero. Consequently, (33) implies the desired conclusion. $\Box$

Finally, by Theorem 2 in [16], Proposition 3 and the Poisson formula, we come to the following result on the existence, regularity and representation of solutions for the Dirichlet problem to the Poisson equation in the Jordan domains. We assume here that the charge density g is extended by zero outside of D in the next theorem.

Theorem 4. *Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$ with the almost smooth boundary satisfying the quasihyperbolic boundary condition, a function $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ be measurable with respect to logarithmic capacity and let a continuous function Φ correspond to φ by Remark 6. Suppose that a function $g : D \to \mathbb{R}$ is in the class $L^p(D)$ for $p > 1$. Then the following function in D*

$$U \ := \ N_g \ - \ \mathcal{D}_{N_g^*} \ + \ \mathcal{L}_\Phi \ , \qquad\qquad N_g^* \ := \ N_g|_{\partial D} \ , \tag{34}$$

belongs to the class $W^{2,p}_{\rm loc}(D)$, satisfies the Poisson equation $\triangle U = g$ a.e. in D and has the angular limit

$$\lim_{z\to\zeta} \ U(z) \ = \ \varphi(\zeta) \qquad q.e. \ on \ \partial D \ . \tag{35}$$

Moreover, $U \in W^{1,q}_{\rm loc}(D)$ for some $q > 2$ and U is locally Hölder continuous. Furthermore, $U \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}(D)$ with $\alpha = (p-2)/p$ if $g \in L^p(D)$ for $p > 2$.

Remark 7. Note that by the Luzin result, see also Theorem 3 in [26], the statement of Theorem 4 is valid in terms of the length measure on rectifiable ∂D. Indeed, by the Riesz theorem length $f_*^{-1}(E) = 0$ whenever $E \subset \partial\mathbb{D}$ with $|E| = 0$, see e.g. Theorem II.C.1 and Theorems II.D.2 in [18]. Conversely, by the Lavrentiev theorem $|f_*(\mathcal{E})| = 0$ whenever $\mathcal{E} \subset \partial D$ and length $\mathcal{E} = 0$, see [20], see also the point III.1.5 in [25].

References

1. Ahlfors, L., Beurling, A. (1956). The boundary correspondence under quasiconformal mappings. *Acta Math., 96*, 125-142.
2. Aris, R. (1975). *The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts.* V. I-II. Oxford: Clarendon Press.
3. Zeldovich, Ia.B., Barenblatt, G.I., Librovich, V.B., Makhviladze, G.M. (1985). *The mathematical theory of combustion and explosions.* New York: Consult. Bureau.
4. Becker, J., Pommerenke, Ch. (1982). Hölder continuity of conformal mappings and nonquasiconformal Jordan curves. *Comment. Math. Helv., 57*(2), 221-225.
5. Diaz, J.I. (1985). Nonlinear partial differential equations and free boundaries. V. I. Elliptic equations. In *Research Notes in Mathematics.* (Vol. 106). Boston: Pitman.
6. Dunford, N., Schwartz, J.T. (1958). *Linear Operators. I. General Theory, Pure and Applied Mathematics.* (Vol. 7). New York, London: Interscience Publishers.
7. Carleson L. (1971). *Selected Problems on Exceptional Sets.* Princeton etc.: Van Nostrand Co., Inc.
8. Efimushkin, A.S., Ryazanov, V.I. (2015). On the Riemann-Hilbert problem for the Beltrami equations in quasidisks. *Ukr. Mat. Visn. 12*(2), 190-209; *J. Math. Sci. (N.Y.) 211*(5), 646-659.

9. Fékete, M. (1923). Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Math. Z., 17*, 228-249.
10. Garnett, J.B., Marshall, D.E. (2005). *Harmonic Measure.* Cambridge: Cambridge Univ. Press.
11. Gehring, F.W., Martio, O. (1985). Lipschitz classes and quasiconformal mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 10*, 203-219.
12. Gehring, F.W., Palka, B.P. (1976). Quasiconformally homogeneous domains. *J. Analyse Math., 30*, 172-199.
13. Gilbarg, D., Trudinger, N. (1983). Elliptic partial differential equations of second order. In *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* (Vol. 224). Berlin: Springer-Verlag; (1989) Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka. Moscow: Nauka.
14. Goluzin, G.M. (1969). *Geometric theory of functions of a complex variable.* Transl. of Math. Monographs. 26. Providence, R.I.: American Mathematical Society.
15. Gutlyanskii, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I. (2017). On quasiconformal maps and semilinear equations in the plane. *Ukr. Mat. Visn., 14*(2), 161-191; (2018) *J. Math. Sci., 229*(1), 7-29.
16. Gutlyanskii, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I. (2017). On the Dirichlet problem for quasilinear Poisson equations. *Proc. IAMM NASU, 31*, 28-37.
17. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2015). On the boundary value problems for quasiconformal functions in the plane. *Ukr. Mat. Visn., 12*(3), 363-389; (2016) *J. Math. Sci. (N.Y.), 214*(2), 200-219.
18. Koosis, P. (1998). *Introduction to H^p spaces.* Cambridge Tracts in Mathematics. (Vol. 115). Cambridge: Cambridge Univ. Press.
19. Landkof, N. S. (1966). *Foundations of modern potential theory.* Moscow: Nauka; (1972) Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. (Vol. 180). New York-Heidelberg: Springer-Verlag.
20. Lavrentiev, M. (1936). On some boundary problems in the theory of univalent functions. *Mat. Sbornik N.S., 1 (43)*(6), 815-846 (in Russian).
21. Lehto, O., Virtanen, K.J. (1973). *Quasiconformal mappings in the plane.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
22. Leray, J., Schauder, Ju. (1934). Topologie et equations fonctionnelles. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 51*(3), 45-78 (in French); (1946) Topology and functional equations. *Uspehi Matem. Nauk (N.S.), 1*,(3-4) (13-14), 71-95.
23. Nevanlinna, R. (1944). *Eindeutige analytische Funktionen.* Michigan: Ann Arbor.
24. Pokhozhaev, S.I. (2010). On an equation of combustion theory. *Mat. Zametki,. 88*(1), 53-62; (2010) *Math. Notes, 88*(1-2), 48-56.
25. Priwalow, I.I. (1956). *Randeigenschaften analytischer Funktionen.* Hochschulbücher für Mathematik. (Bd. 25). Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.
26. Ryazanov, V. (2018). The Stieltjes integrals in the theory of harmonic functions. Investigations on linear operators and function theory. Part 46, *Zap. Nauchn. Sem. POMI, 467*, 151-168; (2019) *J. Math. Sci. (N. Y.), 243*(6), 922-933.
27. Saks, S. (1937). *Theory of the integral.* Warsaw; (1964) New York: Dover Publications Inc.

В. Гутлянский, В. Рязанов, Э. Якубов

Задача Дирихле для уравнений Пуассона в жордановых областях.

Прежде всего, мы изучаем задачу Дирихле для уравнений Пуассона $\triangle u(z) = g(z)$ с $g \in L^p$, $p > 1$, и непрерывными граничными данными $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ в произвольных жордановых областях $D \subset \mathbb{C}$ и доказываем существование непрерывных решений u этой задачи в классе $W^{2,p}_{\rm loc}$. Кроме того, $u \in W^{1,q}_{\rm loc}$ для некоторого $q > 2$ и u локально непрерывны по Гельдеру. Более того, $u \in C^{1,\alpha}_{\rm loc}$ с $\alpha = (p-2)/p$, если $p > 2$. Затем, на этой основе и применяя подход Лере–Шаудера, мы получаем аналогичные результаты для задачи Дирихле с непрерывными граничными данными в произвольных жордановых областях для квазилинейных уравнений Пуассона вида $\triangle u(z) = h(z) \cdot f(u(z))$ с теми же предположениями о функции h как выше для g и непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые либо ограничены, либо с неубывающим $|f|$ от $|t|$, таких, что $f(t)/t \to 0$ при $t \to \infty$. Мы также приводим здесь приложения к математической физике, которые относятся к задачам диффузии с абсорбцией, плазме и горению. В дополнение, мы рассматриваем задачу Дирихле для уравнений Пуассона в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ с произвольными граничными данными $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, которые измеримы относительно логарифмической емкости. Здесь мы устанавливаем существование неклассических решений этой проблемы в терминах угловых пределов в $\mathbb{D}$ п.в. на $\partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической емкости с теми же локальными свойствами как и выше. Наконец, мы распространяем эти результаты на почти гладкие жордановы области D в $\mathbb{C}$ с квазигиперболическим граничным условием по Герингу–Мартио.

Ключевые слова: *задача Дирихле, квазилинейные уравнения Пуассона, логарифмический потенциал, логарифмическая емкость, угловые пределы.*

В. Гутлянський, В. Рязанов, Е. Якубов

Задача Дірихле для рівнянь Пуасона у жорданових областях.

Перш за все ми вивчаємо задачу Дірихле для рівнянь Пуасона $\triangle u(z) = g(z)$ с $g \in L^p$, $p > 1$, та неперервними граничними даними $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ в довільних жорданових областях $D \subset \mathbb{C}$ та доводимо існування неперервних рішень u цієї задачі в класі $W^{2,p}_{\text{loc}}$. Крім цього, $u \in W^{1,q}_{\text{loc}}$ для деякого $q > 2$ та u локально неперервні за Гельдером. Більш того, $u \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}$ з $\alpha = (p-2)/p$, якщо $p > 2$. Потім, на цій основі, застосовуючи підхід Лере–Шаудера, ми отримуємо аналогічні результати для задачі Дірихле з неперервними граничними даними в довільних жорданових областях для квазілінійних рівнянь Пуасона виду $\triangle u(z) = h(z) \cdot f(u(z))$ з тими же припущеннями про функції h як вище для g та неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які або обмежені, або з неспадним $|f|$ від $|t|$, таких, що $f(t)/t \to 0$ при $t \to \infty$. Ми також наводимо тут додатки до математичної фізики, які відносяться до задач дифузії з абсорбцією, плазмі та горінню. На додаток, ми розглядаємо задачу Дірихле для рівнянь Пуасона в одиничному колі $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ з довільними граничними даними $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, які вимірні відносно логарифмічної ємності. Тут ми встановлюємо існування некласичних рішень цієї проблеми у термінах кутових границь у $\mathbb{D}$ п.в. на $\partial\mathbb{D}$ відносно логаріфмічної ємності з тими ж локальними властивостями як і вище. Нарешті, ми поширюємо ці результати на майже гладкі жорданові області D в $\mathbb{C}$ з квазігіперболічною граничною умовою за Герингом–Мартіо.

Ключові слова: *задача Дірихле, квазілінійні рівняння Пуасона, логарифмічна ємність, кутові межи.*

Institute of Applied Mathematics and Mechanics
of the NAS of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
Holon Institute of Technology, Holon, Israel
vgutlyanskii@gmail.com, Ryazanov@nas.gov.ua,
yakubov@hit.ac.il, eduardyakubov@gmail.com

Received 17.12.2018

УДК 517.54
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-5

©2018. **И.В. Денега**

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В данной работе рассматривается максимум произведения внутренних радиусов n непересекающихся областей, которые содержат точки расширенной комплексной плоскости, и степени γ внутреннего радиуса области, что содержит нулевую точку. Найдено неравенство для внутреннего радиуса области, что содержит точку ноль. Основной результат работы обобщает аналогичные результаты работ [1, 2] на случай произвольного расположения систем точек на $\overline{\mathbb{C}}$.

MSC: 30C75.

Ключевые слова: *внутренний радиус области, непересекающиеся области, функция Грина, трансфинитный диаметр, теорема о минимизации площади, неравенство Коши.*

Предметом изучения данной работы являются экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на комплексной плоскости. Многие такие задачи сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областей, удовлетворяющих определенным условиям (см., например, [1–13]).

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – одноточечная компактификация комплексной плоскости или сфера Римана, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Величина $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$. Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z, a)$ области B соотношениями

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \ln r(B,a) + o(1), z \to a,$$

$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,\infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Систему точек $A_n := \{\, a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$ и $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi$.

Введем обозначения

$$a_{n+1} := a_1, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi}\arg\frac{a_{k+1}}{a_k},$$

$$\alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad k = \overline{1,n}, \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 2.$$

Автор выражает благодарность профессору А.К. Бахтину за постановку задачи и полезные комментарии.

The publication contains the results of studies conducted by President's of Ukraine grant for competitive projects F75/30308 of the State Fund for Fundamental Research.

В данной работе мы исследуем максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

где $B_0,\ B_1,\ B_2,...,B_n,\ n \geqslant 2$, – произвольная система взаимно непересекающихся областей, $A_n := \{a_k\}_{k=1}^n$ – произвольная система разных точек на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_0 = 0$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $\gamma \in (0, n]$.

Следующая теорема обобщает аналогичные результаты работ [1, 2] на случай произвольного расположения систем точек на комплексной плоскости.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n)$, $\Delta \in \mathbb{R}^+$ и $A_n := \{a_k\}_{k=1}^n$ – произвольная система разных точек на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда для любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$ такого, что $I_n(\gamma) > \Delta$, справедливо неравенство*

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} \cdot \Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2}{n-\gamma}}. \tag{2}$$

Доказательство. Аналогично работам [1,2], пусть $d(G)$ — трансфинитный диаметр компактного множества $G \subset \mathbb{C}$. Тогда справедливо соотношение

$$r\left(B_0, 0\right) = r\left(B_0^+, \infty\right) = \frac{1}{d(\overline{\mathbb{C}} \setminus B_0^+)} \leqslant \frac{1}{d(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^+)}, \tag{3}$$

где $B^+ = \{z; \frac{1}{z} \in B\}$.

В силу известной теоремы Пойа [3, с.28], [4, с.34], справедливо неравенство

$$\mu G \leqslant \pi d^2(G),$$

где μG обозначает лебегову меру компактного множества G. Отсюда имеем, что

$$d(G) \geqslant \left(\frac{1}{\pi}\mu G\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда из (3) следует, что

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{d(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^+)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi}\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B}_k^+)}} = \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu \overline{B}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Для ограниченной области D, $a \in D$ рассмотрим класс всех регулярных функций $\psi(z)$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) = 1$, заданных в области D и площадь образа области D при отображении произвольной функцией $\psi(z)$. Из теоремы о минимизации площади [4, с.34] получаем, что

$$\iint\limits_{B} |\psi'(z)|^2 dxdy \geqslant \pi r^2 \left(D, a\right). \tag{5}$$

Полагая $\psi_1(z) = (z-a)$ из (5) следует, что

$$S(D) = \mu(D) \geqslant \pi r^2 \left(D, a\right). \tag{6}$$

Из неравенства (4) непосредственно вытекает, что

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu \overline{B}_k^{+}\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \mu B_k^{+}\right]^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} r^2\left(B_k^{+}, a_k^{+}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} r^2\left(B_k^{+}, a_k^{+}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

С учетом соотношения

$$r\left(B_k^{+}, a_k^{+}\right) = \frac{r\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^2}$$

приходим к неравенству

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Отсюда и из предположения теоремы вытекает соотношение

$$\Delta < r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2(B_k, a_k)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Таким образом,

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \geqslant \Delta \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}. \tag{8}$$

Из неравенства Коши получаем неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4} \geqslant \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r^2\left(B_k, a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Отсюда, имеем

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant \left[n\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant n^{\frac{\gamma}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k,a_k\right)\right]^{\frac{\gamma}{n}}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}} \geqslant n^{\frac{\gamma}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}}\left[\Delta\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\right]^{\frac{\gamma}{n}} =$$

$$= n^{\frac{\gamma}{2}}\Delta^{\frac{\gamma}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2\gamma}{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma^2}{2n}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4} \geqslant n\cdot\Delta^{\frac{2}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{4}{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{\gamma}{n}}.$$

И наконец получаем, что

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{n-\gamma}{n}} \geqslant n\cdot\Delta^{\frac{2}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{4}{n}}.$$

Тогда

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2\left(B_k,a_k\right)}{|a_k|^4}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \left(n\Delta^{\frac{2}{n}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{4}{n}}\right)^{\frac{n}{2(n-\gamma)}} = n^{\frac{n}{2(n-\gamma)}}\Delta^{\frac{1}{n-\gamma}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{-\frac{2}{n-\gamma}}.$$

Отсюда и из соотношения (7) следует неравенство теоремы

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}}\cdot\Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}}\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{\frac{2}{n-\gamma}}.$$

$\square$

Если система точек $A_n := \{a_k\}_{k=1}^n$ такая, что $\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant 1$, тогда получаем следующее утверждение.

Следствие. Пусть $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n)$, $\Delta \in \mathbb{R}^{+}$ и $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$ – произвольная система разных точек на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ такая, что $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$. Тогда для любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$ такого, что $I_n(\gamma) > \Delta$, справедливо неравенство

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant n^{-\frac{n}{2(n-\gamma)}} \cdot \Delta^{-\frac{1}{n-\gamma}}.$$

Цитированная литература

1. *Бахтин А.К.* Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей // Зб. пр. Ін-ту мат-ки НАН України. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 25–33.
2. *Bakhtin A.K.* Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains // J. Math. Sci. – 2018. – V. 234, No. 1. –P. 1–13.
3. *Polya G., Szego G.* Isoperimetric inequalities in mathematical physics. M: Fizmatgiz, 1962.
4. *Goluzin G.M.* Geometric theory of functions of a complex variable. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1969.
5. *Jenkins J.* Univalent functions and conformal mapping. Moscow:Publishing House of Foreign Literature, **256**, 1962 (in Russian).
6. *Hayman V.* Multivalent functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
7. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 1. – С. 3–76.
8. *Dubinin V.N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Birkhäuser/Springer, Basel, 2014. 344 p.
9. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту мат-ки НАН України, 2008. – 308 с.
10. *Bakhtin A., Vygivska L., Denega I. N*-radial systems of points and problems for non-overlapping domains // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Т. 38, № 2. – С. 229–235.
11. *Bakhtin A.K., Zabolotnii Ya.V.* Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – V. 221, No. 5. –P. 623–629.
12. *Bakhtin A.K., Vygivska L.V., Denega I.V.* Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – V. 220, No. 5. – P. 584–590.
13. *Denega I.V., Zabolotnii Ya.V.* Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2017. – V. 62, No. 11. – P. 1611–1618.

References

1. Bakhtin, A.K. (2017). Estimates of inner radii for mutually disjoint domains. *Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU, 14*(1), 25-33 (in Russian).
2. Bakhtin, A.K. (2018). Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *J. Math. Sci., 234*(1), 1-13.
3. Polya, G., Szego, G. (1962). *Isoperimetric inequalities in mathematical physics.* Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
4. Goluzin G.M. (1969). *Geometric theory of functions of a complex variable.* Amer. Math. Soc. Providence, R.I.
5. Jenkins, J. (1962). *Univalent functions and conformal mapping.* Moscow: Publishing House of Foreign Literature (in Russian).
6. Hayman, V. (1958). *Multivalent functions.* Cambridge: Cambridge University Press.

7. Dubinin, V.N. (1994). Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable. *Uspekhi Mat. Nauk, 49*(1), 3-76 (in Russian). Translation in (1994) *Russian Math. Survey, 49*(1), 1-79.
8. Dubinin, V.N. (2014). *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory.* Birkhäuser/Springer, Basel.
9. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Zelinskii, Yu.B. (2008). Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. In *Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU* (in Russian).
10. Bakhtin, A., Vygivska, L., Denega, I. (2017). N-radial systems of points and problems for non-overlapping domains. *Lobachevskii Journal of Mathematics, 38*(2), 229-235.
11. Bakhtin, A.K., Zabolotnii, Ya.V. (2017). Estimates of a product of the inner radii of nonoverlapping domains. *J. Math. Sci., 221*(5), 623-629.
12. Bakhtin, A.K., Vygivska, L.V., Denega, I.V. (2017). Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains. *J. Math. Sci., 220*(5), 584-590.
13. Denega, I.V., Zabolotnii, Ya.V. (2017). Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane. *Complex Variables and Elliptic Equations, 62*(11), 1611-1618.

I.V. Denega

Some estimates for extremal decomposition of the complex plane.

In geometric function theory of complex variable extremal problems on non-overlapping domains are well-known classic direction. A lot of such problems are reduced to determination of the maximum of product of inner radii on the system of non-overlapping domains satisfying a certain conditions. In this paper, we consider the well-known problem of maximum of the functional $r^{\gamma}(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)$, where B_0,...,B_n are pairwise disjoint domains in $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0=0$, $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$ are different points of the circle, $\gamma\in(0,n]$, and $r(B,a)$ is the inner radius of the domain $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ relative to the point a. This problem was posed as an open problem in the Dubinin paper in 1994. Till now, this problem has not been solved, though some partial solutions are available. In the paper an estimate for the inner radius of the domain that contains the point zero is found. The main result of the paper generalizes the analogous results of [1, 2] to the case of an arbitrary arrangement of systems of points on $\overline{\mathbb{C}}$.

Keywords: *inner radius of domain, non-overlapping domains, the Green function, transfinite diameter, theorem on minimizing of the area, the Cauchy inequality.*

І.В. Денега

Деякі оцінки для екстремального розбиття комплексної площини.

У даній роботі розглядається максимум добутку внутрішніх радіусів n неперетинних областей, які містять точки розширеної комплексної площині, і ступеня γ внутрішнього радіусу області, що містить точку нуль. Знайдено нерівність для внутрішнього радіусу області, що містить точку нуль. Основний результат роботи узагальнює аналогічні результати робіт [1, 2] на випадок довільного розташування систем точок на $\overline{\mathbb{C}}$.

Ключові слова: *внутрішній радіус області, області, що не перетинаються, функція Гріна, трансфінітний діаметр, теорема про мінімізацію площі, нерівність Коші.*

Институт математики НАН Украины, Киев
`iradenega@gmail.com`

Получено 22.10.18

УДК 539.3 : 534.1
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-6

©2018. **Н.В. Жоголева**

НЕЛИНЕЙНЫЕ АНГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ЛЯВА ПРИ ЖЕСТКОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ ВОЛНОВОДА

С использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования анизотропной упругой среды построено аналитическое решение задачи определения нелинейных ангармонических возмущений, возникающих при распространении обобщенной упругой поверхностной волны Лява. Рассматривается волновод, состоящий из слоя монокристалла класса m3m кубической системы, жестко закрепленного по верхней грани, а по нижней грани идеально контактирующего с монокристаллическим полупространством класса m3m кубической системы. Проведены численные исследования характеристик нелинейных вторых гармоник для волн из низшей ветви дисперсионного спектра поверхностных волн Лява применительно к слою из монокристалла хлорида натрия на полупространстве из монокристалла кремния. Исследованы амплитудно-частотные зависимости для кинематических характеристик упругих волновых смещений поверхностных сдвиговых волн и их нелинейных вторых гармоник.

MSC: 74J05.

Ключевые слова: *геометрическая и физическая нелинейность, ангармонические эффекты, волны Лява, нелинейные вторые гармоники волн Лява, слой на полупространстве, анизотропные материалы, жесткое закрепление грани волновода.*

1. Введение.

Проблема исследования поверхностных упругих волн в анизотропных по физико-механическим свойствам упругих волноводах, относится к числу ведущих проблем механики деформированного твердого тела и на сегодняшний день сохраняет интерес в теоретическом и прикладном отношениях. Результаты исследования этих проблем являются научной базой для таких технических отраслей как ультраакустическая дефектоскопия, ультразвуковой неразрушающий контроль, геоакустика, акустоэлектроника. С другой стороны, фундаментальное значение исследований по этим направлениям обусловлены логикой развития волновой механики анизотропных деформируемых сред.

Большинство теоретических численно-аналитических исследований процессов распространения упругих волн основывается на линейных моделях волновых процессов. Вопросам анализа нелинейных эффектов при распространении волн малой интенсивности в анизотропных средах посвящен ограниченный круг исследований. Принципиально важная, актуальная в теоретическом и прикладном отношениях проблема описания свойств нелинейных волн в упругих телах пространственного геометрического строения остается на сегодняшний день открытой из-за чрезвычайной сложности неоднородных краевых задач, которые описывают данные волновые эффекты.

В данной работе описано построение и исследование решения задачи определения характеристик нелинейных вторых гармоник обобщенных поверхностных волн Лява, которые распространяются в слое монокристалла хлорида натрия класса m3m кубической системы, расположенном на кремниевом упругом полупространстве аналогичного класса анизотропии, при жестком закреплении внешней грани слоя и идеальном физико-механическом контакте нижней грани слоя с полупространством-подложкой.

2. Постановка и основные соотношения задачи.

Волновод отнесен к системе прямоугольных координат $Ox_1x_2x_3$. Он состоит из слоя $V_1 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq 0\}$ и полупространства-подложки $V_2 = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, 0 < x_3 < \infty\}$. Рассматриваются кристаллографические материалы класса m3m кубической системы, характеризуемые тремя независимыми упругими постоянными второго порядка $c_{11}^{(p)}$, $c_{12}^{(p)}$, $c_{44}^{(p)}$, шестью упругими постоянными третьего порядка $c_{111}^{(p)}$, $c_{112}^{(p)}$, $c_{114}^{(p)}$, $c_{155}^{(p)}$, $c_{123}^{(p)}$, $c_{456}^{(p)}$ и плотностью $\rho^{(p)}$. Кристаллографические направления компонент волновода коллинеарны. Применяется переход к безразмерным координатным переменным и кинематическим характеристикам: $x_j = \tilde{x}_j/R_*$, где $R_* = h$; функции волновых упругих смещений $u_j = \tilde{u}_j/u_*$, где u_* – максимальный уровень амплитуд.

Для анализа нелинейных ангармонических эффектов при распространении поверхностных волн Лява волн вдоль координатного направления Ox_1 используется модель физически и геометрически нелинейного динамического деформирования материала, базирующаяся на представлении упругого потенциала U и механических деформаций ε_{jk} в виде

$$U = \frac{1}{2}c_{jqrk}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{rk} + \frac{1}{6}c_{jqrklm}\varepsilon_{jq}\varepsilon_{rk}\varepsilon_{lm} \qquad (j, q, r, k, l, m = \overline{1,3}) \tag{1}$$

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,j} + u_{l,j}u_{l,k}), \tag{2}$$

где $u_{r,k} = \partial u_r/\partial x_k$, u_r компоненты вектора волновых упругих перемещений.

Компоненты тензора механических напряжений σ_{jd}, представляются в виде суммы линейных и нелинейных составляющих

$$\sigma_{jd} = \sigma_{jd}^{(l)} + \sigma_{jd}^{(n)}, \tag{3}$$

где

$$\sigma_{jd}^{(l)} = c_{jdrk}u_{r,k}, \quad \sigma_{jd}^{(n)} = \frac{1}{2}c_{jdrk}u_{l,r}u_{l,k} + c_{pdrk}u_{j,p}u_{r,k} + \frac{1}{2}c_{jdrklm}u_{r,k}u_{l,m}. \tag{4}$$

Уравнения движения для образующих рассматриваемую волноводную структуру упругих сред при отсутствии объемных сил можно представить в тензорном виде

$$\rho\ddot{u}_j^{(p)} - \sigma_{jd,d}^{(p,l)} = \sigma_{jd,d}^{(p,n)}, \quad (j = \overline{1,3}). \tag{5}$$

В представлениях (5) и последующих соотношениях верхний индекс p у характеристик напряженно-деформированного состояния указывает на то, что соответствующая характеристика относится к компоненте V_p рассматриваемого волновода.

3. Численно-аналитическое решение.

Используется концепция определения составляющих волнового поля в компоненте V_p в виде отрезка разложения по степеням малого параметра $u_j = u_j^{(l)} + \delta u_j^{(n)}$ где $\delta = u_*/R_* << 1$. На основе данного подхода рассматриваемая задача сводится к однородной спектральной задаче относительно комплексной вектор-функции перемещений линейных волн Лява в рассматриваемой структуре и неоднородной краевой задаче определения функции перемещений для нелинейных ангармонических возмущений (вторых гармоник волн Лява).

В рассматриваемой задаче о распространении линейных волн Лява в слое монокристалла класса m3m кубической системы на полупространстве из монокристалла аналогичного класса кубической системы при условии идеального механического контакта компонент волновода и жесткого закрепления внешней грани слоя линейные составляющие исследуемого волнового поля определяются из однородной спектральной краевой задачи

$$\sigma_{2j,j}^{(p,l)} - \rho_p \ddot{u}_2^{(p)} = 0, \quad (p = 1, 2); \tag{6}$$

$$(u_j^{(1,l)})_{x_3=-1} = 0, \quad (u_j^{(1,l)})_{x_3=0} = (u_j^{(2,l)})_{x_3=0},$$
$$(\sigma_{3j}^{(1,l)})_{x_3=0} = (\sigma_{3j}^{(2,l)})_{x_3=0}, \quad (j = (\overline{1,3})). \tag{7}$$

Комплексные вектор-функции линейных волновых перемещений $\vec{u}^{(p,l)}$ характеризуются единственной ненулевой компонентой $u_2^{(p,l)}$. Представления для $u_2^{(p,l)}$ с нормирующим безразмерным параметром $u_2^{(0)}$ для компоненты V_p рассматриваемого волновода имеют вид:

$$u_2^{(l,1)} = u_2^{(0)}(cos(\alpha^{(1)}x_3) - c_{44}^{(2)}\alpha^{(2)}sin(\alpha^{(1)}x_3)/(c_{44}^{(1)}\alpha^{(1)}))e^{-i(\omega t - k_q x_1)},$$
$$u_2^{(l,1)} = u_2^{(0)} e^{-\alpha^{(2)}x_3} e^{-i(\omega t - k_q x_1)}, \tag{8}$$
$$\alpha^{(1)} = ((\Omega_1/c_{44}^{(1)})^{1/2} - k^2)^{1/2}, \quad \alpha^{(2)} = (k^2 - (\Omega_2/c_{44}^{(2)})^{1/2})^{1/2},$$
$$\Omega_p = (\rho_p R_*^2 \omega^2/c_*)^{1/2}.$$

Дисперсионное соотношение, определяющее зависимость нормированного частотного параметра $\Omega = \Omega_2 = (\rho_2/\rho_1)^{1/2}\Omega_1$ и нормированного волнового числа k_q для обобщенных линейных волн Лява моды q в волноводе данного типа имеет вид

$$tg(k_q(\Omega_1^2/k_q^2 - 1)^{1/2}) = -c_{44}^{(1)}(\Omega_1^2/k_q^2 - 1)^{1/2}/c_{44}^{(2)}(1 - \Omega_2^2/k_q^2)^{1/2}. \tag{9}$$

Структура (8), (9) далее используется при определении соотношений задачи поиска соответствующих нелинейных ангармонических возмущений для поверхностных волн Лява. Соотношения второго приближения и краевые условия на границах в рассматриваемом волноводе имеют вид:

$$(\sigma_{ij.j}^{(p,l)})_{\vec{u}^{(p)}=\vec{u}^{(p,n)}} - \rho_p \ddot{u}_i^{(p,n)} = -(\sigma_{ij.j}^{(p,n)})_{\vec{u}^{(p)}=\vec{u}^{(p,l)}}; \qquad (10)$$

$$\begin{gathered}(\sigma_{3i}^{(1,l)})_{\vec{u}^{(1)}=\vec{u}^{(1,n)}} + (\sigma_{3i}^{(1,n)})_{\vec{u}^{(1)}=\vec{u}^{(1,l)}} = \\ = (\sigma_{3i}^{(2,l)})_{\vec{u}^{(2)}=\vec{u}^{(2,n)}} + (\sigma_{3i}^{(2,n)})_{\vec{u}^{(2)}=\vec{u}^{(2,l)}}, \\ u_i^{(2,n)} = u_i^{(1,n)} \quad (i=\overline{1,3}) \quad \text{при } x_3 = 0, \\ u_i^{(1,n)} = 0 \quad (i=\overline{1,3}) \quad \text{при } x_3 = -1. \end{gathered} \qquad (11)$$

Компоненты комплексного вектора напряженности вторых гармоник определяются из соотношений краевой задачи (10), (11) в аналитической форме методами компьютерной алгебры. Из анализа структуры краевой задачи (10), (11) априори выходит, что вторыми гармониками исследуемых линейных волн являются волны P-SV типа, характеризующиеся ненулевыми компонентами $u_1^{(p,n)}$ и $u_3^{(p,n)}$. Вторые гармоники для компонент волновода представляются в виде суммы частного и общего решения соответствующей неоднородной краевой задачи, скомпонованное представление для которых имеет следующий вид компонент $u_j^{(p,n)} \quad (j=1, j=3)$:

$$\begin{gathered} u_1^{(1,n)} = (u_2^{(0)})^2(\tilde{\lambda}_{11} cos(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{12} cos(\zeta_2^{(1)} x_3)) + \tilde{\mu}_{11}\sin(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{12}\sin(\zeta_2^{(1)} x_3) + \\ + \nu_1 + \chi_1 \cos(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_1 \sin(2\alpha^{(1)} x_3)\big) exp(-2i(\omega t - k x_1)), \\ u_3^{(1,n)} = (u_2^{(0)})^2(\tilde{\lambda}_{31}\sin(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\lambda}_{32}\sin(\zeta_2^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{31}\cos(\zeta_1^{(1)} x_3) + \tilde{\mu}_{32}\cos(\zeta_2^{(1)} x_3) + \\ + \nu_3 + \chi_3 \sin(2\alpha^{(1)} x_3) + \xi_3 \cos(2\alpha^{(1)} x_3)) exp(-2i(\omega t - k x_1)), \qquad (12) \\ u_1^{(2,n)} = (u_2^{(0)})^2(\tilde{\beta}_{11}^{(2)} exp(\zeta_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} exp(\zeta_2^{(2)} x_3) + \\ + \gamma_1 exp(2\alpha^{(2)} x_3)) exp(-2i(\omega t - k x_1)), \\ u_3^{(2,n)} = (u_2^{(0)})^2(\tilde{\beta}_{31}^{(2)} exp(\zeta_1^{(2)} x_3) + \tilde{\beta}_{32}^{(2)} exp(\zeta_2^{(2)} x_3) + \\ + \gamma_3 exp(2\alpha^{(2)} x_3)) exp(-2i(\omega t - k x_1)). \end{gathered}$$

Коэффициенты $\tilde{\lambda}_{ij}, \quad \tilde{\mu}_{ij}, \quad \tilde{\beta}_{ij}^{(p)}$ в представлении общего решения и коэффициенты $\nu_i, \quad \chi_i, \quad \xi_i, \quad \gamma_i$ в представлении частного решения получены в аналитической форме методами компьютерной алгебры и имеют крайне громоздкие выражения.

4. Анализ численных результатов.

Численные исследования кинематических характеристик для нелинейных вторых гармоник исследуемых поверхностных волн Лява реализованы для волновода, состоящего из слоя V_1 хлорида натрия, размещенного на кремниевом полупространстве V_2. Физико-механические свойства используемых материалов характеризуются следующими независимыми упругими константами и плотностью [1]:

$$\text{монокристалл NaCl} - c_{11}^{(1)} = 4,958c_*,\ c_{12}^{(1)} = 1,306c_*,\ c_{44}^{(1)} = 1,279c_*,$$
$$c_{111}^{(1)} = -86,36c_*,\ c_{112}^{(1)} = -4,96c_*,\ c_{123}^{(1)} = 0,93c_*,\ c_{144}^{(1)} = 1,32c_*,$$
$$c_{456}^{(1)} = 0,71c_*,\ c_{155}^{(1)} = -5,87c_*,\ \rho_1 = 2,1678\rho_*;$$
$$\text{монокристалл Si} - c_{11}^{(2)} = 16,7c_*,\ c_{12}^{(2)} = 7,9_*,\ c_{44}^{(2)} = 6,5c_*,$$
$$c_{111}^{(2)} = -82,5c_*,\ c_{112}^{(2)} = -45,1c_*,\ c_{123}^{(2)} = -6,4c_*,\ c_{144}^{(2)} = 1,2c_*,$$
$$c_{456}^{(2)} = -6,4c_*,\ c_{155}^{(2)} = -31,0c_*,\ \rho_2 = 2,33\rho_*;$$

Величины параметров c_*, ρ_* составляют $c_* = 10^{10}\ (N/m^2)$, $\rho_* = 10^3\ (kg/m^3)$.

Для сравнительного частотного анализа исследуемых нелинейных волновых эффектов были рассчитаны распределения нормированных амплитуд упругих поперечных смещений $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)}$ в линейных волнах Лява и в их вторых гармониках $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ и $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ по толщинной координате волновода x_3 в зоне, включающей область слоя $x_3/h \in [-1;0]$ и полупространства $x_3/h \in (0;4]$.

Нормированные функции интенсивности сдвиговых колебаний $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)}$ представлены на рис. 1 для волн приведенных частот $\Omega(k_1) \in \{2;3.15;5\}$, которые принадлежат нижней ветви дисперсионного спектра, определяемого соотношением (10). А распределение интенсивности их нелинейных ангармонических возмущений $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, соответственно представлены на рис. 2 - рис. 4 для каждой из рассмотренных в работе частот $\Omega(k_1)$.

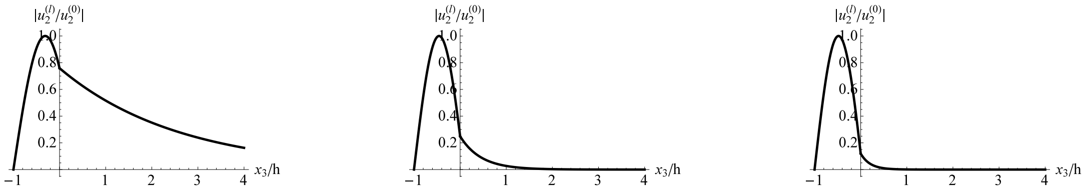

Рис. 1. Распределение нормированных значений $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)}$ для частот $\Omega = 2$, $\Omega = 3.15$, $\Omega = 5$

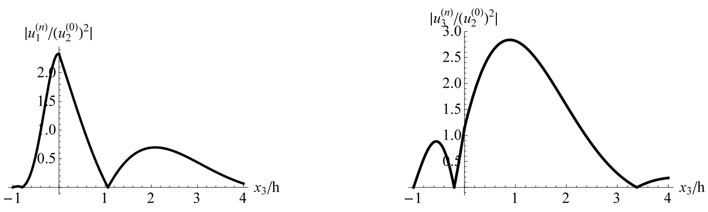

Рис. 2. Распределение нормированных значений $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ при $\Omega = 2$

Следует подчеркнуть, что амплитуды нелинейных вторых гармоник пропорциональны квадрату нормирующего множителя $u_2^{(0)}$, который для поверхностных волн Лява с реальными параметрами интенсивности при $\delta << 1$ является малой величиной. Таким образом, реальный уровень нелинейных ангармонических эффектов может быть оценен при указании конкретного значения малой амплитуды линейной поверхностной волны.

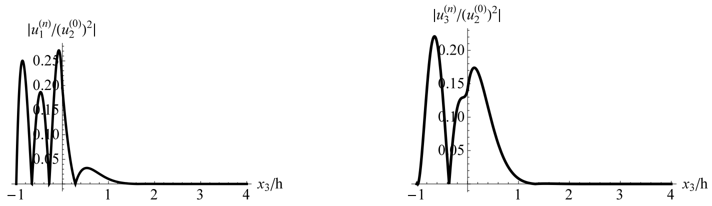

Рис. 3. Распределение нормированных значений $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ при $\Omega = 3.15$

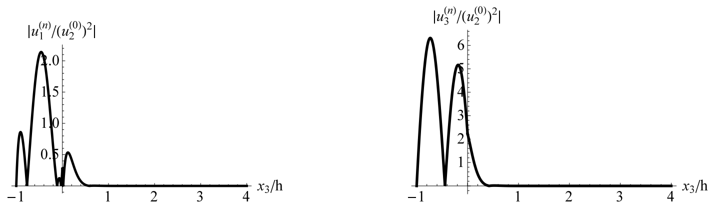

Рис. 4. Распределение нормированных значений $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ при $\Omega = 5$

Рис.1 показывает распределение колебательных смещений в единственной для линейной задачи о распространении волны Лява ненулевой компоненте $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)}$. Прослеживается достижение максимума нормированной амплитуды $|u_2^{(l)}|/u_2^{(0)} = 1$ в зоне слоя и монотонное угасание смещений при отдалении от границы вглубь полупространства. Однако при малом значении частоты $\Omega = 2$ колебания проникают на значительно более существенную глубину волновода (около 10 толщин слоя) по сравнению с данными для других частот. Все же условие угасания колебаний при $x_3 -> \infty$ остается выполненным.

Значительно больший интерес представляет изучение свойств нелинейных вторых гармоник, полученных благодаря учету геометрической и физической нелинейности компонент волновода. В распределениях $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$, $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ общим априорным свойством является угасание интенсивности волновых смещений при отходе от границы контакта материалов волновода $x_3 = 0$ вглубь полупространства. На рис.2 ($\Omega = 2$) максимальные значения амплитуд для $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ достигаются в зоне контакта материалов, а для $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ — в полупространстве (при $x_3 \approx 1$). При росте частоты на рис.3, рис.4 ($\Omega = 3.15$ и $\Omega = 5$) колебательные смещения для всех компонент сжимаются в зоне слоя лишь незначительно проникая в полупространство. Колебания характеризуются 2-3 пиками максимумов, локализованных около внешней поверхности волновода, в срединной зоне слоя и около границы контакта материалов. Для среднего из рассмотренных значений частоты (рис.3 $\Omega = 3.15$) стоит отметить значительный спад интенсивности амплитуд $|u_1^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ и $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ в 10 раз по сравнению с остальными представленными в работе результатами. С увеличением частоты $\Omega = 5$ амплитуда $|u_3^{(n)}|/(u_2^{(0)})^2$ растет. На рис.4 наблюдается доминирование сдвиговой SV компоненты по отношению к Р-продольной.

Цитированная литература

1. *Блистанов А.А., Бондаренко В.С., Переломова Н.В. и др.* Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. М. П. Шаскольской. – Москва: Наука, 1982. – 632 с.
2. *Красильников В.А., Лямов В.Е.* Нелинейное взаимодействие упругих волн в кристаллах и обработка сигнальной информации // Акуст. журн. – 1973. – Т. 19, № 5. – С. 801–804.
3. *Рущицький Я.Я.* Особливості розвитку теорії пружних нелінійних хвиль // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 3. – С. 90–105.
4. *Ferreira R.E., Boulanger Ph., Destrade M.* Large amplitude Love waves. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 2008. – Vol. 61, N 3. – P. 353–371.
5. *Kurennaya K.I., Storozhev V.I.* Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer // In: Proc. 10th International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7–10 July 2003). – Stockholm: IIAV, 2003. – Vol. 7. – P. 3605–3612.
6. *Storozhev V.I., Kuslivaya A.A.* Nonlinear anharmonic effects for normal waves in monocrystal anisotropic germanium layer with flexible not extensible coverings of sides // In: Proc. 9th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (December 17–20, 2007), Lodz, Poland. – 2007. – Vol. 1. – P. 433–440.

References

1. Blistanov, A.A., Bondarenko, V.S., Perelomova N.V. et al (1982). *Acoustic crystals: manual.* Moscow: Nauka (in Russian).
2. Krasil'nikov, V.A., Lyamov, V.E. (1973). Nonlinear interaction of elastic waves in crystals and signal information processing. *Acoust. journal, 19*(5), 801-804 (in Russian).
3. Rushtchitsky, J.J. (2003). Features of the development of the theory of elastic nonlinear waves. *Math. methods and phys.-mech. fields, 46*(3), 90-105 (in Ukrainian).
4. Ferreira, R.E., Boulanger, Ph., Destrade, M. (2008). Large amplitude Love waves. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 6*1(3), 353-371.
5. Kurennaya, K.I., Storozhev, V.I. (2003). Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer. *Proc. 10th International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003).* Stockholm, IIAV, Vol. 7, 3605-3612.
6. Storozhev, V.I., Kuslivaya, A.A. (2007). Nonlinear anharmonic effects for normal waves in monocrystal anisotropic germanium layer with flexible not extensible coverings of sides. *Proc. 9th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (December 17-20, 2007),* Lodz, Poland, Vol. 1, 433-440.

N.V. Zhogoleva

Nonlinear anharmonic disturbances of elastic surface Love waves under rigid fixation of the waveguide.

The model of geometrically and physically nonlinear deformation of anisotropic elastic medium is used in this work. A theoretical numerical-analytic solution of the boundary value problem of determining nonlinear anharmonic disturbances that are generated because of generalised Love wave propagation in a waveguide in the form of a single-crystal layer of the m3m class of a cubic system on the half-space of a single-crystal material of m3m class of a cubic system is constructed. The elastic layer on the top edge is rigidly fixed and on the bottom edge has ideal mechanical contact with the elastic halfspace. Numerical investigations have been carried out for a combination of waveguide materials: a layer of sodium chloride on the silicon half-space. Amplitude-frequency dependences for kinematic characteristics of elastic wave displacements of Love waves and their nonlinear second harmonics are researched and generalized.

Keywords: *geometrical and physical nonlinearity, anharmonic effects, Love waves, nonlinear second harmonics of Love waves, anisotropic layer on the anisotropic half-space, rigid fixation of the waveguide edge.*

Н.В. Жоголева

Нелінійні ангармонічні збурення поверхневих хвиль Лява при жорскому закріпленні хвилеводу.

Використовуючи модель геометрично та фізично нелінійного деформування анізотропного пружного середовища побудовано аналітичний розв'язок задачі визначення нелінійних ангармонічних збурень, які виникають при поширенні узагальненої пружної поверхневої хвилі Лява. Розглядається хвилевод, який складається з шару монокристала класа m3m кубічної системи, жорстко закріпленого по верхній грані, а по нижній грані ідеально контактуючого з монокристалічним півпростором класа m3m кубічної системи. Проведено числові дослідження характеристик нелінійних других гармонік для хвиль з нижньої гілки дисперсійного спектру поверхневих хвиль Лява стосовно до шару з монокристала хлориду натрія на півпросторі з монокристала креминія. Досліджено амплітудно-частотні залежності для кінематичних характеристик пружних хвильових зсувів поверхневих хвиль Лява та їх нелінійних других гармонік.

Ключові слова: *геометрична та фізична нелінійність, ангармонічні ефекти, хвилі Лява, нелінійні другі гармоніки хвиль Лява, шар на півпросторі, анізотропні матеріали, жорстке закріплення грані хвилеводу.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
`zhogoleva.nadia@gmail.com`

Получено 26.10.18

УДК 531.38
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-7

©2018. **Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак**

СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ ПО НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ряд задач автоматического управления, в частности, синхронизация траекторий, задача слежения (tracking) связаны с синтезом алгоритмов управления динамическими системами, которые представляют собой совокупность связанных между собой активных подсистем. В работе рассмотрена задача синхронизации колебаний для двух связанных осцилляторов Ван дер Поля. Предполагается, что одна из подсистем зависит от внешнего управляющего воздействия. Приведено решение задачи в виде обратной связи по состоянию. Во многих практических приложениях теории управления полный вектор состояния системы неизвестен, а измерению доступны лишь некоторые функции переменных состояния – выходы системы. Поэтому основная цель работы – изучить возможность решения исходной задачи с помощью управления, в котором состояние системы заменено на его оценку, полученную с помощью наблюдателя. Построен нелинейный наблюдатель, гарантирующий получение экспоненциальных оценок неизвестных компонент фазового вектора. Показано, что исходное управление совместно с уравнениями наблюдателя решает задачу локальной синхронизации.

MSC: 34A60,34D20, 34N05.

Ключевые слова: *синхронизация, нелинейный наблюдатель, инвариантные соотношения, осциллятор Ван дер Поля.*

1. Введение.

В данной статье изучается возможность использования принципа разделения [1] в задаче синхронизации колебаний двух неидентичных осцилляторов Ван дер Поля. Рассматривается ведуще–ведомая (master–slave) схема соединения осцилляторов. Предполагается, что ведомая подсистема зависит от внешнего управляющего воздействия, осцилляторы связаны диссипативной и упругой связями, кроме того фазовый вектор известен не полностью. Такого рода системы во многих практических приложениях физики, биологии используются в качестве приближенной модели нелинейных циклических процессов, имеющих, вне зависимости от начальных условий, устойчивый предельный цикл [2]. В частности [3–5], определение характеристик и синхронизация колебаний для таких систем по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени является актуальной проблемой многих медико-биологических исследований. Нелинейный наблюдатель определения асимптотических оценок состояния и идентификатор параметров для системы связанных осцилляторов Ван дер Поля предложены в работе [6].

В начале статьи сформулирована задача синхронизации для рассматриваемой системы и приведено ее решение в виде обратной связи по состоянию. Целью работы является поиск синхронизирующего управления в виде обратной связи по оценке состояния. Такая постановка актуальна, поскольку во многих практических приложениях теории управления типичной является ситуация, когда полный вектор состояния системы неизвестен, а измерению доступны лишь некоторые функции переменных состояния – выходы системы. В этом случае можно попытаться использовать управление, которое получается из обратной связи заменой состояния системы на его оценку, полученную с помощью построение наблюдателя – специальной динамической системы, состояние которой с течением времени приближается (асимптотически или экспоненциально) к состоянию исходной системы. Возникает вопрос о том, будет ли полученное таким образом управление в виде обратной связи по оценке состояния решением исходной задачи. В теории управления, в частности в задаче стабилизации динамических систем, подобные вопросы составляет содержание известного принципа разделения [1].

В работе для решения задачи наблюдения использован аппарат метода инвариантных соотношений, который разработан в аналитической механике для поиска точных решений задач динамики твердого тела [7]. Сама схема синтеза вспомогательных инвариантных соотношений для построения нелинейного наблюдателя описана в [8]. В соответствии с этим способом для рассматриваемой системы построен некоторый аналог нелинейного наблюдателя, который обеспечивает получение экспоненциальных оценок фазового вектора. Установлено, что использование в управлении вместо состояния системы его оценки при одновременном решении задач наблюдения и синхронизации приводит к локальному решению рассматриваемой задачи.

2. Синхронизация колебаний осцилляторов Ван дер Поля.

Рассмотрим уравнения движения двух осцилляторов Ван дер Поля, связанных линейной упругой и диссипативной связью, при этом один из них является управляемым

$$\begin{aligned} &\ddot{s}_1 - \mu_1(1 - {s_1}^2)\dot{s_1} + {\omega_1}^2 s_1 + \alpha_1(s_1 - s_2) + \beta_1(\dot{s_1} - \dot{s_2}) = 0,\\ &\ddot{s}_2 - \mu_2(1 - {s_2}^2)\dot{s_2} + {\omega_2}^2 s_2 + \alpha_2(s_1 - s_2) + \beta_2(\dot{s_1} - \dot{s_2}) + u = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u – управление, переменные s_1, s_2 обозначают отклонения осцилляторов от положения равновесия $s_1 = s_2 = 0$ в отсутствии управления, коэффициенты μ_1, μ_2 характеризует нелинейное демпфирование. Случай $\mu_1 = \mu_2 = u = 0$ соответствует колебаниям двух связанных гармонических осцилляторов с собственными частотами ω_1, ω_2, соответственно. Если упругая и диссипативная связи являются механическими, то выполняться равенства $\alpha_1 = -\alpha_2,\ \beta_1 = -\beta_2$.

Системы вида (1) возникают во многих физических, медико-биологических прикладных исследованиях, а также могут быть использованы в ряде устройств в качестве упрощенной динамической модели сложных колебаний, имеющих предельный цикл. При этом различают модели с однонаправленной связью, когда параметры α_i или $\beta_i,\ i = 1, 2$ равны нулю, и модели, учитывающие взаимное влияние активных подсистем. Для некоторых из таких устройств актуальной является задача синтеза управления в виде обратной связи, обеспечивающего синхронизацию колебаний осцилляторов. В случае, если информация об их движении не является полной, возникает задача синтеза управления по выходу – известной информации о колебаниях системы. Далее в качестве выхода будем рассматривать

$$y_1 = s_1, \quad y_2 = s_2, \tag{2}$$

т.е. будем предполагать, что значения отклонений $s_1(t), s_2(t)$ в процессе движения доступны измерению и известны как функции времени. Обозначив

$$x_1 = s_1,\ x_2 = \dot{s_1},\ x_3 = s_2,\ x_4 = \dot{s_2},$$

перепишем уравнения (1) в виде следующей системы

$$\begin{aligned} &\dot{x_1} = x_2, \quad \dot{x_2} = -{\omega_1}^2 x_1 + \mu_1(1 - x_1^2)x_2 + \alpha_1(x_1 - x_3) + \beta_1(x_2 - x_4), \\ &\dot{x_3} = x_4, \quad \dot{x_4} = -{\omega_2}^2 x_3 + \mu_2(1 - x_3^2)x_4 + \alpha_2(x_1 - x_3) + \beta_2(x_2 - x_4) + u, \\ &y_1 = s_1, \quad y_2 = s_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Кроме того, будем считать, что колебания при используемом далее управлении происходят в некоторой ограниченной области D фазового пространства

$$D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \le M^2\} \subseteq R^4.$$

Рассмотрим задачу управляемой синхронизации движений подсистем системы (3) по известной информации. В качестве таковой будем использовать функции (2), а также любые значения выражений, полученных с использований только лишь значений функций выхода. В частности, далее будем считать известными решения задачи Коши для любой систем дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = F(z, y_1, y_2), \quad z(0) = z_0 \in R^n, \tag{4}$$

которые ограничены и определены для $t \in [0, \infty)$.

Задача 1. Найти закон управления $u(z(t), x_1(t), x_3(t))$, при котором решения подсистем системы (3) асимптотически стремятся друг к другу, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} (x_1(t) - x_3(t)) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} (x_2(t) - x_4(t)) = 0.$$

Введем обозначения для отклонений соответствующих компонент фазовых векторов каждого из осцилляторов

$$e_1(t) = x_1(t) - x_3(t), \quad e_2(t) = x_2(t) - x_4(t).$$

Отметим, что величина $e_1(t)$ является известной функцией времени, поэтому она может быть использована как аргумент при синтезе закона управления, в отличие от переменной $e_2(t)$, значения которой неизвестны.

Перейдем от переменных x_3, x_4 к переменным e_1, e_2. С учетом сделанных обозначений уравнения (3) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = R_{11} + R_{12}x_2 + R_{13}e_2, \\ \dot{e}_1 &= e_2, \quad \dot{e}_2 = R_{21} + R_{22}x_2 + R_{23}e_2 - u, \end{aligned} \tag{5}$$

коэффициенты которой зависят от известных величин $x_1(t), x_3(t)$:

$$\begin{aligned} &R_{11} = -{\omega_1}^2 x_1 + \alpha_1 e_1,\ R_{12} = \mu_1(1 - x_1^2) + \beta_1,\ R_{13} = -\beta_1, \\ &R_{21} = \mu_1(1 - x_1^2) - \mu_2(1 - x_3^2) + (\alpha_1 - \alpha_2)e_1, \\ &R_{22} = {\omega_2}^2 x_1 - {\omega_1}^2 x_3 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_1,\ R_{23} = \mu_2(1 - x_3^2) - \beta_1 + \beta_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Для решения задачи 1 достаточно синтезировать управление u, обеспечивающее асимптотическое стремление к нулю отклонений $e_1(t), e_2(t)$. Если бы все компоненты фазового вектора системы (3) были известными, то таким управлением, в частности, могло бы быть выражение

$$u = R_{21} + R_{22}x_2 + R_{23}e_2 - \gamma_1 e_1 - \gamma_2 e_2, \tag{7}$$

где γ_1, γ_2 – некоторые постоянные.

Действительно, в этом случае подсистема системы (5), описывающий отклонение траекторий осцилляторов, становится системой однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= e_2, \\ \dot{e_2} &= \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Характеристическое уравнение системы (8) имеет вид

$$\lambda^2 - \gamma_2\lambda - \gamma_1 = 0. \tag{9}$$

Выбрав постоянные γ_1, γ_2 из условия: корни λ_1, λ_2 этого уравнения имеют различные отрицательные действительные части, получаем, что закон управления (7) обеспечивает экспоненциальное стремление к нулю отклонений с показателем затухания $\lambda_* = \min(|\mathrm{Re}\lambda_1|, |\mathrm{Re}\lambda_2|)$.

3. Нелинейный наблюдатель.

Изучим возможность применения закона управления (7) в случае неполной информации о движении. А именно, используем в формуле (7) вместо значений переменных x_2, e_2 их оценки, полученные в результате решения следующей задачи наблюдения:

Задача 2. Найти асимптотически точные оценки значения компонент $x_2(t), e_2(t)$ фазового вектора системы (5) по информации об $x_1(t), x_3(t)$.

Задачу наблюдения будем решать с помощью метода синтеза инвариантных соотношений [6]. Соответствующая схема состоит во введении конечных связей между известными и неизвестными переменными и последующем динамическим расширением исходных уравнений таким образом, чтобы эти связи стали инвариантными соотношениями для расширенной системы дифференциальных уравнений.

Согласно такому подходу на первом шаге представим неизвестные компоненты фазового вектора системы (7) в виде:

$$\begin{aligned} e_2 &= \Phi(e_1) + \eta_1, \quad \dot{\eta}_1 = v_1(\eta_1, \eta_2, x_1, e_1), \\ x_2 &= \Psi(x_1) + \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = v_2(\eta_1, \eta_2, x_1, e_1). \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что в результате такого представления исходная система (5) расширена двумя (по числу неизвестных) дифференциальными уравнениями относительно переменных η_1, η_2. Далее будем предполагать, что подлежащие синтезу и неопределенные пока функции Φ, Ψ, v_1, v_2 должны будут удовлетворять следующим ограничениям:

– функции Φ, Ψ дифференцируемы и ограниченны в рассматриваемой области;

– правые части вспомогательных дифференциальных уравнений v_1, v_2 удовлетворяют условиям, достаточным для продолжимости их решений на интервал $t \in [0, \infty)$.

Обозначив невязку от соответствующих соотношений через $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, в общем случае имеем:

$$e_2 = \Phi(e_1) + \eta_1 + \varepsilon_1, \quad x_2 = \Psi(x_1) + \eta_2 + \varepsilon_2. \tag{11}$$

Дифференцируя эти равенства, получаем, что дифференциальные уравнения для отклонений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, при условии, что вспомогательные функции v_1, v_2 равны

$$\begin{aligned} v_1 &= R_{21} + R_{22}(\Psi + \eta_2) + (R_{23} - {\Phi'}_{e_1})(\Phi + \eta_1) - u, \\ v_2 &= R_{11} + (R_{12} - {\Psi'}_{x_1})(\Psi + \eta_2) + R_{13}(\Phi + \eta_1), \end{aligned} \tag{12}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= -(R_{23} - {\Phi'}_{e_1})\varepsilon_1 + R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon_2} &= R_{12}\varepsilon_1 + (R_{12} - {\Psi'}_{x_1})\varepsilon_2, \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения (13) допускают тривиальное решение $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Следовательно, соотношения

$$e_2 = \Phi(e_1) + \eta_1, \quad x_2 = \Psi(x_1) + \eta_2,$$

с учетом (12), для некоторых решений системы (5) выполняются тождественно. Отметим, что это утверждение верно для любых дифференцируемых функций $\Phi(e_1), \Psi(x_1)$ и любого допустимого управления u, при которых решения вспомогательных дифференциальных уравнений существуют.

На втором шаге определим свободные функции $\Phi(e_1), \Psi(x_1)$ из условий асимптотической устойчивости тривиального решения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Пусть

$$R_{12} - {\Psi'}_{x_1} = -\lambda, \quad R_{23} - {\Phi'}_{e_1} = \lambda,$$

где λ – некоторая положительная постоянная. С учетом обозначений (12) перепишем эти равенства:

$$\Psi'_{x_1} = \mu_1(1 - x_1^2) + \lambda, \quad \Phi'_{e_1} = \mu_2(1 - x_3^2) + \lambda, \tag{14}$$

В качестве функций, которые удовлетворяют последним соотношениям возьмем

$$\Psi(x_1) = (\mu_1 + \lambda)x_1 + \mu_1 \frac{x_1^3}{3}, \quad \Phi(e_1) = [\mu_2(1 - x_3^2) + \lambda]e_1, \tag{15}$$

Таким образом, можно утверждать, что при выбранных $\Phi(e_1), \Psi(x_1)$, ошибки $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$, возникающие при определении неизвестных $x_2(t), e_2(t)$ по формулам (11), удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon_1} &= -\lambda\varepsilon_1 + R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon_2} &= R_{13}\varepsilon_1 - \lambda\varepsilon_2, \end{aligned} \tag{16}$$

Покажем, что нулевое решение (16) при некоторых λ становится асимптотически устойчивым. Для этого рассмотрим в качестве функции Ляпунова положительно определенную функцию

$$V = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$$

и оценим ее производную, взятую в силу системы (16)

$$\frac{dV}{dt} = -\lambda(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + (R_{13} + R_{22})\varepsilon_1\varepsilon_2 \leq \left(-\lambda + \frac{|R_{13}| + |R_{22}|}{2}\right)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2).$$

В соответствии со сделанным ранее предположением амплитуды колебаний осцилляторов Ван дер Поля ограничены. Пусть

$$R^* = \sup_{t\in[0,\infty)} \{|R_{13}| + |R_{22}|\} = \sup_{t\in[0,\infty)} |\beta_1 + \mu_1(1 - x_1^2) - \mu_2(1 - x_3^2)|.$$

Тогда, при $\lambda > R^*$ функция V становится отрицательно определенной, что является достаточным условием для асимптотической устойчивости нулевого решения (16).

В итоге, мы получили соотношения, которые решают задачу наблюдения неизвестных компонент фазового вектора исходной системы (5)

$$e_2 = [\mu_2(1 - x_3^2) + \lambda]e_1 + \eta_1 + \varepsilon_1, \ x_2 = (\mu_1 + \lambda)x_1 + \mu_1 \frac{x^3}{3} + \eta_2 + \varepsilon_2, \tag{17}$$

где правые части дифференциальных уравнений относительно η_1, η_2 определены формулами (12). При этом оценки (17) являются экспоненциальными, так как

$$\varepsilon_i(t) = O(\exp\{(R^* - \lambda)t\}), \ i = 1, 2. \tag{18}$$

4. Синхронизация по выходу.

Используем в законе управления (7) вместо переменных x_2, e_2 их приближенные оценки $\hat{x}_2, \hat{e}_2$, вычисленные по формулам

$$\hat{x}_2 = \Psi(x_1) + \eta_2, \quad \hat{e}_2 = \Phi(e_1) + \eta_1,$$

т.е. $\hat{x}_2 = x_2 - \varepsilon_2,\ \hat{e}_2 = e_2 - \varepsilon_1$. В результате применения управления (7) с такими аргументами в дифференциальных уравнениях для отклонений траекторий двух осцилляторов (8) возникают ошибки: $e_1(t) + \delta_1(t),\ e_2(t) + \delta_2(t)$. Соответствующие возмущения удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 &= \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2 - R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Отметим, что при наличии возмущений формально задача синхронизации не имеет решения, поскольку тривиальное решение $\delta_1 = \delta_2 = 0$ не удовлетворяет системе (19).

В общем же случае, при одновременном решении задач наблюдения и синхронизации, уравнения для отклонений имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 &= \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2 - R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -\lambda \varepsilon_1 + R_{22}\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\lambda \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{20}$$

Последняя система линейных дифференциальных уравнений допускает тривиальное решение $\delta_1 = \delta_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Поэтому одновременное решение задачи наблюдения и синхронизации может, в принципе, решить задачу 1. В частности, для этого достаточно выбрать параметры $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$ из условий асимптотической устойчивости положения равновесия системы (20). Для формирование ограничений на выбор этих параметров воспользуемся теоремой [9].

Теорема. *Пусть для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$ выполнено:*

а) каждое решение системы стремится к нулю при $t \to \infty$;

б) в системе $\dot{z} = Az + f(z)$ вектор функция $f(z)$ непрерывна в некоторой окрестности $z = 0$;

в) $\frac{\|f(z)\|}{\|z\|} \to 0$ при $z \to 0$.

Тогда каждое решение $z(t, z_0)$, где $z(0, z_0) = z_0$, стремится к нулю для достаточно малых $\|z_0\|$.

Введем в рассмотрение векторы $\delta = (\delta_1, \delta_2)^T,\ \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T,\ z = (\delta^T, \varepsilon^T)^T$, где T означает операцию транспонирования. Матрица A и вектор-функция $f(z)$ в нашем случае имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2 \\ R_{22}\varepsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что условия а) и б) теоремы выполнены. Действительно, все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, а функция $f(z)$ является линейной однородной функцией z. Рассмотрим теперь условие в). В качестве нормы вектора будем использовать сумму абсолютных величин всех его компонент. Тогда

$$\|z\| = |\delta_1| + |\delta_2| + |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|, \ \|f(z)\| = |R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2| + |R_{22}\varepsilon_2|.$$

Оценим выражение $\frac{\|f(z)\|}{\|z\|}$. Пусть M некоторая положительная константа, которая мажорирует максимальные значения ограниченных функций $|R_{23}|, |R_{22}|$. Имеем:

$$\frac{\|f(z)\|}{\|z\|} = \frac{|R_{23}\varepsilon_1 - R_{22}\varepsilon_2| + |R_{22}\varepsilon_2|}{\|z\|} \le \frac{|R_{23}||\varepsilon_1| + 2|R_{22}||\varepsilon_2|}{\|z\|} \le 2M\frac{\|\varepsilon\|}{\|\varepsilon\| + \|\delta\|}.$$

Для выполнения условия в) теоремы, достаточно выбрать параметры $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$ так, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|\varepsilon\|}{\|\delta\|} = 0. \tag{21}$$

В соответствии с (18), норма числителя этого частного $\|\varepsilon\| = O(\exp\{(R^* - \lambda)t\})$. Следовательно, в случае экспоненциального стремления к нулю величины $\|\delta\|$, ее показатель затухания должен быть строго меньше $\lambda - R^*$.

Чтобы выполнить это условие достаточно потребовать, чтобы коэффициенты γ_1, γ_2 характеристического уравнения (9) были таковы, что

$$0 < \lambda_* = \min(|\mathrm{Re}\lambda_1|, |\mathrm{Re}\lambda_2|) < \lambda - R^*. \tag{22}$$

Действительно, система дифференциальных уравнений (20) является каскадной, переменные ε не зависят δ и их значения могут быть рассмотрены как внешнее воздействие на подсистему, состоящей из первых двух уравнений (20). Общее решение этой подсистемы имеет вид

$$\delta(t) = \Delta(t)\delta_0 + \int_0^t \Delta(t-\tau) f_1(\tau) d\tau, \ \delta(0) = \delta_0, \tag{23}$$

где Δ – матрица фундаментальных решений системы линейных однородных уравнений (8), имеющая собственные значения λ_1, λ_2, а внешнее воздействие задано вектор-функцией $f_1(t) = (0, \ -R_{23}(t)\varepsilon_1(t) - R_{22}(t)\varepsilon_2(t))^T$.

Поскольку показатель затухания первого слагаемого (23) удовлетворяет неравенству (22), то вне зависимости от второго слагаемого (23) показатель затухания их суммы эту величину может только лишь уменьшить. Следовательно, условие в) теоремы выполнено и тривиальное решение системы (20) обладает свойством локальной асимптотической устойчивости. Тем самым установлено, что отклонения траекторий двух осцилляторов $\|e+\delta\|$ при достаточно малых начальных значениях $\|\delta\|, \|\varepsilon\|$ стремятся к нулю с ростом t.

В итоге можно сформулировать следующее

Утверждение. *Пусть постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \lambda$ таковы, что выполнено неравенство (22). Тогда управление*

$$u = -\gamma_1 e_1 + R_{22}(\Psi(x_1) + \eta_2) + (R_{23} - \gamma_2)(\Phi(e_1) + \eta_1) + R_{21} \tag{24}$$

где

$$\Psi(x_1) = (\mu_1 + \lambda)x_1 + \mu_1 \frac{x_1^3}{3}, \quad \Phi(e_1) = [\mu_2(1 - x_3^2) + \lambda]e_1,$$

а переменные η_1, η_2 – произвольное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= R_{21} + R_{22}(\Psi + \eta_2) + (R_{23} - \Phi'_{e_1})(\Phi + \eta_1) - u,\\ \dot{\eta}_2 &= R_{11} + R_{12}(\Psi + \eta_2) - \Psi'_{x_1}(\Psi + \eta_2),\end{aligned}$$

решает, по крайней мере, локально, Задачу 1 для системы (5).

Как уже было отмечено, система (20) имеет каскадную структуру, из вида которой следует, что решение задачи наблюдения не зависит от решения задачи синхронизации. Поэтому, с целью уменьшения начального значения $\|z(0)\|$, задачу можно разбить на два этапа. На первом из них начать решать задачу наблюдения при произвольном допустимом управлении, например, при $u = 0$, обеспечивая тем самым малость значений $\|\varepsilon\|$. На втором этапе, начиная с некоторого момента времени, принятого далее за начальный момент, начинать решать одновременно Задачу 1 и Задачу 2 с управлением (24).

Цитированная литература

1. *Freeman R.* Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances // IEEE Transactions on Automatic. Control. – 1995. – V. 40, № 12. – P. 2119–2122.
2. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3–42.
3. *Grudzinski K., Zebrowski J.J.* Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A 336. – 2003. – P. 153–162.
4. *Bernardo D.D., Signorini M. G., Cerutti S.* A model of two non-linear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics // Int. J. Bifurcation Chaos. – 1998. – V. 8. – P. 1975–1985.
5. *Brandt M.E., Wang G., Shih H-T.* Feedback control of a nonlinear dual-oscillator heartbeat model. – Bifurcation Control. – Eds. G. Chen, D. J. Hill, X. Yu. – Springer, 2003. – P. 265–273.
6. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Идентификация характеристик осцилляторных сетей // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. – Т. 84. – 2016. – С. 22–30.
7. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

8. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69–76.
9. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. – 216 с.

References

1. Freeman, R. (1995). Global internal stabilizability does not imply global external stabilizability for small sensor disturbances. *IEEE Transactions on Automatic. Control, 40*(12), 2119-2122.
2. Kuznetsov, A.P., Seliverstova, E.S., Trubetskov, D.I., Tyuryukina, L.V. (2014). Fenomen uravneniya van der Polya. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika, 22*(4), 3-42 (in Russian).
3. Grudzinski, K., Zebrowski, J.J. (2003). Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. *Physica A, 336*(1-2), 153-162.
4. Bernardo, D.D., Signorini M.G., Cerutti S. (1998). A model of two non-linear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics. I*nt. J. Bifurcation Chaos, 8*, 1975-1985.
5. Brandt, M.E., Wang, G., Shih, H-T. (2003). Feedback control of a nonlinear dual-oscillator heartbeat model. In *Bifurcation Control*, Eds. G. Chen, D. J. Hill, X. Yu., Springer, 265-273.
6. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2016). Identification of characteristics of coupled oscillators. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, 84*, 22-30 (in Russian).
7. Kharlamov, P.V. (1974). Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mehanika tverdogo tela, 6*, 15-24 (in Russian).
8. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitel'nykh trebovaniy v zadachakh upravleniya. *Trudy IPMM NAN Ukrainy, 29*, 69-76 (in Russian).
9. Bellman R. (1954). *Teoriya ustoychivosti resheniy differentsial'nykh uravneniy.* Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury (in Russian).

N.V. Zhogoleva, V.F. Shcherbak

Synchronization of oscillations for coupled Van der Pol oscillators by output.

A number of automatic control tasks, in particular, the synchronization of trajectories, the tracking task, control by a reference system are associated with the synthesis of control algorithms for dynamic cascade systems, which are a set of interconnected active subsystems. In this paper, the oscillation synchronization problem is considered for two Van der Pol coupled oscillators. It is assumed that the driven subsystem depends on the external control action, in addition, the phase vector is not fully known. On the first step the solution of the problem of synchronization in the form of state feedback is written. The aim of the work is to find the synchronizing control in the form of feedback on the state estimation. Such a formulation is relevant, since for many practical applications of control theory, a typical situation is when the complete state vector of the system is unknown and only some of the functions of the state variables – the outputs of the system are accessible to measurement. One can try to use the control law obtained from feedback by replacing the state with its estimate obtained by observer – a special dynamical system whose state eventually approaches (asymptotically or exponentially) to the state of the original system. In this case a question arises whether such control will be solving the synchronization problem. In mathematical control theory, in particular for the stabilization problem of dynamical systems, similar questions constitute the content of the known principle of separation. For the observation problem solving the apparatus of the method of synthesis of auxiliary invariant relations for constructing a nonlinear observer was used. In accordance with this approach a nonlinear observer is constructed for the system under consideration, which ensures the exponential estimates of the phase vector. It is further shown that the use in the control law instead of the state of the system of its evaluation under simultaneously solving the problems of observation and synchronization leads to the local solution of the problem under consideration.

Keywords: *synchronization, nonlinear observer, invariant relations, Van der Pol oscillator.*

Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак

Синхронізація коливань зв'язаних осциляторів Ван дер Поля за неповною інформаією.

Ряд задач автоматичного управління, зокрема, синхронізація траєкторій, стеження (tracking) за еталоною системою тощо пов'язані з синтезом алгоритмів керування динамічними системами, які представляють собою сукупність пов'язаних між собою активних підсистем. В роботі розглянуто задачу синхронізації коливань для двох пов'язаних між собою осциляторів Ван дер Поля. Передбачається, що одна з підсистем залежить від зовнішнього керування. Наведено рішення задачі синхронізації для вихідної системи у вигляді зворотного зв'язку за станом. У багатьох практичних додатках теорії управління повний вектор стану системи є невідомим, а виміру доступні лише деякі функції змінних стану – виходи системи. Тому основний зміст роботи – вивчити можливість використання закону керування, в якому стан системи замінено на його оцінку, отриману за допомогою спостерігача. Побудований нелінійний спостерігач, який гарантує отримання експоненційних оцінок невідомих компонент фазового вектора. Показано, що одночасне рішення задач спостереження та синхронізації вирішує локально вихідну задачу.

Ключові слова: *синхронізація, нелінійний спостерігач, інваріантні співвідношення, осцилятор Ван дер Поля.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
`zhogoleva.nadia@gmail.com, scherbakvf@ukr.net`

Получено 24.11.18

УДК 533.6.013.42
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-8

©2018. **Ю.М. Кононов, Ю.О. Джуха**

ПРО СПРОЩЕННЯ ЧАСТОТНОГО РІВНЯННЯ ВЛАСНИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ЖОРСТКОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ З ПРУЖНИМИ ОСНОВАМИ

Проведено спрощення раніше отриманого частотного рівняння власних осесиметричних коливань важкої ідеальної нестисливої рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді тонких кругових пластин. Усунено особливість в частотному рівнянні при збігу масових характеристик пластин. Розглянуто довільні способи закріплення контурів пластин і різні граничні випадки виродження пластин в мембрани та абсолютно жорсткі, випадок відсутності верхньої пластини (рідина з вільною поверхнею), а також випадок невагомості. Показано, що частотний спектр сумісних осесиметричних коливань пружних основ та ідеальної рідини складається з двох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої та нижньої пружних основ, і додаткової частоти коливань стовпа рідини як одного цілого.

MSC: 74F10.

Ключові слова: *гідропружність, кругові пружні пластини, ідеальна нестислива рідина, осесиметричні коливання.*

1. Вступ.

В статті [1] розглянуто задачу про власні осесиметричні коливання важкої ідеальної нестисливої рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді тонких ізотропних кругових пластин. Частотне рівняння представлено у вигляді визначника п'ятого порядку, що має особливість при збігу масових характеристик пластин. Розглянуто різні граничні випадки виродження пластин в мембрани, в абсолютно жорсткі, а також випадок відсутності верхньої пластини (випадок наявності вільної поверхі в рідини). Ця задача була узагальнена в статті [2] на випадок коаксіального циліндра з пружними основами у вигляді кільцевих пластин з довільними способами закріплення контурів, а в статті [3] – на випадок двошарової рідини. В роботах [4] розглянуто окремі задачі, аналогічні задачі [1] у випадку невагомості, а в [5] – у випадку відсутності верхної пластини (випадок наявності вільної поверхі в рідини). Стаття [6] присвячена дослідженню впливу перевантаження на осесиметричні коливання ідеальної рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з закріпленою на вільній поверхі рідини мембраною. Існує велика кількість робіт, в яких в лінійній та нелінійній постановках досліджено коливання вільної поверхні ідеальної рідини в круговому резервуарі з пружним дном, наприклад, [7–9]. Поздовжні (симетричні) та поперечні (несиметричні)

Роботу виконано відповідно до програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (проект № 0116U002522).

коливання пластини або мембрани на вільній поверхні ідеальної рідини в круговому резервуарі з абсолютно жорсткою нижньою основою докладно досліджено в статті [10]. Аналітично аналізуються сумісні гідропружні частоти нестисливої та нев'язкої рідини в круговому циліндричному резервуарі з гнучкою мембраною чи пружною пластиною на вільній поверхні. Близькою за темою до нашої статті є робота [11], в якій досліджуються коливання однорідної ідеальної рідини в циліндричному резервуарі з однаковими пружними основами у вигляді кругових пластин. В ній запропоновано аналітичний метод, заснований на розкладанні в ряд Фур'є-Бесселя та методі Релея–Рітца. Для випадку пластини розглянуто різні граничні умови. У даній статті проведено спрощення частотного рівняння, отриманого в [1]. Воно представлено у вигляді визначника четвертого порядку, усунено особливість в частотному рівнянні при збігу масових характеристик пластин, розглянуто довільні способи закріплення контурів пластин, граничні випадки виродження пластин в абсолютно жорсткі, а також випадок невагомості. Показано, що частотний спектр сумісних осесиметричних коливань пружних основ та ідеальної рідини складається з двох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої та нижньої пружних основ і додаткової частоти коливань стовпа рідини як одного цілого. Проведені числові дослідження впливу способів закріплення пластин на частотний спектр.

2. Постановка задачі.

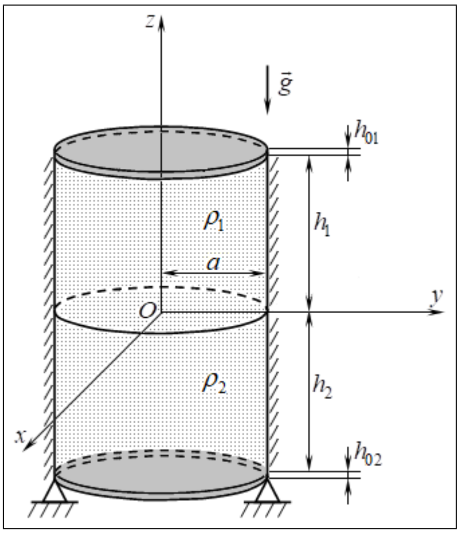

Рис. 1. Постановка задачі.

Розглянемо сумісні коливання пружних основ і важкої ідеальної нестисливої рідини з густиною ρ, що повністю заповнює прямий круговий циліндричний резервуар висоти h і радіуса a з жорсткою боковою поверхнею (рис. 1). Основи резервуара представляють собою кругові ізотропні пластини зі згинальними жорсткостями D_i, на які впливають розтягуючі зусилля T_i в серединній площині ($i = 1, 2$).

Індекс $i = 1$ відповідає верхній основі, а $i = 2$ – нижній основі. Циліндричну систему координат $Or\theta z$ розмістимо так, щоби площина $Or\theta$ знаходилась на однаковій відстані від основ, а вісь Oz була спрямована за віссю циліндра протилежно до вектора прискорення сили тяжіння $\vec{g}$. Задачу будемо розглядати в лінійній постановці, вважаючи рух рідини потенціальним, а сумісні коливання пластин і рідини – безвідривними.

Рівняння руху механічної системи, що розглядається, мають вигляд [1–5, 12]:

$$k_{01}\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1\Delta_2^2 W_1 - T_1\Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \rho\left(Q - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=\frac{h}{2}} - g\frac{h}{2}\right) - gk_{01}, \qquad (1)$$

$$k_{02}\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2\Delta_2^2 W_2 - T_2\Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho\left(Q - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=-\frac{h}{2}} + g\frac{h}{2}\right) - gk_{02}, \qquad (2)$$

$$\Delta\Phi = 0$$

з урахуванням наступних граничних умов:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{\gamma} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=\frac{h}{2}} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \qquad (3)$$

$$\left.\left(\mathfrak{L}_{ip}\left[W_i\right]\right)\right|_{\gamma} = 0 \quad (i = \overline{1,2},\ p = \overline{1,2}), \qquad (4)$$

$$\frac{1}{S}\int\limits_S W_1 dS = \frac{1}{S}\int\limits_S W_2 dS. \qquad (5)$$

Тут $k_{0i} = \rho_{0i}h_{0i}$; W_i, ρ_{0i} і h_{0i} – відповідно прогин, густина та товщина i-ої пластини; Φ – потенціал швидкостей рідини; Q – довільна функція часу; Δ_2 і $\Delta = \Delta_2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – відповідно двомірний та тримірний оператори Лапласа; S – кругова область, а γ – її контур $(r = a)$.

3. Виведення статичної крайової задачі та частотного рівняння сумісних коливань пружних основ і рідини.

Розглянемо задачу про власні сумісні коливання пружних пластин і рідини. Для цього представимо прогини пластин у вигляді суми статичного та динамічного прогинів і покладемо $W_i(r,t) = \mathrm{e}^{i\omega t}w_i(r) + W_i^{st}(r)$, $\rho\,(Q - \dot{a}_0) = \tilde{Q}\mathrm{e}^{i\omega t} + g(\rho\frac{h}{2} + k_{01}) + C$, $\rho\dot{a}_1\frac{h}{2} = \tilde{w}\mathrm{e}^{i\omega t}$. Рівняння (1)–(2) та граничні умови (4)–(5) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} &D_i\Delta_2^2 w_i - T_i\Delta_2 w_i - \left[k_{0i}\omega^2 + (-1)^i\rho g\right] w_i = \\ &= \rho\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{w}_{in}\psi_n + (-1)^{i+1}\tilde{Q} - \tilde{w} \quad (i = 1, 2)\,, \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\left.\left(\mathfrak{L}_{ip}\left[w_i\right]\right)\right|_{\gamma} = 0 \quad (i = \overline{1,2},\ p = \overline{1,2}), \qquad (7)$$

$$w = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a rw_1 \,\mathrm{d}\, r = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a rw_2 \,\mathrm{d}\, r, \tag{8}$$

де $W_i^{st}(r)$ – статичний прогин пластин, $\Delta_2 = \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}$,

$$\tilde{w}_{1n} = \frac{w_{1n}\cosh\kappa_n - w_{2n}}{k_n \sinh\kappa_n}, \quad \tilde{w}_{2n} = \frac{w_{2n}\cosh\kappa_n - w_{1n}}{k_n \sinh\kappa_n}, \quad \tilde{w} = -\rho\omega^2\frac{h}{2}w,$$

$$w_{in} = \frac{2\pi}{N_n^2}\int\limits_0^a rw_i\psi_n \,\mathrm{d}\, r, \tag{9}$$

Розв'язання статичної задачі зводиться до наступної крайової задачі:

$$\begin{aligned}
&D_1\Delta_2^2 W_1^{st} - T_1\Delta_2 W_1^{st} + \rho g W_1^{st} = C - g\left(\rho\frac{h}{2} + k_{01}\right),\\
&D_2\Delta_2^2 W_2^{st} - T_2\Delta_2 W_2^{st} - \rho g W_2^{st} = -C - g\left(\rho\frac{h}{2} + k_{02}\right),\\
&\left(\mathfrak{L}_{ip}\left[W_i^{st}\right]\right)\big|_\gamma = 0,\\
&\int\limits_0^a rW_1^{st}\,\mathrm{d}\, r = \int\limits_0^a rW_2^{st}\,\mathrm{d}\, r.
\end{aligned} \tag{10}$$

Тут невідомі функції W_i^{st} та константа C. Розв'язок крайової задачі (10) наведено в статті [12].

Розв'язок кожного рівняння (6) будемо шукати у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного [1–6,12,13]:

$$w_i = \sum_{k=1}^{2} w_{ik}^0 A_{ik}^0 + \rho\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{w}_{in}}{d_{in}}\psi_n + \tilde{k}_{0i}\left[\tilde{Q} + (-1)^{i+1}\rho\omega^2\frac{h}{2}w\right] \quad (i=1,2), \tag{11}$$

де

$$\tilde{k}_{0i} = \frac{1}{\rho g + (-1)^i k_{0i}\omega^2} \quad \left(\omega^2 \neq \frac{\rho g}{k_{01}}\right), \quad d_{in} = \left(D_i k_n^2 + T_i\right)k_n^2 - \left[k_{0i}\omega^2 + (-1)^i\rho g\right] \neq 0,$$

A_{ik}^0 $(i,k=1,2)$, w_{in}, $\tilde{Q}$ і w – невідомі константи.

Підставивши (11) в умову (9) і розв'язавши систему двох лінійних рівнянь відносно w_{1n} і w_{2n}, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{k=1}^{2}\left[\left(w_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n}E_{1kn}^0\psi_n\right)A_{1k}^0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{12n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{2k}^0\right] + \\ &+ \tilde{k}_{01}\left(\tilde{Q} + \rho\omega^2\frac{h}{2}w\right), \\ w_2 &= \sum_{k=1}^{2}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{21n}E_{1kn}^0\psi_n\right)A_{1k}^0 + \left(w_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{2k}^0\right] + \\ &+ \tilde{k}_{02}\left(\tilde{Q} - \rho\omega^2\frac{h}{2}w\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Тут

$$\begin{aligned} &a_{11n} = \omega^2\rho\frac{k_n\coth\kappa_n d_{2n} - \omega^2\rho}{\Delta_n}, \quad a_{12n} = -\omega^2\frac{k_n b_n d_{2n}}{\Delta_n}, \\ &a_{21n} = -\omega^2\frac{k_n b_n d_{1n}}{\Delta_n}, \quad a_{22n} = \omega^2\rho\frac{k_n\coth\kappa_n d_{1n} - \omega^2\rho}{\Delta_n}, \\ &\Delta_n = \left(k_n d_{1n} - \omega^2\rho\coth\kappa_n\right)\left(k_n d_{2n} - \omega^2\rho\coth\kappa_n\right) - \omega^4 b_n^2 = \\ &= k_n^2 d_{1n}d_{2n} - \omega^2\rho k_n\coth\kappa_n\left(d_{1n} + d_{2n}\right) + \omega^4\rho^2, \quad b_n = \frac{\rho}{\sinh\kappa_n}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$E_{ikn}^0 = \frac{2\pi}{N_n^2}\int\limits_0^a r w_{ik}^0\psi_n\,\mathrm{d}\,r. \tag{14}$$

Так, наприклад, при $T_2 = \infty$ коефіцієнт a_{11n} матиме вигляд:

$$a_{11n} = \frac{\omega^2\rho}{k_n d_{1n}\tanh\kappa_n - \omega^2\rho}$$

і збігається з аналогічним співвідношенням з роботи [13].

4. Частотне рівняння сумісних симетричних (поздовжніх) коливань ідеальної рідини та пружних основ.

Для отримання частотного рівняння симетричних коливань рідини та пружних основ необхідно мати ще два рівняння для невідомих $\tilde{Q}$ і w. Для цього, підставивши (12) в (8), отримаємо систему:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{01}Q + \tilde{k}_1 w &= -\sum_{k=1}^{2}\tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0, \\ \tilde{k}_{02}Q + \tilde{k}_2 w &= -\sum_{k=1}^{2}\tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0, \end{aligned}$$

з якої знайдемо Q і w:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\Delta}\left(-\tilde{k}_2\sum_{k=1}^{2}\tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 + \tilde{k}_1\sum_{k=1}^{2}\tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0\right),\\ w &= \frac{1}{\Delta}\left(\tilde{k}_{02}\sum_{k=1}^{2}\tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 - \tilde{k}_{01}\sum_{k=1}^{2}\tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0\right), \end{aligned} \tag{15}$$

де $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_{01}\rho\frac{h}{2}\omega^2 - 1$, $\tilde{k}_2 = -\tilde{k}_{02}\rho\frac{h}{2}\omega^2 - 1$, $\Delta = \tilde{k}_{01}\tilde{k}_2 - \tilde{k}_{02}\tilde{k}_1$,

$$\tilde{w}_{ik}^0 = \frac{2}{a^2}\int\limits_0^a r w_{ik}^0 \,\mathrm{d}\, r. \tag{16}$$

Підставивши (15) в (12), остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} w_1 = \sum_{k=1}^{2}\Bigg[&\left(w_{1k}^0 + \alpha_1\tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n}E_{1kn}^0\psi_n\right)A_{1k}^0 +\\ &+\left(\alpha_2\tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{2k}^0\Bigg],\\ w_2 = \sum_{k=1}^{2}\Bigg[&\left(\beta_1\tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n}E_{1kn}^0\psi_n\right)A_{1k}^0 +\\ &+\left(w_{2k}^0 + \beta_2\tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n}E_{2kn}^0\psi_n\right)A_{2k}^0\Bigg]. \end{aligned} \tag{17}$$

Тут

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = -\frac{k_{02} + \rho\left(h + g/\omega^2\right)}{k_{12}}, \quad \alpha_2 = \frac{k_{02} + \rho g/\omega^2}{k_{12}},\\ &\beta_1 = \frac{k_{01} - \rho g/\omega^2}{k_{12}}, \quad \beta_2 = -\frac{k_{01} + \rho\left(h - g/\omega^2\right)}{k_{12}},\\ &k_{12} = k_{01} + k_{02} + \rho h. \end{aligned}$$

Таким чином, форми коливань пружних пластин мають вигляд (17).

З умов закріплення пластин (7) витікає частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань двошарової рідини та пружних основ:

$$\left|\|C_{qr}\|_{q,r=1}^4\right| = 0, \tag{18}$$

де

$$
\begin{aligned}
&C_{1,k} = \mathfrak{L}^0_{1k1} + \alpha_1 \tilde{w}^0_{1k} \mathfrak{L}^0_{11} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{1n1},\\
&C_{1,k+2} = \alpha_2 \tilde{w}^0_{2k} \mathfrak{L}^0_{11} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{1n1},\\
&C_{2,k} = \mathfrak{L}^0_{1k2} + \alpha_1 \tilde{w}^0_{1k} \mathfrak{L}^0_{12} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{1n2},\\
&C_{2,k+2} = \alpha_2 \tilde{w}^0_{2k} \mathfrak{L}^0_{12} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{1n2},\\
&C_{3,k} = \beta_1 \tilde{w}^0_{1k} \mathfrak{L}^0_{21} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{2n1},\\
&C_{3,k+2} = \mathfrak{L}^0_{2k1} + \beta_2 \tilde{w}^0_{2k} \mathfrak{L}^0_{21} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{2n1},\\
&C_{4,k} = \beta_1 \tilde{w}^0_{1k} \mathfrak{L}^0_{22} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{2n2},\\
&C_{4,k+2} = \mathfrak{L}^0_{2k2} + \beta_2 \tilde{w}^0_{2k} \mathfrak{L}^0_{22} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{2n2} \quad (k = 1, 2).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Тут

$$
\mathfrak{L}^0_{ikp} = \left(\mathfrak{L}_{ip}\left[w^0_{ik}\right]\right)\big|_{\gamma}, \quad \mathfrak{L}_{inp} = \left(\mathfrak{L}_{ip}\left[\psi_n\right]\right)\big|_{\gamma}, \quad \mathfrak{L}^0_{ip} = \left(\mathfrak{L}_{ip}\left[1\right]\right)\big|_{\gamma}.
$$

Частотний спектр сумісних симетричних коливань буде складатися з двох наборів частот, що відповідають коливанням пружних основ, і додаткової частоти коливань стовпа рідини як одного цілого.

У статті [1] було отримано у вигляді визначника п'ятого порядку рівняння, аналогічне рівнянню (18). Якщо привести визначник п'ятого порядку до визначника четвертого порядку, то ці рівняння збігаються. Слід зазначити, що рівняння роботи [1] мало особливість при збігу масових характеристик пластин ($k_{01} = k_{02}$). У рівнянні (18) цю особливість було усунуто.

Випишемо оператори $\mathfrak{L}_{ip}$ і значення функцій $\mathfrak{L}_{inp}$, $\mathfrak{L}^0_{ip}$ для різних способів закріплення пружних пластин, а саме закріпленого, опертого та вільного контурів [14]: у випадку закріпленого контуру

$$
\mathfrak{L}_{i1} \equiv 1, \quad \mathfrak{L}_{i2} = \frac{d}{dr}, \quad \mathfrak{L}_{in1} = 1, \quad \mathfrak{L}_{in2} = 0, \quad \mathfrak{L}^0_{i1} = 1, \quad \mathfrak{L}^0_{i2} = 0,
$$

у випадку опертого контуру

$$
\mathfrak{L}_{i1} \equiv 1, \quad \mathfrak{L}_{i2} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\nu_i}{r}\frac{d}{dr}, \quad \mathfrak{L}_{in1} = 1, \quad \mathfrak{L}_{in2} = -\frac{\xi_n^2}{a^2}, \quad \mathfrak{L}^0_{i1} = 1, \quad \mathfrak{L}^0_{i2} = 0,
$$

у випадку вільного контуру

$$\mathfrak{L}_{i1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\nu_i}{r}\frac{d}{dr}, \quad \mathfrak{L}_{i2} = \frac{d^3}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr},$$

$$\mathfrak{L}_{in1} = -\frac{\xi_n^2}{a^2}, \quad \mathfrak{L}_{in2} = 0, \quad \mathfrak{L}_{i1}^0 = 0, \quad \mathfrak{L}_{i2}^0 = 0,$$

де ν_i – коефіцієнт Пуасона матеріалу i-ої пластини.

У випадку невагомості ($g = 0$) частотне рівняння (18) за однакових умов закріплення верхньої та нижньої пластин буде симетричне відносно індексів 1 і 2, що має фізичне обґрунтування і підтверджує правильність виведених рівнянь.

Якщо нижня або верхня пластина стає абсолютно жорсткою, то відповідно $w_2 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{2k}^0 \equiv 0$) або $w_1 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{1k}^0 \equiv 0$). Переходячи до границі в рівняннях (13) при $T_2 \to \infty$ або $T_1 \to \infty$, відповідно отримаємо $a_{21n} \to 0$, $a_{22n} \to 0$ або $a_{11n} \to 0$, $a_{12n} \to 0$.

Рівняння симетричних коливань (18) при $T_2 = \infty$ мають вигляд:

$$\left| \|C_{qr}\|_{q,r=1,2}^{1,2} \right| = 0, \tag{20}$$

а при $T_1 = \infty$ –

$$\left| \|C_{qr}\|_{q,r=3,4}^{3,4} \right| = 0. \tag{21}$$

У випадку симетричних коливань в коефіцієнтах (19) слід покладати $\alpha_1 = -1$ при $T_2 = \infty$ та $\beta_2 = -1$ при $T_1 = \infty$. Це випливає із значень цих коефіцієнтів у формулах (17) відповідно при $k_{02} = \infty$ та $k_{01} = \infty$.

Рівняння (20) збігається з аналогічним рівнянням роботи [13].

У випадку відсутності верхньої пластини та виродження нижньої пластини в мембрану, з визначника рівняння (18) необхідно викреслити перший, другий і четвертий рядки та перший, другий і четвертий стовпці:

$$\mathfrak{L}_{211}^0 + \beta_2 \tilde{w}_{21}^0 \mathfrak{L}_{21}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 \mathfrak{L}_{2n1} = 0. \tag{22}$$

Частотний спектр рівняння (22) буде складатися з трьох наборів частот, що відповідають коливанням вільної поверхні рідини та пружного дна і коливанням стовпа рідини як одного цілого. Це можна побачити з рівняння (22), у випадку закріпленого контуру, вже при $n = 1$. З урахуванням одного члена ряду воно зводиться до рівняння третього ступеня відносно ω^2.

Цитированная литература

1. *Кононов Ю.Н., Русаков В.Ф., Джуха Ю.А.* Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2015. – № 2. – С. 105–114.

2. *Кононов Ю.Н., Джуха Ю.А.* Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2016. – № 1. – С. 103–115.
3. *Кононов Ю.М., Шевченко В.П., Джуха Ю.О.* Осесиметричні коливання пружних кільцевих основ і двошарової ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 85–95.
4. *Кононов Ю.М., Шевченко В.П., Джуха Ю.О.* Поздовжні коливання в невагомості ідеальної рідини, що знаходиться в жорсткому кільцевому цилігдричному резервуарі з пружними основами // Вісн. ДонНУ. Сер. А. – 2016. – № 1–2. – С. 129–138.
5. *Кононов Ю.Н., Шевченко В.П., Джуха Ю.А.* Осесимметричные колебания двухслойной идеальной жидкости со свободной поверхностью в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим дном // Вісн. ДонНУ. Сер. А. – 2015. – № 1–2. – С. 116–125.
6. *Кононов Ю.Н., Джуха Ю.А.* Влияние перегрузки на осесимметричные колебания круговой мембраны, расположенной на свободной поверхности жидкости в цилиндрическом резервуаре // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т. 14, № 2. – С. 32–41.
7. *Bauer H.F., Chang S., Wang J.T.S.* Nonlinear liquid motion in a longitudinally excited container with elastic bottom // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9, No. 12. – P. 2333–2339.
8. *Chiba M.* Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. Part II: Linear axisymmetric vibration analysis // Journal of Fluids and Structures. – 1993. – Vol. 7, No. 1. – P. 57–73.
9. *Chiba M.* Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation // Journal of Sound and Vibration. – 1994. – Vol. 169, No. 3. – P. 387–394.
10. *Bauer H.F.* Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover // Journal of Sound and Vibration. – 1995. – Vol. 180, No. 5. – P. 689–704.
11. *Jeong K.-H.* Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – Vol. 260, No. 4. – P. 653–670.
12. *Джуха Ю.О.* Статичний прогин пружних основ жорсткого кільцевого циліндричного резервуара з рідиною // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. «Механіка неоднорідних структур». – 2017. – № 2 (21). – С. 44–54.
13. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – Москва: Машиностроение, 1987. – 232 с.
14. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. – Москва: Машиностроение, 1970. – 736 с.

References

1. Kononov, Yu.N., Rusakov, V.F., Dzhukha, Yu.A. (2015). Axial-symmetric vibrations of elastic bases and ideal liquid in a rigid cylindrical tank. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical & mathematical Sciences, 2*, 105-114 (in Russian).
2. Kononov, Yu.N., Dzhukha, Yu.A. (2016). Axisymmetric vibrations of elastic bases and ideal liquid in a rigid annular cylindrical tank. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical & mathematical Sciences, 1*, 103-115 (in Russian).
3. Kononov, Yu.M., Shevchenko, V.P., Dzhukha, Yu.O. (2017). Axially symmetric oscillations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical reservoir. *Mathematical methods and physicomechanical fields, 60*(1), 85-95 (in Ukrainian).
4. Kononov, Yu.M., Shevchenko, V.P., Dzhukha, Yu.O. (2016). Longitudinal oscillations in zero gravity of an ideal liquid located in a rigid circular cylindrical reservoir with elastic bases. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences, 1-2*, 129-138 (in Ukrainian).
5. Kononov, Yu.N., Shevchenko, V.P., Dzhukha, Yu.A. (2015). Axisymmetric vibrations of a two-layer ideal liquid with a free surface in a rigid circular cylindrical tank with elastic bottom. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences, 1-2*, 116-125 (in Russian).
6. Kononov, Yu.N., Dzhukha, Yu.A. (2017). Influence of overload on axisymmetric oscillations of a

circular membrane located on a free surface of the liquid in a cylindrical reservoir. *Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU, 14*(2), 32-41 (in Russian).
7. Bauer, H.F., Chang, S., Wang, J.T.S. (1971). Nonlinear liquid motion in a longitudinally excited container with elastic bottom. *AIAA Journal, 9*(12), 2333-2339.
8. Chiba, M. (1993). Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. Part II: Linear axisymmetric vibration analysis. *Journal of Fluids and Structures, 7*(1), 57-73.
9. Chiba, M. (1994). Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration, 169*(3), 387-394.
10. Bauer, H.F. (1995). Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover. *Journal of Sound and Vibration, 180*(5), 689-704.
11. Jeong, K.-H. (2003). Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid. *Journal of Sound and Vibration, 260*(4), 653-670.
12. Dzhukha, Yu.O. (2017). Static deflection of elastic bases in an annular cylindrical container with a liquid. *Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series: Mechanics, 21*(2), 44-54 (in Ukrainian).
13. Dokuchaev, L.V. (1987). *Nonlinear dynamics of aircrafts with deformable elements.* Moscow: Mashinostroenie (in Russian).
14. Filippov, A.P. (1970). *Oscillations of deformable systems.* Moscow: Mashinostroenie (in Russian).

Yu.M. Kononov, Yu.O. Dzhukha

On the simplification of a frequency equation of the natural axially symmetric oscillations of a perfect liquid in a rigid cylindrical reservoir with elastic bases.

We have simplified the previously received frequency equation of the natural axially symmetric oscillations of a heavy perfect incompressible liquid in a rigid cylindrical reservoir with elastic bases in the form of thin circular plates. The singularity in the frequency equation in the case of the coincidence of mass characteristics of the plates was removed. We have considered arbitrary methods of fixing the contours of the plates and different limiting cases: the degeneration of plates into membranes, absolutely rigid plates, the absence of upper plate (free surface on the liquid), and the case of zero gravity. It has been shown that the frequency spectrum of the coupled axially symmetric oscillations of elastic bases and the ideal liquid consists of two sets of frequencies, corresponding to oscillations of the upper and lower elastic bases, and additional oscillation frequency of a liquid column as a whole.

Keywords: *hydroelasticity, circular elastic plates, ideal incompressible liquid, axially symmetric oscillations.*

Ю.Н. Кононов, Ю.А. Джуха

Про упрощение частотного уравнения собственных осесимметричных колебаний идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре с упругими основаниями.

Проведено упрощение ранее полученного частотного уравнения собственных осесимметричных колебаний тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре с упругими основаниями в виде тонких круговых пластин. Устранена особенность в частотном уравнении при совпадении массовых характеристик пластин. Рассмотрены произвольные способы закрепления контуров пластин и различные предельные случаи вырождения пластин в мембраны и абсолютно жесткие, случай отсутствия верхней пластины (жидкость со свободной поверхностью), а также случай невесомости. Показано, что частотный спектр совместных осесимметричных колебаний упругих оснований и идеальной жидкости состоит из двух наборов частот, соответствующих колебаниям верхнего и нижнего упругих оснований, и дополнительной частоты колебаний столба жидкости как одного целого.

Ключевые слова: *гидроупругость, круговые упругие пластины, идеальная несжимаемая жидкость, осесимметричные колебания.*

Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com,
yu.djukha@donnu.edu.ua

Отримано 10.12.18

УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-9

©2018. **О.В. Несмелова**

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статье предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения решений нелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи. При этом существенно использована техника псевдообращения матриц по Муру–Пенроузу. Поставленная в статье задача продолжает исследование условий разрешимости, а также схем нахождения решений нелинейных нетеровых краевых задач, приведенных в монографиях А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, И.Г. Малкина, Дж. Хейла, Ю.А. Рябова, А.М. Самойленко, Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной и А.А. Бойчука. Исследован общий случай, когда линейный ограниченный оператор, соответствующий однородной части линейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи, не имеет обратного. Найдены достаточные условия приводимости дифференциально-алгебраического уравнения к системе, объединяющей дифференциальное и алгебраическое уравнение. Таким образом, дифференциально-алгебраическая краевая задача приводится к нелинейной нетеровой краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучен случай наличия простых корней уравнения для порождающих амплитуд. Для нахождения решений поставленной задачи в критическом случае получены конструктивные необходимые и достаточные условия существования, а также построена сходящаяся итерационная схема. Предложенные условия разрешимости, а также схема нахождения решений нелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи подробно проиллюстрированы на примере нелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи для уравнения типа Дюффинга. Для контроля скорости сходимости итерационной схемы к точному решению дифференциально-алгебраической краевой задачи для уравнения типа Дюффинга использованы невязки полученных приближений в уравнении типа Дюффинга в пространстве непрерывных функций.

MSC: 34B15.

Ключевые слова: *нелинейная нетерова дифференциально-алгебраическая краевая задача, критический случай, уравнение типа Дюффинга.*

1. Линейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем.

Исследуем задачу о построении решений

$$z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$$

линейной дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t),\ \ell z(\cdot) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^k; \tag{1}$$

здесь

$$A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b] := \mathbb{C}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (номер государственной регистрации 0118U003390).

— непрерывные матрицы, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ — непрерывный вектор-столбец; $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный функционал:

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^k.$$

Матрицу $A(t)$ предполагаем, вообще говоря, прямоугольной: $m \neq n$, либо квадратной, но вырожденной. Исследованию дифференциально-алгебраических уравнений при помощи центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц посвящены монографии [1–6]. В статьях [7, 8] предложена серия достаточных условий разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши для линейной дифференциально-алгебраической системы (1) без использования центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц. Существенным отличием дифференциально-алгебраической системы (1) является бесконечномерность пространства ее решений [4], [9, c. 959]. В статье [10] предложены условия разрешимости, а также конструкции обобщенного оператора Грина краевой задачи линейной дифференциально-алгебраической системы (1).

При условии [7, 8, 10]

$$P_{A^*(t)} = 0,\ A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}_{n\times n}[a;b],\ A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a;b] \tag{2}$$

система (1) разрешима относительно производной

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)); \tag{3}$$

здесь

$$\operatorname{rank} A(t) := \sigma_0 = m \leq n.$$

Кроме того

$$\mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообратная (по Муру – Пенроузу), $P_{A^*}(t)$ — ортопроектор [14]:

$$P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(t)),$$

$P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$– матрица, составленная из ρ_0 линейно-независимых столбцов $(n \times n)$– матрицы-ортопроектора

$$P_A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(t)).$$

Обозначим $X_0(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t),\ X_0(a) = I_n$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3). Заметим, что нормальная фундаментальная матрица $X_0(t)$ невырождена. При условии (2) система (3), а следовательно и система (1), имеет решение вида

$$z(t,c) = X_0(t)c + X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\,ds,\ c \in \mathbb{R}^n.$$

По аналогии с классификацией импульсных краевых задач [10–12] случай (2) будем называть невырожденным. Подставляя общее решение

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \ c \in \mathbb{R}^n$$

задачи Коши $z(a) = c$ для дифференциально-алгебраического уравнения (1) в краевое условие (1), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$Q\,c = \alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot). \tag{4}$$

Уравнение (4) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{5}$$

Здесь P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(Q^*)$; матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*}, кроме того $Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{k\times n}$. При условии (5) и только при нем общее решение уравнения (4)

$$c = Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{Q_r}\,c_r, \ c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение краевой задачи (1)

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + X_0(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t).$$

Здесь P_Q — матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$; матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма. *При условии* (2) *система* (1) *имеет решение вида*

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \ c \in \mathbb{R}^n$$

При условии (5) *и только при нем для фиксированной непрерывной вектор-функции* $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ *общее решение дифференциально-алгебраической краевой задачи* (1)

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t), \ c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина дифференциально-алгебраической краевой задачи (1)

$$G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t) := X_0(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t).$$

2. Нелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем.

Исследуем задачу о построении решений

$$z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b],\ z(t,\cdot)\in\mathbb{C}^1[0,\varepsilon_0]$$

нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$A(t)z'(t,\varepsilon)=B(t)z(t,\varepsilon)+f(t)+\varepsilon\, Z(z,t,\varepsilon), \tag{6}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon)=\alpha. \tag{7}$$

Решения нетеровой ($n\neq k$) краевой задачи (6), (7) ищем в малой окрестности решения $z_0(t)\in\mathbb{C}^1[a,b]$ порождающей задачи

$$A(t)z_0'(t)=B(t)z_0(t)+f(t),\ \ell z_0(\cdot)=\alpha. \tag{8}$$

Здесь

$$A(t),\ B(t)\in\mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$$

— непрерывные матрицы, $f(t)\in\mathbb{C}[a,b]$ — непрерывный вектор; $Z(z,t,\varepsilon)$ — нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной $z(t)$ в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывная по $t\in[a,b]$ и непрерывная по малому параметру; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный векторный функционал:

$$\ell z(\cdot,\varepsilon):\mathbb{C}[a,b]\to\mathbb{R}^k.$$

Нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача (6) обобщает многочисленные постановки нелинейных нетеровых краевых задач [13,14]. Предположим, что порождающая краевая задача (8) невырождена, при этом система (6) разрешима относительно производной

$$z'=A^+(t)B(t)z+\mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t))+\varepsilon\, A^+(t)Z(z,t,\varepsilon). \tag{9}$$

Общее решение порождающей дифференциально-алгебраической краевой задачи (8) для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t)\in\mathbb{C}[a,b]$ имеет вид

$$z_0(t,c_r)=X_r(t)c_r+G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t),\ c_r\in\mathbb{R}^r.$$

Решения краевой задачи (7), (9) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи:

$$z(t,\varepsilon)=z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon).$$

Фиксируя одну из констант $c_r\in\mathbb{R}^r$, для нахождения вектора

$$x(t,\varepsilon):\ x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b],\ x(t,\cdot)\in\mathbb{C}^1[0,\varepsilon_0],\ x(t,0)\equiv 0$$

аналогично [14], приходим к задаче

$$x' = A^{+}(t)B(t)x + \varepsilon\, A^{+}(t)Z(z_0 + x, t, \varepsilon),\ \ \ell x(\cdot, \varepsilon) = 0. \tag{10}$$

3. Критический случай.

Предположим, что для дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) имеет место критический случай ($P_{Q^*} \neq 0$). Предположим также, что дифференциально-алгебраическое уравнение (8) невырождено. При этом порождающая задача (8) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (5) и для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ имеет $r-$ линейно-независимых решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t),\ \ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

В критическом случае в малой окрестности решения порождающей задачи краевая задача (7), (9) разрешима тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_d^*}\,\ell K\Big[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon), \nu_0(s)\Big](\cdot) = 0 \tag{11}$$

и для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ имеет $r-$ линейно-независимых решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t),\ \ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Предположим также, что нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача (6), (7) имеет решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$. При дополнительном условии

$$A^{+}(\cdot)Z(z, \cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}[a; b],\ \ A^{+}(t)Z(\cdot, t, \varepsilon) \in \mathbb{C}[||z - z_0|| < q] \tag{12}$$

для существования решений нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) необходимо выполняется условие

$$F(c_r^*) := P_{Q_d^*}\,\ell K\Big[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0), \nu_0(s)\Big](\cdot) = 0. \tag{13}$$

Фиксируя одно из решений $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения (13), решение

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$$

дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) ищем в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t).$$

Таким образом, аналогично [14], приходим к задаче

$$x'(t,\varepsilon) = A^{+}(t)B(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\, A^{+}(t)Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{14}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = 0. \tag{15}$$

Решения дифференциально-алгебраической краевой задачи (14), (15) при этом определяет операторная система [14, 15]

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),\ \ x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = G\Big[A^{+}(s)Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon); \nu_0(s); \varepsilon\Big](t).$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Z(z_0(t,c_r^*){+}x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0:$

$$Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = Z(z_0(t,c_r^*), t, 0) +$$

$$+A_1(t)x(t,\varepsilon) + R(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{16}$$

где $A_1(t) = Z'_z(z_0(t,c_r^*),t,0)$. Остаток $R(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения функции $Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ при условии $Z'_\varepsilon(z_0(t,c_r^*),t,0) \equiv 0$ более высокого порядка малости по x и ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем первые два члена разложения, поэтому

$$R(z,t,\varepsilon)\Bigg|_{\begin{array}{l} z\ =\ z_0(t,c_r^*), \\ \varepsilon\ =\ \ 0 \end{array}} \equiv 0,\ \ \frac{\partial R(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\begin{array}{l} z\ =\ z_0(t,c_r^*), \\ \varepsilon\ =\ \ 0 \end{array}} \equiv 0.$$

При условии $P_{B_0^*} = 0$ по меньшей мере одно решение краевой задачи (14), (15) определяет операторная система

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$B_0\, c_r(\varepsilon) = P_{Q_d^*}\, \ell K\Big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + R(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); \nu_0(s); \alpha\Big](t),$$

эквивалентная задаче о построении решения системы уравнений (14), удовлетворяющих краевому условию (15); здесь

$$B_0 = P_{Q_d^*}\, \ell K\Big[A_1(s)X_r(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)$$

— постоянная $(d \times r)$ – матрица. Для построения решений этой операторной системы применим [14, 15] метод простых итераций; таким образом получаем итерационную схему

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = B_0^{-1}\, P_{Q_d^*}\, \ell K\Bigg[A_1(s)c^{(1)}_{r_{k+1}}(s,\varepsilon)+ \qquad (17)$$

$$+R(z_0(s,c_r^*) + x_{r_{k+1}}(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\Bigg](\cdot),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,$$

$$x^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Bigg[Z(z_0(s,c_r^*) + x_k(s,\varepsilon), s, \varepsilon); \nu_0(s); \alpha\Bigg](t).$$

Достаточные условие существования решения нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) в критическом случае определяет следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что дифференциально-алгебраическое уравнение* (8) *невырождено. В критическом случае* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *порождающая задача* (8) *разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие* (5) *и для фиксированной непрерывной вектор-функции* $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ *имеет* $r-$ *линейно-независимых решений*

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Bigg[f(s); \nu_0(s); \alpha\Bigg](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

При условии $P_{B_0^*} = 0$ *для каждого корня* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *уравнения* (13) *для порождающих амплитуд при условии* $P_{B_0^*} = 0$ *и дополнительном условии* (12) *нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача* (6), (7) *имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$. *Для построения решений*

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)$$

нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) *применима сходящаяся при* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$ *итерационная схема* (17).

Доказанная теорема обобщает соответствующие утверждения [14] на случай нелинейной невырожденной дифференциально-алгебраической краевой задачи (6), (7) в критическом случае.

Пример. *Требованиям доказанной теоремы удовлетворяет нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача для уравнения типа Дюффинга*

$$A(t)\, z'(t,\varepsilon) = B(t)z(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon\, Z(z,\varepsilon),\ \ell z(\cdot,\varepsilon) = 0, \qquad (18)$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \ \ell z(\cdot, \varepsilon) := \Upsilon \left(z(0, \varepsilon) - z(2\pi, \varepsilon) \right).$$

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \\ z_c(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \ \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 \\ z_a^3(t, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (2) выполнено, постольку система (18) невырождена и имеет решение вида

$$z(t, c) = X_0(t)c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \ c \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 1 - \cos t \\ -\sin t & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 3t \\ \sin 3t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица $A(t)$ прямоугольная, при этом

$$\rho_0 = 1 \neq 0, \ P_A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P_{A_{\rho_0}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поэтому найденное решение зависит от произвольной непрерывной скалярной функции; в данном случае $\nu_0(t) := 0$. Общее решение однородной части для порождающей задачи (18) определяет матрица

$$Q = 0, \ P_Q = P_{Q_r} = I_3, \ P_{Q^*} = I_2.$$

Таким образом, дифференциально-алгебраическая краевая задача (18) представляет критический случай, при этом выполнено условие разрешимости (5). Общее решение неоднородной части для порождающей задачи (18)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t), \ c_r \in \mathbb{R}^3;$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t) = K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \cos t - \cos 3t \\ 3 \sin 3t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

а также матрица $X_r(t) = X_0(t)$. В случае нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (18) уравнение (13) имеет решение

$$c_r^* = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которому соответствует решение порождающей задачи

$$z(t, c_r^*) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -\cos 3t \\ 3\sin 3t \\ 0 \end{pmatrix},$$

а также матрица полного ранга

$$B_0 = \frac{3\pi}{128}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку выполнено условие $P_{B_0^*} = 0$, постольку по меньшей мере одно решение нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (18) определяет итерационная схема (17). Таким образом, находим

$$z_1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} z_{1a}(t,\varepsilon) \\ z_{1b}(t,\varepsilon) \\ z_{1c}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

где

$$z_{1a}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{327\ 680}\Big(31\varepsilon - 124\,\varepsilon\cos t - 40\ 960\cos 3t + 60\,\varepsilon\cos 3t + 2\,\varepsilon\cos 9t\Big),$$

$$x_{1b}(t,\varepsilon) = \frac{2\,\varepsilon}{327\ 680}\Big(62\,\varepsilon\sin t + 61\ 440\ \sin 3t - 90\,\varepsilon\sin 3t - 9\,\varepsilon\sin 9t\Big).$$

$$x_{1c}(t,\varepsilon) = \frac{31\,\varepsilon}{327\ 680}.$$

Аналогично находим

$$z_2(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} z_{2a}(t,\varepsilon) \\ z_{2b}(t,\varepsilon) \\ z_{2c}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

где

$$z_{2a}(t,\varepsilon) = \frac{31\,\varepsilon}{327\ 680} + \frac{37\ 059\,\varepsilon^2}{18\ 790\ 481\ 920} - \frac{2\ 343\ 800\ 971\,\varepsilon^3}{275\ 152\ 784\ 850\ 944\ 000} +$$
$$+\frac{1\ 150\ 416\ 221\ 963\,\varepsilon^4}{36\ 402\ 933\ 558\ 007\ 771\ 955\ 200} - \frac{31\,\varepsilon\cos t}{81\ 920} - \frac{129\,\varepsilon^2\cos t}{117\ 440\ 512} + \frac{755\ 013\ 771\,\varepsilon^3\cos t}{68\ 788\ 196\ 212\ 736\ 000} -$$
$$-\frac{3\ 054\ 692\ 099\ 539\,\varepsilon^4\cos t}{91\ 007\ 333\ 895\ 019\ 429\ 888\ 000} - \frac{961\,\varepsilon^3\cos 2t}{214\ 748\ 364\ 800} - \frac{961\,\varepsilon^4\cos 2t}{4\ 398\ 046\ 511\ 104\ 000} -$$
$$-\frac{\cos 3t}{8} + \frac{3\,\varepsilon\cos 3t}{16\ 384} - \frac{273\,\varepsilon^2\cos 3t}{335\ 544\ 320} + \frac{34\ 233\,\varepsilon^3\cos 3t}{6\ 871\ 947\ 673\ 600} - \frac{311\ 981\,\varepsilon^4\cos 3t}{70\ 368\ 744\ 177\ 664\ 000} -$$
$$-\frac{961\,\varepsilon^3\cos 4t}{1\ 073\ 741\ 824\ 000} + \frac{2\ 883\,\varepsilon^4\cos 4t}{2\ 199\ 023\ 255\ 552\ 000} + \frac{31\,\varepsilon^2\cos 5t}{167\ 772\ 160} - \frac{279\,\varepsilon^4\cos 5t}{703\ 687\ 441\ 776\ 640} -$$
$$-\frac{93\,\varepsilon^4\cos 6t}{1\ 468\ 006\ 400} + \frac{2\ 883\,\varepsilon^4\cos 6t}{15\ 032\ 385\ 536\ 000} - \frac{279\,\varepsilon^4\cos 6t}{1\ 924\ 145\ 348\ 608\ 000} + \frac{31\,\varepsilon^2\cos 7t}{335\ 544\ 320} -$$

$$-\frac{961\,\varepsilon^3\cos 7t}{3\ 435\ 973\ 836\ 800}+\frac{13\ 919\,\varepsilon^4\cos 7t}{70\ 368\ 744\ 177\ 664\ 000}+\frac{961\,\varepsilon^4\cos 8t}{92\ 358\ 976\ 733\ 184\ 000}+\frac{\cos 9t}{163\ 840}-$$
$$-\frac{3\,\varepsilon^2\cos 9t}{104\ 857\ 600}+\frac{153\,\varepsilon^3\cos 9t}{3\ 435\ 973\ 836\ 800}-\frac{1\ 167\,\varepsilon^4\cos 9t}{28\ 147\ 497\ 671\ 065\ 600}+\frac{961\,\varepsilon^4\cos 10t}{145\ 135\ 534\ 866\ 432\ 000}-$$
$$+-\frac{31\,\varepsilon^3\cos 11t}{8\ 589\ 934\ 592\ 000}-\frac{31\,\varepsilon^4\cos 11t}{175\ 921\ 860\ 444\ 160\ 000}+\frac{93\,\varepsilon^3\cos 12t}{61\ 418\ 032\ 332\ 800}-$$
$$-\frac{279\,\varepsilon^4\cos 12t}{125\ 784\ 130\ 217\ 574\ 400}-\frac{31\,\varepsilon^3\cos 13t}{12\ 025\ 908\ 428\ 800}+\frac{93\,\varepsilon^2\cos 13t}{24\ 629\ 060\ 462\ 182\ 400}-$$
$$-\frac{3\,\varepsilon^3\cos 15t}{9\ 395\ 240\ 960}+\frac{183\,\varepsilon^4\cos 15t}{192\ 414\ 534\ 860\ 800}-\frac{279\,\varepsilon^4\cos 15t}{394\ 064\ 967\ 394\ 918\ 400}+$$
$$+\frac{31\,\varepsilon^4\cos 17t}{844\ 424\ 930\ 131\ 968\ 000}-\frac{93\,\varepsilon^4\cos 18t}{5\ 682\ 276\ 092\ 346\ 368\ 000}+\frac{31\,\varepsilon^4\cos 19t}{1\ 055\ 531\ 162\ 664\ 960\ 000}+$$
$$+\frac{3\,\varepsilon^3\cos 21t}{377\ 957\ 122\ 048\ 000}-\frac{9\,\varepsilon^4\cos 21t}{774\ 056\ 185\ 954\ 304\ 000}-\frac{\varepsilon^4\cos 27t}{12\ 807\ 111\ 440\ 334\ 848\ 000}-$$
$$-\frac{93\,\pi\,\varepsilon^2\sin t}{20\ 971\ 520}-\frac{93\,\varepsilon^2 t\sin t}{20\ 971\ 520}+\frac{2\ 697\pi\,\varepsilon^3\sin t}{429\ 496\ 729\ 600}+\frac{2\ 697t\,\varepsilon^3\sin t}{429\ 496\ 729\ 600}-$$
$$-\frac{441\ 471\pi\,\varepsilon^4\sin t}{17\ 592\ 186\ 044\ 416\ 000}-\frac{441\ 471\,t\,\varepsilon^4\sin t}{17\ 592\ 186\ 044\ 416\ 000},$$

$$x_{2b}(t,\varepsilon)=-\frac{93\pi\,\varepsilon^2\cos t}{20\ 971\ 520}-\frac{93\,\varepsilon^2\cos t}{20\ 971\ 520}+\frac{2\ 697\pi\,\varepsilon^3\cos t}{429\ 496\ 729\ 600}+\frac{2\ 697t\,\varepsilon^3\cos t}{429\ 496\ 729\ 600}-$$
$$-\frac{441\ 471\pi\,\varepsilon^4\cos t}{17\ 592\ 186\ 044\ 416\ 000}-\frac{441\ 471\,t\,\varepsilon^4\cos t}{17\ 592\ 186\ 044\ 416\ 000}+\frac{31\,\varepsilon\sin t}{81\ 920}-\frac{1\ 959\,\varepsilon^2\sin t}{587\ 202\ 560}-$$
$$-\frac{323\ 062\ 251\,\varepsilon^3\sin t}{68\ 788\ 196\ 212\ 736\ 000}+\frac{770\ 888\ 449\ 411\,\varepsilon^4\sin t}{91\ 007\ 333\ 895\ 019\ 429\ 888\ 000}+\frac{961\,\varepsilon^3\sin 2t}{107\ 374\ 182\ 400}-$$
$$-\frac{961\,\varepsilon^4\sin 2t}{2\ 199\ 023\ 255\ 552\ 000}+\frac{3\sin 3t}{8}-\frac{9\,\varepsilon\sin 3t}{16\ 384}+\frac{819\,\varepsilon^2\sin 3t}{335\ 544\ 320}-\frac{102\ 699\,\varepsilon^3\sin 3t}{6\ 871\ 947\ 673\ 600}+$$
$$+\frac{935\ 943\,\varepsilon^4\sin 3t}{70\ 368\ 744\ 177\ 664\ 000}+\frac{961\,\varepsilon^3\sin 4t}{268\ 435\ 456\ 000}-\frac{2\ 883\,\varepsilon^4\sin 4t}{549\ 755\ 813\ 888\ 000}-\frac{31\,\varepsilon^2\sin 5t}{33\ 554\ 432}+$$
$$+\frac{279\,\varepsilon^4\sin 5t}{140\ 737\ 488\ 355\ 328}+\frac{279\,\varepsilon^2\sin 6t}{734\ 003\ 200}-\frac{8\ 649\,\varepsilon^3\sin 6t}{7\ 516\ 192\ 768\ 000}+\frac{837\,\varepsilon^4\sin 6t}{962\ 072\ 674\ 304\ 000}-$$
$$-\frac{217\,\varepsilon^2\sin 7t}{335\ 544\ 320}+\frac{6\ 727\,\varepsilon^3\sin 7t}{3\ 435\ 973\ 836\ 800}-\frac{97\ 433\,\varepsilon^4\sin 7t}{70\ 368\ 744\ 177\ 664\ 000}-\frac{961\,\varepsilon^4\sin 8t}{11\ 544\ 872\ 091\ 648\ 000}-$$
$$-\frac{9\,\varepsilon\sin 9t}{163\ 840}+\frac{27\,\varepsilon^2\sin 9t}{104\ 857\ 600}-\frac{1\ 377\,\varepsilon^3\sin 9t}{3\ 435\ 973\ 836\ 800}+\frac{10503\,\varepsilon^4\sin 9t}{28\ 147\ 497\ 671\ 065\ 600}-$$
$$-\frac{961\,\varepsilon^4\sin 10t}{14\ 513\ 553\ 486\ 643\ 200}+\frac{341\,\varepsilon^3\sin 11t}{8\ 589\ 934\ 592\ 000}+\frac{341\,\varepsilon^4\sin 11t}{175\ 921\ 860\ 444\ 160\ 000}-$$
$$-\frac{279\,\varepsilon^3\sin 12t}{15\ 354\ 508\ 083\ 200}+\frac{837\,\varepsilon^4\sin 12t}{31\ 446\ 032\ 554\ 393\ 600}+\frac{403\,\varepsilon^3\sin 13t}{12\ 025\ 908\ 428\ 800}-$$

$$-\frac{1\ 209\,\varepsilon^4\sin 13t}{24\ 629\ 060\ 462\ 182\ 400}+\frac{9\,\varepsilon^2\sin 15t}{1\ 879\ 048\ 192}-\frac{549\,\varepsilon^3\sin 15t}{38\ 482\ 906\ 972\ 160}-$$

$$-\frac{837\,\varepsilon^4\sin 15t}{78\ 812\ 993\ 478\ 983\ 680}-\frac{527\,\varepsilon^4\sin 17t}{844\ 424\ 930\ 131\ 968\ 000}+\frac{837\,\varepsilon^4\sin 18t}{2\ 841\ 138\ 046\ 173\ 184\ 000}-$$

$$-\frac{589\,\varepsilon^4\sin 19t}{1\ 055\ 531\ 162\ 664\ 960\ 000}-\frac{63\,\varepsilon^3\sin 21t}{377\ 957\ 122\ 048\ 000}+$$

$$+\frac{189\,\varepsilon^4\sin 21t}{774\ 056\ 185\ 954\ 304\ 000}+\frac{27\,\varepsilon^4\sin 27t}{12\ 807\ 111\ 440\ 334\ 848\ 000}.$$

$$x_{2c}(t,\varepsilon)=\frac{31\,\varepsilon}{327\ 680}-\frac{921\,\varepsilon^2}{3\ 758\ 096\ 384}-$$

$$-\frac{556\ 415\ 371\,\varepsilon^3}{275\ 152\ 784\ 850\ 944\ 000}+\frac{1\ 032\ 284\ 380\ 167\,\varepsilon^4}{182\ 014\ 667\ 790\ 038\ 859\ 776\ 000}.$$

Для оценки точности найденных приближений к решению нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (18) определим невязки $\Delta_k(\varepsilon)$ нулевого и первого приближения к решению краевой задачи (18). Положив $\varepsilon := 0,1$, $k = 0,\ 1,\ 2$, имеем

$$\Delta_0(0,1)\approx 0,000\ 195\ 312,\ \ \Delta_1(0,1)\approx 2,23\ 935\times 10^{-7},$$

$$\Delta_2(0,1)\approx 1,62\ 572\times 10^{-9}.$$

Аналогично, имеем

$$\Delta_0(0,01)\approx 0,0000\ 195\ 312,\ \ \Delta_1(0,01)\approx 2,24\ 013\times 10^{-9},$$

$$\Delta_2(0,01)\approx 1.62\ 658\times 10^{-12}.$$

Отметим также, что нулевое и первое приближения к решению краевой задачи (18) в точности удовлетворяет краевому условию. В то же время, второе приближения к решению краевой задачи (18) содержит невязку в краевом условии

$$\ell z_2(\cdot,\varepsilon)=\frac{93\,\pi\,\varepsilon^2}{10\ 485\ 760}-\frac{2\ 697\,\pi\,\varepsilon^3}{214\ 748\ 364\ 800}+\frac{441\ 471\,\pi\,\varepsilon^4}{8\ 796\ 093\ 022\ 208\ 000},$$

вызванную линеаризацией условия разрешимости (11), использованной при нахождении вектора $c_{r_2}(\varepsilon)$. Избежать невязки в краевом условии для второго приближения к решению краевой задачи (18) можно при нахождении вектора $c_{r_2}(\varepsilon)$ непосредственно из условия разрешимости (11), в данном случае, нелинейного уравнения, аналогично [18, 19].

Цитированная литература

1. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.

2. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища школа, 2000. – 296 с.
3. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. – San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. – 178 p.
4. *Campbell S.L., Petzold L.R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Alg. Descrete Methods. – 1983. – №4. – P. 517–521.
5. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск: Наука, 1996. – 280 с.
6. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 686 с.
7. *Чуйко С.М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исследов. и моделирование. – 2013. – **5**, №5. – С. 769–783.
8. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – **210**, №1. – P. 9–21.
9. *Бойчук А.А., Покутный А.А., Чистяков В.Ф.* О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – **53**, № 6. – С. 958–969.
10. *Чуйко С.М.* О понижении порядка в дифференциально алгебраической системе // Укр. мат. вестник. – 2018. – **15**, №1. – С. 1–17.
11. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
12. *Chuiko S.M.* A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action // Differential Equations. – 2001. – **37**, № 8. – P. 1189–1193.
13. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
14. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
15. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 2. – С. 278–288.
16. *Chuiko S.M.* Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics. – 2016. – **60**, №8. – P. 64–73.
17. *Chuiko S.M., Starkova O.V.* About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods // Nonlinear oscillation. – 2009. – **12**, № 4. – P. 556–573.
18. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
19. *Chuiko S.M.* To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics. – 2017. – **85**, №1. – P. 62–68.

References

1. Boyarintsev, Yu.E., Chistyakov, V.F. (1998). *Algebro-differentsialnyie sistemyi. Metodyi resheniya i issledovaniya.* Novosibirsk: Nauka (in Russian).
2. Samoylenko, A.M., Shkil, M.I., Yakovets, V.P. (2000). *Liniyni sistemi diferentsIalnih rivnyan z virodzhennyam.* K.: Vischa shkola (in Ukrainian).
3. Campbell, S.L. (1980). *Singular Systems of differential equations.* San Francisco-London-Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program.
4. Campbell, S.L., Petzold, L.R. (1983). Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. *SIAM J. Alg. Descrete Methods, 4*, 517-521.
5. Chistyakov, V.F. (1996). *Algebro-differentsialnyie operatoryi s konechnomernyim yadrom.* Novosibirsk: Nauka (in Russian).
6. Hayrer, E., Vanner, G. (1999). *Reshenie obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy. Zhestkie i differentsialno-algebraicheskie zadachi.* Moscow: Mir (in Russian).
7. Chuiko, S.M. (2013). Lineynyie neterovyi kraevyie zadachi dlya differentsialno-algebraicheskih

sistem. *Komp. issledov. i modelirovanie, 5*(5), 769-783 (in Russian).

8. Chuiko, S.M. (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. *Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), 210*(1), 9-21.
9. Boychuk, A.A., Pokutnyiy, A.A., Chistyakov, V.F. (2013). O primenenii teorii vozmuscheniy k issledovaniyu razreshimosti differentsialno-algebraicheskih uravneniy. *Zhurnal vyichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki, 53*(6), 958-969 (in Russian).
10. Chuiko, S.M. (2018). O ponizhenii poryadka v differentsialno algebraicheskoy sisteme. *Ukr. mat. vestnik, 15*(1), 1-17 (in Russian).
11. Samoylenko, A.M., Perestyuk, N.A. (1987). *Differentsialnyie uravneniya s impulsnyim vozdeystviem.* Kiev: Vischa shk. (in Russian).
12. Chuiko, S.M. (2001). A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action. *Differential Equations, 37*(8), 1189-1193 (in Russian).
13. Grebenikov, E.A., Ryabov, Yu.A. (1979). *Konstruktivnyie metodyi analiza nelineynyih system.* Moscow: Nauka (in Russian).
14. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition).* Berlin; Boston: De Gruyter.
15. Chuiko, A.S. (2005). Oblast shodimosti iteratsionnoy protseduryi dlya slabonelineynoy kraevoy zadachi. *Neliniyni kolivannya, 8*(2), 278-288 (in Russian).
16. Chuiko, S.M. (2016). Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation. *Russian Mathematics, 60*(8), 64-73.
17. Chuiko, S.M., Starkova, O.V. (2009). About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods. *Nonlinear oscillation, 12*(4), 556-573.
18. Kantorovich, L.V., Akilov, G.P. (1977). *Funktsionalnyiy analiz.* Moscow: Nauka (in Russian).
19. Chuiko, S.M. (2017). To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics, 85*(1), 62-68.

O.V. Nesmelova

Nonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic systems.

The article proposes original solvability conditions and the scheme for finding solutions of the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem. And we use the matrix pseudo-inversion technique of Moore–Penrose. The posed problem in the article continues the study of conditions of solvability and schemes for finding solutions of the nonlinear Noetherian boundary-value problems given in the monographs by A. Poincare, A.M. Lyapunov, I.G. Malkin, J. Hale, Yu.A. Ryabov, A.M. Samoylenko, N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina and A.A. Boychuk. We studied a general case, when a linear bounded operator corresponding to the homogeneous part of the linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem has no inverse. Sufficient conditions for reducibility of the differential algebraic equation to the system uniting a differential and algebraic equation are found. Thus, the differential-algebraic boundary value problem is reduced to the nonlinear Noetherian boundary value problem for the system of ordinary differential equations. We studied the case of the presence of simple roots of the equation for generating amplitudes. Constructive necessary and sufficient conditions of existence were obtained to find solutions to the problem in the critical case, and the converging iterative scheme was constructed. The proposed solvability conditions, and the scheme for finding solutions of the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem are illustrated in detail by the example from the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem for Duffing type equations. For control of the rate of the iterative scheme convergence to the exact solution of the differential-algebraic boundary value problem for the Duffing type equation, we used the residuals of the obtained approximations in the Duffing type equation in the space of continuous functions.

Keywords: *nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem, critical case, Duffing type equation.*

О.В. Нєсмєлова

Нелінійні крайові задачі для невироджених диференціально-алгебраїчних систем.

У статті запропоновано оригінальні умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі. При цьому істотно використано техніку псевдообернення матриць по Муру–Пенроузу. Поставлена в статті задача продовжує дослідження умов розв'язності, а також схем знаходження розв'язків нелінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях А. Пуанкаре, О.М. Ляпунова, І.Г. Малкіна, Дж. Хейла, Ю.О. Рябова, А.М. Самойленко, М.В. Азбелева, В.П. Максімова, Л.Ф. Рахматулліної та О.А. Бойчука. Досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, який відповідає однорідній частини лінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі, не має оберненого. Знайдено достатні умови звідності диференціально-алгебраїчного рівняння до системи, яка об'єднує диференціальне та алгебраїчне рівняння. Таким чином, диференціально-алгебраїчна крайова задача зводиться до нелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь. Вивчено випадок наявності простих коренів рівняння для породжуючих амплітуд. Для знаходження розв'язків поставленої задачі в критичному випадку отримані конструктивні необхідні і достатні умови існування, а також побудована збіжна ітераційна схема. Запропоновані умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі, детально проілюстровані на прикладі нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі для рівняння типу Дюффінга. Досліджена в статті нелінійна нетерова диференціально-алгебраїчна крайова задача для рівняння Дюффінга не є диференціальною, на відміну від найбільш вивчених крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, а також традиційних постановок періодичних крайових задач для диференціальних рівнянь Дюффінга, Льєнара і Ван дер Поля. Для контролю швидкості збіжності ітераційної схеми до точного розв'язку диференціально-алгебраїчної крайової задачі для рівняння типу Дюффінга використані нев'язки отриманих наближень в рівнянні типу Дюффінга в просторі неперервних функцій.

Ключові слова: *нелінійна нетерова диференціально-алгебраїчна крайова задача, критичний випадок, рівняння типу Дюффінга.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск
star-o@ukr.net

Получено 27.12.18

УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-10

©2018. **О.А. Новиков, О.Г. Ровенская**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УКЛОНЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ РЯДОВ ФУРЬЕ НА КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Работа касается вопросов приближения в равномерной метрике периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами, которые порождаются линейными методами суммирования рядов Фурье. Рассматриваются классы $\overline{\psi}$–дифференцируемых периодических функций многих переменных, которые позволяют по-отдельности учитывать свойства обычных и смешанных частных производных, и задающиеся по аналогии с классами $\overline{\psi}$–дифференцируемых периодических функций одной переменной. Получены интегральные представления прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$–дифференцируемых периодических функций многих переменных. Полученные формулы могут быть полезными для дальнейшего исследования аппроксимативных свойств различных линейных прямоугольных методов на классах $\overline{\psi}$–дифференцируемых периодических функций многих переменных с целью получения решения соответствующих задач Колмогорова–Никольского.

MSC: 42A10.

Ключевые слова: *обобщенная производная, классы дифференцируемых функций, линейные прямоугольные методы.*

1. Введение.

Наиболее простым и естественным примером линейного процесса аппроксимации непрерывных периодических функций действительной переменной может служить приближение этих функций элементами последовательностей частичных сумм ряда Фурье. Вместе с тем, значительное число работ этого напрвления посвящено изучению аппроксимативных свойств других методов приближения, которые для функции f порождаются некоторыми преобразованиями частичных сумм ее ряда Фурье. Методы исследования интегральных представлений уклонений приближающих полиномов на классах периодических функций действительной переменной возникли и получили свое развитие благодаря работам С. М. Никольского, С. Б. Стечкина, С. А. Теляковского, А. И. Степанца и др. В работах [1, 2] можно найти библиографию по вопросам этой тематики.

В тоже время вопросы приближения классов периодических дифференцируемых функций многих переменных изучены в меньшей степени. Формулы для интегральных представлений уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах периодических дифференцируемых функций многих переменных были опубликованы в работах [3, 4] без доказательств, а также в некоторых других малодоступных источниках. Данная работа посвящена доказательству упомянутых формул, которые приводятся здесь с некоторыми изменениями и дополнениями, необходимыми для дальнейшего изложения.

Классы $\overline{\psi}$–дифференцируемых периодических функций многих переменных будем определять следуя работе [3] (также [4]). Пусть R^m — евклидово пространство с елементами $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, $T^m=\prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ — m-мерный куб с ребром 2π. Введем обозначения подмножеств из R^m элементов с целочисленными компонентами:

$$N^m=\{\vec{x}\in R^m|x_i\in\mathbb{N},\ \ i=1,2,\ldots,m\},$$

$$N_*^m=\{\vec{x}\in R^m|x_i\in N_*=\mathbb{N}\cup\{0\},\ \ i=1,2,\ldots,m\},$$

$$N_i^m=\{\vec{x}\in R^m|x_i\in\mathbb{N},\ \ x_j\in N_*,\ \ i\neq j\},$$

$$E^m=\{\vec{x}\in R^m|x_i\in\{0;1\},\ \ i=1,2,\ldots,m\}.$$

Пусть $L(T^m)$ — множество 2π-периодических по каждой переменной суммируемых на T^m функций $f(\vec{x})=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ и $f\in L(T^m)$. Каждой паре элементов $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N_*^m$ можно поставить в соответствие величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)=\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f(\vec{x})\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\,dx_i.$$

Величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N_*^m$ являются коэффициентами Фурье функции $f\in L(T^m)$ [6].

Каждому вектору $\vec{k}\in N_*^m$ соответствует основная гармоника функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{i=1}^{m}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)$$

и гармоники, сопряженные по переменным x_i, $i=1,2...,m$

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in E^m}a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\prod_{j\in\overline{m}\setminus\{i\}}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)\cos\left(k_ix_i-\frac{(s_i+1)\pi}{2}\right).$$

Ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определяется следующим соотношением [6]

$$S[f]=\sum_{\vec{k}\in N_*^m}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

в котором $q(\vec{k})$ — количество нулевых компонент вектора $\vec{k}$.

Пусть $f\in L(T^m)$, $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2$ — фиксированные наборы систем чисел, $k\in N_*$,

$$\overline{\psi}_i(k)=\sqrt{\psi_{i1}^2(k)+\psi_{i2}^2(k)},\quad \overline{\Psi}_i(k)=\sqrt{\Psi_{i1}^2(k)+\Psi_{i2}^2(k)}$$

и выполнены условия $\overline{\psi}_i(k) \neq 0$, $\overline{\Psi}_i(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\psi_{i1}(0) = 1$, $\Psi_{i1}(0) = 1$, $\psi_{i2}(0) = 0$, $\Psi_{i2}(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Если ряд

$$\sum_{\vec{k} \in N_i^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \overline{\psi}_i^2(k_i)} \left[\psi_{i1}(k_i) A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) - \psi_{i2}(k_i) A_{\vec{k}}^{\vec{e_i}}(f; \vec{x}) \right]$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi(\vec{x}) \in L(T^m)$, то эта функция обозначается символом $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и называется $\overline{\psi}_i$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_i, $i = 1, 2, \dots, m$.

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, \dots, m\}$. Для фиксированного r-элементного множества $\mu(r) \subset \overline{m}$, $\mu(r) = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i \in \mu(r)$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, называется функция $f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_{i_r}} \partial^{\overline{\Psi}_{i_{r-1}}} \dots \partial^{\overline{\Psi}_{i_1}} f(\vec{x})}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Множество непрерывных функций $f \in L(T^m)$ таких, что для любого $\mu \subseteq \overline{m}$ существуют $\overline{\Psi}_\mu$-производные, обозначается символом $C^{m\overline{\psi}}$.

Классы $\overline{\psi}$–дифференцируемых функций при $m = 1$ впервые были рассмотрены в работах А.И. Степанца (см., напр., [1, 2]), а при $m > 1$ — в работах Р.А. Ласурии [7] (также [6]). В одномерном случае при соответствующем выборе параметров, классы $C^{m\overline{\psi}}$ совпадают с известными классами Вейля, классами Соболева W_p^l, классами сверток с фиксированными ядрами.

Прямоугольные линейные средние рядов Фурье определяются следующим образом. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m\}$ — фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц $\Lambda_i = \{\lambda_{k_i}^{(n_i)}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\lambda_0^{(n_i)} = 1$, $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 0$ при $k_i \geq n_i$. Обозначим $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = \prod\limits_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m} [0; n_i - 1]$ — прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n} \in N^m$. Каждой функции $f \in L(T^m)$ можно поставить в соответствие многочлен

$$U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}).$$

При условии $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} \equiv 1$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, полиномы $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda)$ являются прямоугольными суммами Фурье $S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$ порядка $\vec{n}$.

Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$, $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i \leq n_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Если элементы $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями

$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k_i \leq n_i - p_i - 1, \\ 1 - \frac{k_i - n_i + p_i}{p_i}, & n_i - p_i \leq k_i \leq n_i - 1, \; i = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

то полиномы $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ называются прямоугольными суммами Валле Пуссена и обозначаются $V_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})$.

В виде полиномов $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ также задаются прямоугольные методы Фавара ($\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \frac{k_i\pi}{2n_i}\mathrm{ctg}\frac{k_i\pi}{2n_i}$, $i = 1,2,...,m$), Рогозинского ($\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \cos\frac{k_i\pi}{2n_i}$, $i = 1,2,...,m$) и др.

Величины

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$$

определяют уклонения прямоугольных линейных средних рядов Фурье от функции $f \in L(T^m)$.

Интегральные представления для величин $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ в одномерном случае были получены А.И. Степанцом (см., напр., [2]). В настоящей работе доказаны формулы для интегральных представлений величин $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)$ при произвольном $m \geq 1$.

2. Результат.

Для $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2$ обозначим

$$\tau_{k,j}^{(n_i)} = \begin{cases} (1-\lambda_k^{(n_i)})\psi_{ij}(k), & 1 \leq k \leq n_i, \\ \psi_{ij}(k), & k \geq n_i, \end{cases} \tag{1}$$

$$T_{k,j}^{(n_i)} = \begin{cases} (1-\lambda_k^{(n_i)})\Psi_{ij}(k), & 1 \leq k \leq n_i, \\ \Psi_{ij}(k), & k \geq n_i., \end{cases} \tag{2}$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть системы чисел* $\tau_{k,j}^{(n_i)}$, $T_{k,j}^{(n_i)}$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2$ *определены соотношениями* (1), (2) *и удовлетворяют условиям*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tau_{k,j}^{(n_i)} \cos\left(kt_i - \frac{j-1}{2}\pi\right) < \infty, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_{k,j}^{(n_i)} \cos\left(kt_i - \frac{j-1}{2}\pi\right) < \infty. \tag{4}$$

Тогда для любой функции $f \in C^{m\overline{\psi}}$ *во всех точках* $\vec{x} \in T^m$ *имеет место равенство*

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}\left(\vec{x} - t_i\vec{e}_i\right) \sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{k,1}^{(n_i)} \cos kt_i + \tau_{k,2}^{(n_i)} \sin kt_i\right) dt_i +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \frac{1}{\pi^r} \int_{T^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x} - \sum_{j\in\mu(r)} t_j\vec{e}_j\right) \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \sum_{\nu_j=0}^{\infty} \left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)} \cos \nu_j t_j + T_{\nu_j,2}^{(n_j)} \sin \nu_j t_j\right) dt_j. \tag{5}$$

Доказательство.
Имеем
$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = f(\vec{x}) - \sum_{\vec{k}\in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) =$$
$$= f(\vec{x}) - \sum_{\vec{k}\in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(n_i)} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Тогда
$$S[\delta_{\vec{n}}] = \sum_{\vec{k}\in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \left(1 - \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(n_i)}\right) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}). \tag{6}$$

Используя метод математической индукции можно показать, что имеет место равенство
$$1 - \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(n_i)} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{\mu(i)\subset\overline{m}} \prod_{j\in\mu(i)} \big(1 - \lambda_{k_j}^{(n_j)}\big).$$

Учитывая это соотношение и (6), имеем
$$S[\delta_{\vec{n}}] = \sum_{\vec{k}\in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \left(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{\mu(i)\subset\overline{m}} \prod_{j\in\mu(i)} \big(1 - \lambda_{k_j}^{(n_j)}\big)\right) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{\vec{k}\in N_i^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \big(1 - \lambda_{k_i}^{(n_i)}\big) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{\mu(i)\subset\overline{m}} \sum_{\vec{k}\in N_\mu^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \prod_{j\in\mu(i)} \big(1 - \lambda_{k_j}^{(n_j)}\big) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) \overset{df}{=}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} S_i(f;\vec{x}) + \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{\mu(i)\subset\overline{m}} S_\mu(f;\vec{x}). \tag{7}$$

Далее воспользуемся схемой доказательства, предложенной в работе [1, с. 53–54]. Рассмотрим функции
$$\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}\big(\vec{x} - t_i\vec{e}_i\big) \sum_{k=0}^{\infty} \big(\tau_{k,1}^{(n_i)} \cos kt_i + \tau_{k,2}^{(n_i)} \sin kt_i\big)\, dt_i,$$
$$\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi^r} \int_{T^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\Big(\vec{x} - \sum_{i\in\mu(r)} t_i\vec{e}_i\Big) \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \sum_{\nu_j=0}^{\infty} \big(T^{(n_j)}_{\nu_j,1}\cos\nu_j t_j + T^{(n_j)}_{\nu_j,2}\sin\nu_j t_j\big)\, dt_j.$$

Найдем коэффициенты Фурье этих функций. На основании (3) в следующем интеграле можно изменить порядок интегрирования

$$a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}) = \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}_i}\big(\vec{x}-t_i\vec{e}_i\big) \sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau^{(n_i)}_{k,1}\cos kt_i + \tau^{(n_i)}_{k,2}\sin kt_i\big)\, dt_i \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m}\cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big)\, dx_j = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau^{(n_i)}_{k,1}\cos kt_i +$$

$$+\tau^{(n_i)}_{k,2}\sin kt_i\big) \prod_{j=1, j\neq i}^{m}\cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big)\cos\Big(k_i\big(x_i+t_i\big) - \frac{s_i\pi}{2}\Big)\, dx_i\, dt_i =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau^{(n_i)}_{k,1}\cos kt_i + \tau^{(n_i)}_{k,2}\sin kt_i\big)\times$$

$$\times \prod_{j=1, j\neq i}^{m}\cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big)\times$$

$$\times\Big(\cos\Big(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\Big)\cos k_i t_i - \sin\Big(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\Big)\sin k_i t_i\Big)\, dx_j\, dx_i\, dt_i =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\prod_{j=1}^{m}\cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big)\, dx_j \times$$

$$\times\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau^{(n_i)}_{k,1}\cos kt_i + \tau^{(n_i)}_{k,2}\sin kt_i\big)\cos k_i t_i\, dt_i -$$

$$-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\prod_{j=1, j\neq i}^{m}\cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big)\, dx_j \sin\Big(k_i x_i - \frac{s_i\pi}{2}\Big)\times$$

$$\times\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\tau^{(n_i)}_{k,1}\cos kt_i + \tau^{(n_i)}_{k,2}\sin kt_i\big)\sin k_i t_i\, dt_i.$$

На основании определения величины $a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(f)$ имеем

$$a^{\vec{s}}_{\vec{k}}\Big(f^{\overline{\psi}_i}\Big) = \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\prod_{j=1}^{m}\cos\Big(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\Big)\, dx_j,$$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)=\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\prod_{j=1,j\neq i}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j\times$$

$$\times\cos\left(k_ix_i-\frac{(s_i+(-1)^{s_i})\pi}{2}\right)dx_i=\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})\times$$

$$\times\prod_{j=1,j\neq i}^{m}\cos\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j(-1)^{s_i}\sin\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i.$$

Тогда

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right)=a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i\cos k_it_i\,dt_i+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\cos kt_i\,dt_i\right]-$$

$$-(-1)^{s_i}a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,1}^{(n_i)}\cos kt_i\sin k_it_i\,dt_i+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,2}^{(n_i)}\sin kt_i\sin k_it_i\,dt_i\right].\tag{8}$$

Воспользуемся формулами

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,j}^{(n_i)}\cos\left(kt_i+\frac{j-1}{2}\pi\right)\cos\left(k_it_i+\frac{j-1}{2}\pi\right)dt_i=\tau_{k_i,j}^{(n_i)},\tag{9}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tau_{k,j}^{(n_i)}\cos\left(kt_i+\frac{j-1}{2}\pi\right)\sin\left(k_it_i+\frac{j-1}{2}\pi\right)dt_i=0,\ j=1,2.\tag{10}$$

Объединяя соотношения (8)–(10), имеем

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right)=a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)\tau_{k_i,1}^{(n_i)}+(-1)^{s_i}a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)\tau_{k_i,2}^{(n_i)}=$$

$$=\left(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)}\right)\left(\psi_{i1}(k_i)a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(f^{\overline{\psi}_i}\right)+(-1)^{s_i}\psi_{i2}(k_i)a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}(f^{\overline{\psi}_i})\right)=$$

$$=\left(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)}\right)a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f),\quad \vec{s}\in E^m,\quad \vec{k}\in N_i^m,\tag{11}$$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right)=0,\quad \vec{s}\in E^m,\quad k_i=0.$$

На основании равенства (11) делаем вывод о том, что

$$S\left[\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right] = \sum_{\vec{k}\in N_i} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}}\big(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)}\big)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = S_i(f;\vec{x}). \tag{12}$$

Аналогично найдем коэффициенты Фурье функции $\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, $\mu(r)\subset\overline{m}$.

На основании (4) можем изменить порядок интегрирования в следующем интеграле

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\Big(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\Big) = \frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}\frac{1}{\pi^r}\int\limits_{T^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\Big(\vec{x}-\sum_{i\in\mu(r)} t_i\vec{e}_i\Big)\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{\nu_j=0}^{\infty}\big(T_{\nu_j,1}^{(n_j)}\cos\nu_j t_j + T_{\nu_j,2}^{(n_j)}\sin\nu_j t_j\big)dt_j\prod_{p=1}^{m}\cos\Big(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\Big)\,dx_p =$$

$$=\int\limits_{T^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{p\in\overline{m}\setminus\mu(r)}\cos\Big(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\Big)\times$$

$$\times\prod_{i\in\mu(r)}\cos\Big(k_i(x_i+t_i)-\frac{s_i\pi}{2}\Big)\prod_{p=1}^{m} dx_p\frac{1}{\pi^r}\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{\nu_j=0}^{\infty}\big(T_{\nu_j,1}^{(n_j)}\cos\nu_j t_j+$$

$$+T_{\nu_j,2}^{(n_j)}\sin\nu_j t_j\big)\,dt_j = \int\limits_{T^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{p\in\overline{m}\setminus\mu(r)}\cos\Big(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\Big)\times$$

$$\times\prod_{i\in\mu(r)}\Big(\cos\Big(k_i x_i-\frac{s_i\pi}{2}\Big)\cos k_i t_i - \sin\Big(k_i x_i-\frac{s_i\pi}{2}\Big)\sin k_i t_i\Big)\prod_{p=1}^{m} dx_p\times$$

$$\times\frac{1}{\pi^r}\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{\nu_j=0}^{\infty}\big(T_{\nu_j,1}^{(n_j)}\cos\nu_j t_j + T_{\nu_j,2}^{(n_j)}\sin\nu_j t_j\big)\,dt_j.$$

Поскольку

$$\prod_{j\in\mu(r)}(a_j-b_j) = \sum_{\varsigma\subset\mu(r)}\prod_{p\in\mu(r)\setminus\varsigma} a_p\prod_{j\in\varsigma}(-b_j),$$

то

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\Big(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\Big) = \int\limits_{T^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{p\in\overline{m}\setminus\mu(r)}\cos\Big(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\Big)\times$$

$$\times\sum_{\varsigma\subset\mu(r)}\Bigg(\prod_{p\in\mu(r)\setminus\varsigma}\cos\Big(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\Big)\cos k_p x_p\times$$

$$\times\prod_{i\in\varsigma}\Big(-\sin\Big(k_i x_i-\frac{s_i\pi}{2}\Big)\sin k_i t_i\Big)\Bigg)\prod_{p=1}^{m} dx_p\times$$

$$\times\frac{1}{\pi^r}\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{\nu_j=0}^{\infty}\left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)}\cos\nu_j t_j+T_{\nu_j,2}^{(n_j)}\sin\nu_j t_j\right)dt_j=$$

$$=\sum_{\varsigma\subset\mu(r)}\Bigg[\int\limits_{T^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{p\in\overline{m}\setminus\varsigma}\cos\left(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\right)dx_p\times$$

$$\times\prod_{i\in\varsigma}\sin\left(k_i x_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i\times$$

$$\times\frac{1}{\pi^r}\prod_{j\in\mu(r)\setminus\varsigma}\sum_{\nu_j=0}^{\infty}\left(T_{\nu_j,1}^{(n_j)}\cos\nu_j t_j+T_{\nu_j,2}^{(n_j)}\sin\nu_j t_j\right)dt_j\times$$

$$\times\cos k_j t_j\prod_{\gamma\in\varsigma}\sum_{\nu_\gamma=0}^{\infty}(T_{\nu_\gamma,1}^{(n_\gamma)}\cos\nu_\gamma t_\gamma+T_{\nu_\gamma,2}^{(n_\gamma)}\sin\nu_\gamma t_\gamma)\sin k_\gamma t_\gamma\,dt_\gamma(-1)^{|\varsigma|}\Bigg].$$

Используя определение, имеем для $\vec{s}\in E^m$, $\vec{k}\in N_*^m$, $\varsigma\subset\mu(r)$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}+\sum\limits_{p\in\varsigma}(-1)^{s_p}\vec{e}_p}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^{\sum\limits_{p\in\varsigma}s_p}}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\prod_{p\in\overline{m}\setminus\varsigma}\cos\left(k_p x_p-\frac{s_p\pi}{2}\right)dx_p\times$$

$$\times\prod_{i\in\varsigma}\sin\left(k_i x_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i,\quad \vec{k}\in N_\mu^m,$$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}+\sum\limits_{p\in\varsigma}(-1)^{s_p}\vec{e}_p}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=0,\quad \vec{k}\in N_*^m\setminus N_\mu^m.$$

Объединяя равенства (9), (10) получим

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=\sum_{\varsigma\subset\mu(r)}(-1)^{\sum\limits_{p\in\varsigma}s_p}a_{\vec{k}}^{\vec{s}+\sum\limits_{p\in\varsigma}(-1)^{s_p}\vec{e}_p}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)\times$$

$$\times\prod_{j\in\mu(r)\setminus\varsigma}T_{k_j,1}^{(n_j)}\prod_{\gamma\in\varsigma}T_{k_\gamma,2}^{(n_\gamma)},\quad \vec{k}\in N_\mu^m,$$

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=0,\quad \vec{k}\in N_*^m\setminus N_\mu^m.$$

Поскольку

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)=\sum_{\varsigma\subset\mu(r)}\prod_{i\in\mu(r)\setminus\varsigma}\Psi_{i1}(k_i)\prod_{j\in\varsigma}(-\Psi_{j2}(k_j))(-1)^{\sum\limits_{\nu\in\varsigma}s_\nu}a_{\vec{k}}^{\vec{s}+\sum\limits_{\nu\in\varsigma}(-1)^{s_\nu}\vec{e}_\nu}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right),$$

то для $\vec{k}\in N_\mu^m$, $\vec{s}\in E^m$ имеет место

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=\prod_{j\in\mu(r)}\left(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\right)\sum_{\varsigma\subset\mu(r)}\prod_{j\in\mu(r)\setminus\varsigma}\Psi_{j,1}(k_j)\prod_{\gamma\in\varsigma}\Psi_{\gamma,2}(k_\gamma)\times$$

$$\times(-1)^{\sum\limits_{p\in\varsigma}s_p}a_{\vec{k}}^{\vec{s}+\sum\limits_{p\in\varsigma}(-1)^{s_p}\vec{e}_p}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=\prod_{j\in\mu(r)}\left(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\right)a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f).$$

Значит

$$A_{\vec{k}}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu},\vec{x}\right)=\prod_{j\in\mu(r)}\left(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),\quad \vec{k}\in N_\mu^m.$$

Таким образом, с учетом (7) получаем

$$S\left[\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right]=\sum_{\vec{k}\in N_\mu^m}\frac{1}{2^{q(k)}}\prod_{j\in\mu(r)}\left(1-\lambda_{k_j}^{(n_j)}\right)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=S_\mu(f;\vec{x}). \tag{13}$$

На основании соотношений (7), (12), (13), получим

$$S\left[\delta_{\vec{n}}\right]=\sum_{i=1}^m S\left[\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}\right]+\sum_{i=2}^m(-1)^{i+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}S\left[\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right]=$$

$$=S\left[\sum_{i=1}^m\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(f,\vec{x})+\sum_{i=2}^m(-1)^{i+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(f,\vec{x})\right].$$

Отсюда для любой функции $f\in C^{m\overline{\psi}}$ выполняется равенство

$$\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda)=\sum_{i=1}^m\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(f;\vec{x})+\sum_{i=2}^m(-1)^{i+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(f;\vec{x}),$$

которое с учетом определения функций $\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})$, $i=1,2,\ldots,m$, и $\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, $\mu(r)\subset\overline{m}$ совпадает с равенством (5). Теорема доказана. □

Формула (5) может быть полезной для изучения асимптотического поведения верхних граней уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье, на классах дифференцируемых периодических функций многих переменных, позволяющих по отдельности учитывать свойства частных и смешанных $\overline{\psi}$-производных.

Цитированная литература

1. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – К. : Наук. думка, 1987.
2. *Степанец А.И.* Методы теории приближений В 2 ч. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002.

3. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 4. – С. 564–570.
4. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Ровенская О.Г. [и др.]* Приближение периодических функций высокой гладкости многих переменных прямоугольными суммами Фурье // Труды Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2008. – Т. 16.– С. 163–170.
5. *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций : Сб. научн. тр. – К. : Ин-т математики, 1985. – С. 16–28.
6. *Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 4. – С. 545–555.
7. *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 7. – С. 911–918.

References

1. Stepanets, A.I. (1953). *Classification and approximation of periodic functions.* Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
2. Stepanets, A.I. (2002). *Methods of theory of approximation.* Kyiv: Ins-t Mat. NAN Ukrainu (in Russian).
3. Rukasov, V.I., Novikov, O.A., Bodraya, V.I. (2005). Approximation of classes of ψ-integrals of periodic functions of many variables by rectangular linear means of Fourier series. *Ukr. Mat. J., 57*(4), 564-570 (in Russian).
4. Rukasov, V.I., Novikov, O.A., Rovenska, O.G. et al (2008). Approximation of periodic functions of high smoothness of many variables by rectangular Fourier sums. *Trudy IPMM NAN Ukrainy, 16*, 163-170 (in Russian).
5. Zaderey, P.V. (1985). Integral presentation of deviations of linear means of Fourier series on classes of differentiable periodic functions of two variables. In *Some questions of theory of approximation of functions (pp. 16-28).* Kyiv: Ins-t Mat., (in Russian).
6. Stepanets, A.I., Pachulia, N.L. (1991). Multiple Fourier sums on the sets of (ψ, β)-differentiable functions. *Ukr. Mat. J., 43*(4), 545-555 (in Russian).
7. Lasuria, R.A. (2003). Multiple Fourier sums on the sets of $\overline{\psi}$-differentiable functions. *Ukr. Mat. J., 55*(7), 911-918 (in Russian).

O.O. Novikov, O.G. Rovenska

Integral presentation of deviations of rectangular linear means of Fourier series on classes of periodic differentiable functions.

The paper deals with the problems of approximation in a uniform metric of periodic functions of many variables by trigonometric polynomials, which are generated by linear methods of summation of Fourier series. Questions of asymptotic behavior of the upper bounds of deviations of linear operators generated by the use of linear methods of summation of Fourier series on the classes of periodic differentiable functions are studied in many works. Methods of investigation of integral representations of deviations of polynomials on the classes of periodic differentiable functions of real variable originated and received its development through the works of S.M. Nikol'skii, S.B. Stechkin, N.P.Korneichuk, V.K. Dzadik, A.I. Stepanets, etc. Along with the study of approximation by linear methods of classes of functions of one variable, are studied similar problems of approximation by linear methods of classes of functions of many variables. In addition to the approximative properties of rectangular Fourier sums, are studied approximative properties of other approximation methods: the rectangular sums of

Valle Poussin, Zigmund, Rogozinsky, Favar. In this paper we consider the classes of $\overline{\psi}$–differentiable periodic functions of many variables, allowing separately to take into account the properties of partial and mixed $\overline{\psi}$–derivatives, and given by analogy with the classes of $\overline{\psi}$–differentiable periodic functions of one variable. Integral representations of rectangular linear means of Fourier series on classes of $\overline{\psi}$–differentiable periodic functions of many variables are obtained. The obtained formulas can be useful for further investigation of the approximative properties of various linear rectangular methods on the classes $\overline{\psi}$-differentiable periodic functions of many variables in order to obtain a solution to the corresponding Kolmogorov-Nikolsky problems.

Keywords: *generalized derivative, classes of differentiable functions, linear rectangular methods.*

О.О. Новіков, О.Г. Ровенська

Інтегральні представлення відхилень прямокутних лінійних середніх рядів Фур'є на класах періодичних диференційовних функцій.

Робота стосується питань наближення у рівномірній метриці періодичних функцій багатьох змінних тригонометричними поліномами, що породжуються прямокутними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є. Вивчаються класи $\overline{\psi}$–диференційовних періодичних функцій багатьох змінних, що дозволяють окремо враховувати властивості звичайних та мішаних частинних похідних, і які визначаються подібно до класів $\overline{\psi}$–диференційовних функцій однієї змінної. Одержано інтегральні представлення прямокутних лінійних середніх рядів Фур'є на класах $\overline{\psi}$–диференційовних періодичних функцій багатьох змінних. Одержані формули можуть бути корисними для подальших досліджень апроксимативних властивостей різних лінійних прямокутних методів на класах $\overline{\psi}$–диференційовних періодичних функцій багатьох змінних з метою одержання розв'язку відповідних задач Колмогорова–Нікольського.

Ключові слова: *узагальнена похідна, класи диференційовних функцій, лінійні прямокутні методи.*

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
Донбасская государственная машиностроительная академия, Краматорск
`rovenskaya.olga.math@gmail.com`

Получено 21.09.18

УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-11

©2018. **В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов**

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ПО ГЁЛЬДЕРУ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ НА ГРАНИЦЕ

В статье найдены условия на комплексную коэффициент уравнений Бельтрами с вырождением условия равномерной эллиптичности в единичном круге, при которых обобщенные гомеоморфные решения непрерывны по Гёльдеру на границе. Результаты имеют прикладное значение при исследовании различных краевых задач для уравнений Бельтрами.

MSC: Primary 30C62, 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35Q15; Secondary 30E25, 31C05, 34M50, 35F45.

Ключевые слова: *непрерывность по Гёльдеру, уравнения Бельтрами, вырождение равномерной эллиптичности.*

1. Введение.

В серии недавних работ, при изучении краевых задач Гильберта, Дирихле, Неймана, Пуанкаре и Римана с произвольными измеримыми граничными данными для уравнения Бельтрами и обобщений уравнений Лапласа в анизотропных и неоднородных средах, использовалась логарифмическая ёмкость, см., например, [2–7]. Как хорошо известно, логарифмическая ёмкость совпадает с так называемым трансфинитным диаметром множества. Из этой геометрической характеристики следует, что множества нулевой ёмкости и, как следствие, функции измеримые относительно логарифмической ёмкости инвариантны при отображениях непрерывных по Гёльдеру. Это обстоятельство является мотивировкой нашего исследования.

В дальнейшем, D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. Пусть $\mu(z)\colon D\to\mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)|<1$ п.в. (почти всюду) в D. *Уравнением Бельтрами* называется уравнение вида

$$f_{\bar z}=\mu(z)\,f_z, \tag{1}$$

где $f_{\bar z}=\overline{\partial}f=(f_x+if_y)/2$, $f_z=\partial f=(f_x-if_y)/2$, $z=x+iy$, f_x и f_y частные производные f по x и y, соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z)=\frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} \tag{2}$$

дилатационным отношением уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если $\operatorname{ess\,sup} K_\mu=\infty$.

Существование гомеоморфных решений класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ было недавно установлено для многих вырожденных уравнений Бельтрами при соответствующих условиях на дилатационное отношение K_μ, см., напр., монографии [1] и [11] с дальнейшими ссылками в них.

2. Определения и предварительные замечания.

Прежде всего, напомним некоторые определения. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{C} \longrightarrow [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{C}$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(z)\,|dz| \geqslant 1 \tag{3}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Соответственно, *модулем* семейства кривых Γ в $\mathbb{C}$ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^2(z)\ dm(z)\ , \tag{4}$$

где m обозначает меру Лебега в $\mathbb{C}$.

Далее $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В дальнейшем, в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ мы используем *сферическую (хордальную) метрику*

$$h(z,\zeta)\colon = |\pi(z) - \pi(\zeta)|\,, \tag{5}$$

где π — стереографическая проекция пространства $\overline{\mathbb{C}}$ на сферу $S^2(\frac{1}{2}e_3, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^3$, т.е.

$$h(z,\zeta) = \frac{|z-\zeta|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\zeta|^2}}, \quad z \neq \infty \neq \zeta, \tag{6}$$

$$h(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}. \tag{7}$$

Отметим, что $h(z,\zeta) \leqslant 1$, и $h(z,\zeta) \leqslant |z-\zeta|$. *Сферический (хордальный) диаметр* множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ есть величина

$$h(E) = \sup_{z,\zeta \in E} h(z,\zeta)\,. \tag{8}$$

В дальнейшем также используются следующие стандартные обозначения для кругов, окружностей и колец в комплексной плоскости:

$$\mathbb{D} \ := \ D(0,1)\ , \quad D(z_0,r) \ := \ \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}\ ,$$

$$S(z_0,r) \ := \ \{z \,\in\, \mathbb{C} : |z-z_0| = r\}, \quad A(z_0,r_1,r_2) \ := \ \{z \,\in\, \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}\ .$$

Пусть $Q: D \to [0,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Следуя работе [13], говорим, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{C}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $z_0 \in D$, если соотношение

$$M\ (\Delta(fS_1, fS_2, fD))\ \leqslant \int\limits_{A} Q(z)\cdot \eta^2(|z-z_0|)\ dm(z)\ , \tag{9}$$

где $S_i = S(z_0, r_i)$, $i = 1, 2$, выполнено для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \longrightarrow [0,\infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\ dr\ \geqslant\ 1\,. \tag{10}$$

Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{C}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в области* D, если условие (9) выполнено для всех точек $z_0 \in D$.

Следующее утверждение можно найти либо в работе [10], теорема 3.1, либо в монографии [9], теорема 5.3, смотри также [8], теорема 1.

Предложение 1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$, и $f: D \to D'$ — гомеоморфное решение класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ уравнения Бельтрами (1) с $K_\mu \in L^1_{\rm loc}(D)$. Тогда f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in D$ с $Q(z) = K_\mu(z)$.*

Из следствия 7.4 работы [12] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $\mu: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — измеримая в $\mathbb{D}$ функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. и $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$. Если для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ выполнено условие*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} ⨍_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\, dm(z) < \infty\,, \tag{11}$$

то f имеет гомеоморфное продолжение $f: \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$.

3. Некоторые вспомогательные предложения.

Предложение 3. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$, $Q: D \to [0,\infty]$ — измеримая функция, и пусть $f: D \to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $z_0 \in D$ и $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$. Если для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, \operatorname{dist}(z_0, \partial D))$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(z)\,\psi^2(|z-z_0|)\ dm(z)\ \leqslant C\cdot\ I(\varepsilon)\ , \qquad 0 < I(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty\ , \tag{12}$$

для некоторой измеримой функции $\psi(t): (0,\infty) \to [0,\infty]$, то

$$h(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\ \exp\left\{-\frac{2\pi}{C}\ I\,(|z-z_0|)\right\} \tag{13}$$

для всех $z \in D(z_0, \varepsilon_0)$. (См. следствие 4.1 в [10]).

Выбирая в предыдущем предложении $\psi(t) = \frac{1}{t}$, приходим к следующему результату.

Предложение 4. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{C}$, $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая функция, и пусть $f : D \to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $z_0 \in D$ и $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus f(D)) \geqslant \Delta > 0$. Если для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, \mathrm{dist}(z_0, \partial D))$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(z)}{|z - z_0|^2}\, dm(z) \leqslant C \ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) , \tag{14}$$

то для всех $z \in D(z_0, \varepsilon_0)$

$$h(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{32}{\Delta}\, \varepsilon_0^{-2\pi/C}\, |z - z_0|^{2\pi/C} . \tag{15}$$

Лемма 1. *Пусть $Q : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ — измеримая функция и для $\delta_0 \in (0, 1)$ и $C_* > 0$*

$$\sup_{r\in(0,\delta_0)} \fint_{D(z_0,r)} Q(z)\ dm(z)\ <\ C_* \qquad \forall\ z_0 \in \partial\mathbb{D} . \tag{16}$$

Тогда для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 = \min\{\frac{1}{2}, \delta_0^2\}$,

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(z)\, dm(z)}{|z - z_0|^2} \leqslant \frac{4\pi C_*}{\ln 2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \qquad \forall\ z_0 \in \partial\mathbb{D} . \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_k := 2^{-k+1}\varepsilon_0$, $A_k := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon_{k+1} \leqslant |z - z_0| < \varepsilon_k\}$, $D_k := D(z_0, \varepsilon_k)$ и N — натуральное число такое, что $\varepsilon \in [\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_N)$. Заметим, что

$$A(z_0, \varepsilon, \varepsilon_0) \subset A(z_0, \varepsilon_{N+1}, \varepsilon_0) = \bigcup_{k=1}^{N} A_k\ , \qquad \frac{1}{|z - z_0|^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_{k+1}^2} \qquad \forall\ z \in A_k\ .$$

Таким образом, имеем, что

$$\eta(\varepsilon) := \int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(z)}{|z - z_0|^2}\, dm(z) \leqslant \int\limits_{A(z_0,\varepsilon_{N+1},\varepsilon_0)} \frac{Q(z)}{|z - z_0|^2}\, dm(z) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} \frac{Q(z)}{|z - z_0|^2}\, dm(z) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{m(D_k)}{\varepsilon_{k+1}^2} \fint\limits_{D_k} Q(z)\, dm(z) \leqslant 4\pi \sum_{k=1}^{N} \fint_{D_k} Q(z)\, dm(z) \leqslant 4\pi N C_*\ . \tag{18}$$

Поскольку $\varepsilon_0 \in (0, 2^{-1})$ и $\varepsilon < \varepsilon_N$ по выбору N, то

$$N\ <\ N\ +\ \log_2\ \left(\frac{1}{2\varepsilon_0}\right)\ =\ \log_2\ \frac{1}{\varepsilon_N}\ <\ \log_2\ \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\, . \tag{19}$$

Комбинируя оценки (18) и (19), получаем (17). $\Box$

4. Основная лемма.

Лемма 2. *Пусть* $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *— измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п.в. в* $\mathbb{D}$, *и* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *— гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса Соболева* $W^{1,1}_{\text{loc}}$, *такое что* $f(0) = 0$ *и* $f(1) = 1$. *Если* $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ *и, для некоторых* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и* $C \in [1,\infty)$,

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \fint_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\; dm(z) \;<\; C \qquad \forall\, \zeta \in \partial\mathbb{D}\,, \tag{20}$$

то f *имеет гомеоморфное продолжение на* $\partial\mathbb{D}$ *и*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant 64\,\varepsilon_0^{-\alpha}|z_2 - z_1|^\alpha \qquad \forall\; z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D}\,, |z_2 - z_1| < \delta_0 := \min\left\{\frac{1}{2}, \varepsilon_0^2\right\} \tag{21}$$

где $\alpha = \frac{\log 2}{68C}$.

Доказательство. В силу предложения 1, отображение f допускает гомеоморфное продолжение $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$. Продолжим f по симметрии во внешность круга $\mathbb{D}$. Тогда

$$F(z) = \left\{ \begin{array}{rl} f(z), & |z| < 1\,, \\ 1/\overline{f\,(1/\overline{z})}, & |z| > 1\,. \end{array} \right. \tag{22}$$

Элементарные вычисления также показывают, что комплексная характеристика отображения F имеет вид:

$$\mu_F(z) = \left\{ \begin{array}{rl} \mu(z), & |z| < 1\,, \\ \frac{z^2}{\overline{z}^2}\overline{\mu\,(1/\overline{z})}, & |z| > 1\,. \end{array} \right. \tag{23}$$

Покажем, что $F \in W^{1,1}(\mathbb{D})$. Для этого заметим, что

$$|F_{\overline{z}}| \leqslant |F_z| \leqslant |F_z| + |F_{\overline{z}}| \;\leqslant K^{\frac{1}{2}}_{\mu_F}(z)\; J^{\frac{1}{2}}_F(z)\,. \tag{24}$$

Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\; dm(z) \;\leqslant\; \int\limits_{\mathbb{D}} K^{\frac{1}{2}}_{\mu_F}(z)\; J^{\frac{1}{2}}_F(z)\, dm(z)\,. \tag{25}$$

Далее, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\; dm(z) \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{D}} K_\mu(z)\, dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{D}} J_F(z)\, dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

В силу гомеоморфности отображения F, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{D}} J_F(z)\, dm(z) \leqslant m(F(\mathbb{D})) = \pi\,. \tag{27}$$

Учитывая условие $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$, из оценок (26) и (27) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\, dm(z) \leqslant \left(\pi \int\limits_{\mathbb{D}} K_\mu(z)\, dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,. \tag{28}$$

Покажем, теперь, что $F \in W^{1,1}(D_R)$ для любого $R > 1$, где $D_R := D(0,R)$. Действительно, по аддитивности интеграла Лебега, имеем равенство

$$\int\limits_{|z|\leqslant R} |F_z|\, dm(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\, dm(z) + \int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} |F_z|\, dm(z)\,. \tag{29}$$

В силу (28), $\int\limits_{\mathbb{D}} |F_z|\, dm(z) < \infty$. Осталось показать, что $\int\limits_{1<|z|\leqslant R} |F_z|\, dm(z) < \infty$.

Заметим, что в силу гомеоморфности отображения F

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} J_F(z)\, dm(z) \leqslant \int\limits_{D_R} J_F(z)\, dm(z) \leqslant m(F(D_R)) < \infty\,. \tag{30}$$

Далее, покажем, что $\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) < \infty$. Сделав замену переменных $w = \frac{1}{\overline{z}}$, преобразуем этот интеграл к виду:

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) = \int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_\mu\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) dm(z) = \int\limits_{1/R\leqslant|z|\leqslant 1} K_\mu(w)\, \frac{dm(w)}{|w|^4}\,. \tag{31}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) = \int\limits_{1/R\leqslant|z|\leqslant 1} K_\mu(w)\, \frac{dm(w)}{|w|^4} \leqslant R^4 \int\limits_{\mathbb{D}} K_\mu(w) dm(w) < \infty\,. \tag{32}$$

Применяя неравенство Гёльдера и оценки (30), (32), получаем

$$\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} |F_z|\, dm(z) \leqslant \int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K^{\frac{1}{2}}_{\mu_F}(z)\; J^{\frac{1}{2}}_F(z)\, dm(z) \leqslant \tag{33}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} K_{\mu_F}(z)\; dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{1\leqslant|z|\leqslant R} J_F(z)\, dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,. \tag{34}$$

Таким, образом мы показали, что $F \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{C})$.

Теперь, давайте оценим интеграл $\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)} K_F(z)\, dm(z)$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Для этого последний интеграл разобьем на две части:

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) = \int\limits_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) + \int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu_F}(z)\, dm(z)\,. \qquad (35)$$

Сделав замену переменных $w = \frac{1}{\bar{z}}$, преобразуем второй интеграл к виду:

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) = \int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) dm(z) = \int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} K_{\mu}\,(w)\ \frac{dm(w)}{|w|^4}\,. \qquad (36)$$

Далее, легко проверить, что выполняется следующее неравенство:

$$\max_{w\in D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} \frac{1}{|w|^4} < 16$$

для всех $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Действительно,

$$\max_{|w-\zeta|=\varepsilon} \frac{1}{|w|^2} = \max_{\varphi\in[0,2\pi)} \frac{1}{|\zeta+\varepsilon e^{i\varphi}|^2} = \max_{\varphi\in[0,2\pi)} \frac{1}{|\zeta|^2 + 2\varepsilon Re(\zeta e^{-i\varphi}) + \varepsilon^2} =$$

$$= \max_{\varphi\in[0,2\pi)} \frac{1}{1+2\varepsilon\cos(\varphi-\alpha)+\varepsilon^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} < 4\,,$$

где $w = \zeta + \varepsilon e^{i\varphi}, \zeta = e^{i\vartheta}$.

Таким образом, получаем

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\setminus\mathbb{D}} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) \leqslant \max_{w\in D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} \frac{1}{|w|^4} \int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} K_{\mu}\,(w)\ dm(w) < 16 \int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} K_{\mu}\,(w)\ dm(w).$$

Учитывая последнюю оценку и равенство (35), имеем, что

$$\int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) < 17 \int\limits_{D(\zeta,\varepsilon)\cap\mathbb{D}} K_{\mu}\,(w)\ dm(w)\,.$$

Поэтому, в силу условия (20), видим, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \fint_{D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu_F}(z)\, dm(z) < 17 \sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \frac{m\left(\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)\right)}{\pi\varepsilon^2} \fint_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_{\mu}(z) dm(z) < 17C\,.$$

Далее, применяя лемму 1 при $C' = 17C$, получаем оценку

$$\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{K_{F_\mu}(z)\, dm(z)}{|z-z_0|^2} \leqslant \frac{68\pi C}{\log 2} \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

для всех $z_0 \in \partial\mathbb{D}$.

Кроме того, учитывая оценку

$$\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)} = 1 + \frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)} < 2$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, приходим к оценке

$$\frac{\int\limits_{A(z_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{K_F(z)\, dm(z)}{|z-z_0|^2}}{\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)} \leqslant \frac{68\pi C}{\log 2}\,\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)} \leqslant \frac{136\pi C}{\log 2}\,.$$

Наконец, при $\varepsilon := |z_2 - z_1|$ из предложения 4 следует оценка

$$h(f(z_1), f(z_2)) \leqslant 32\,\varepsilon_0^{-\alpha}\,|z_1 - z_2|^{\alpha}\ , \qquad \text{где } \alpha = \tfrac{\log 2}{68C}\ , \tag{37}$$

и, поскольку z_1 и $z_2 \in \partial\mathbb{D}$, имеем, что

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant 64\,\varepsilon_0^{-\alpha}\,|z_1 - z_2|^{\alpha}\ . \tag{38}$$

5. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — измеримая функция и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Если $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ и, для некоторых $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и $C \in [1,\infty)$,*

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \fint_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\ dm(z)\ <\ C \qquad \forall\, \zeta \in \partial\mathbb{D}\ , \tag{39}$$

то f имеет гомеоморфное продолжение на $\partial\mathbb{D}$, которое непрерывно там по Гёльдеру.

Доказательство. Действительно, применяя в образе дробно-линейное отображение γ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, $\gamma(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, переводящее $f(0)$ в 0 и $f(1)$ в 1, можем считать, что $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Далее, при $|z_1 - z_2| \geqslant \delta_0$, имеем тривиальную оценку

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant 2 = \frac{2}{\delta_0^{\alpha}}\,\delta_0^{\alpha} \leqslant \frac{2}{\delta_0^{\alpha}}\,|z_1 - z_2|^{\alpha} \tag{40}$$

и, выбирая $L := \max\{\frac{2}{\delta_0^{\alpha}}, 64\,\varepsilon_0^{-\alpha}\}$, получаем по лемме 2, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant L\,|z_1 - z_2|^{\alpha}$$

для всех z_1 и $z_2 \in \partial\mathbb{D}$.

Цитированная литература

1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation. A Geometric Approach. – Developments in Mathematics, **26**. – New York: Springer, 2012.
2. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A.* On the boundary value problems for quasiconformal functions in the plane // Ukr. Mat. Visn. – 2015. – **12**, no. 3. – P. 363–389; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) – 2016. – **214**, no. 2. – P. 200–219.
3. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A.* On a new approach to the study of plane boundary-value problems // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. – 2017. – No. 4. – P. 12–18.
4. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E., Yefimushkin A.* On Hilbert problem for Beltrami equation in quasihyperbolic domains // ArXiv.org: 1807.09578v3 [math.CV] 1 Nov 2018, 28 pp.
5. *Yefimushkin A.* On Neumann and Poincare Problems in A-harmonic Analysis // Advances in Analysis. – 2016. – **1**, no. 2. – P. 114–120.
6. *Efimushkin A., Ryazanov V.* On the Riemann-Hilbert problem for the Beltrami equations in quasidisks // Ukr. Mat. Visn. – 2015. – **12**, no. 2. – P. 190–209; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) – 2015. – **211**, no. 5. – P. 646–659.
7. *Yefimushkin A., Ryazanov V.* On the Riemann–Hilbert Problem for the Beltrami Equations // Contemp. Math. - 2016. - **667**. - P. 299-316.
8. Kovtonyuk D.A., Petkov I.V., Ryazanov V.I. The Beltrami equations and lower $Q-$homeomorphisms // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – **21**. – С. 114–117.
9. *Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* (под общей редакцией Рязанова В.И.) К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева. – Киев: Наук. думка, 2013.
10. Lomako T., Salimov R., Sevostyanov E. On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2010. – **1(LIX)**, № 2. – P. 263–274.
11. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009.
12. *Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E.* On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemp. Math. – 2013. – **591**. – P. 211–242.
13. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117–150.

References

1. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2012). *The Beltrami Equation. A Geometric Approach.* Developments in Mathematics, 26. New York, Springer.
2. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2015). On the boundary value problems for quasiconformal functions in the plane. *Ukr. Mat. Visn., 12*(3), 363-389; transl. in (2016) *J. Math. Sci. (N.Y.), 214*(2), 200-219.
3. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2017). On a new approach to the study of plane boundary-value problems. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, 4*, 12-18.
4. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yakubov, E., Yefimushkin, A. (2018). O*n Hilbert problem for Beltrami equation in quasihyperbolic domains.* Retrieved July 24, 2018, from https://arxiv.org/abs/1807.09578v7.
5. Yefimushkin, A. (2016). On Neumann and Poincare Problems in A-harmonic Analysis. *Advances in Analysis, 1*(2), 114-120.
6. Efimushkin, A., Ryazanov, V. (2015). On the Riemann-Hilbert problem for the Beltrami equations in quasidisks. *Ukr. Mat. Visn., 12*(2), 190-209; transl. in (2015) *J. Math. Sci. (N.Y.), 211*(5), 646-659.
7. Yefimushkin, A., Ryazanov, V. (2016). On the Riemann-Hilbert Problem for the Beltrami Equations. *Contemp. Math., 667*, 299-316.
8. Kovtonyuk, D.A., Petkov, I.V., Ryazanov, V.I. (2010). The Beltrami equations and lower Q-homeomorphisms. *Proc. IAMM NASU, 21*, 114-117.

9. Kovtonyuk, D.A., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2013). *Toward the Mapping Theory of the Classes of Sobolev and Orlicz-Sobolev*, (ed. Ryazanov, V.I.). Kiev: Naukova dumka (in Russian).
10. Lomako, T., Salimov, R., Sevostyanov, E. (2010). On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math., 1(LIX)*(2), 263-274.
11. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* Springer Monographs in Mathematics. New York, Springer.
12. Ryazanov, V., Salimov, R., Srebro, U., Yakubov, E. (2013). On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations. *Contemp. Math., 591*, 211-242.
13. Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On ring solutions of Beltrami equations. *J. Anal. Math., 96*, 117-150.

V.I. Ryazanov, R.R. Salimov

On Hölder continuity of solutions of the Beltrami equations on the boundary.

In the present paper, it is found conditions on the complex coefficient of the Beltrami equations with the degeneration of the uniform ellipticity in the unit disk under which their generalized homeomorphic solutions are continuous by Hölder on the boundary. These results can be applied to the investigations of various boundary value problems for the Beltrami equations. In a series of recent papers, under the study of the boundary value problems of Dirichlet, Hilbert, Neumann, Poincare and Riemann with arbitrary measurable boundary data for the Beltrami equations as well as for the generalizations of the Laplace equation in anisotropic and inhomogeneous media, it was applied the logarithmic capacity, see e.g. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A. On the boundary value problems for quasiconformal functions in the plane // Ukr. Mat. Visn. – 2015. – **12**, no. 3. – P. 363–389; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) – 2016. – **214**, no. 2. – P. 200–219; Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A. On a new approach to the study of plane boundary-value problems // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. – 2017. – No. 4. – P. 12–18; Yefimushkin A. On Neumann and Poincare Problems in A-harmonic Analysis // Advances in Analysis. – 2016. – **1**, no. 2. – P. 114–120; Efimushkin A., Ryazanov V. On the Riemann-Hilbert problem for the Beltrami equations in quasidisks // Ukr. Mat. Visn. – 2015. – **12**, no. 2. – P. 190–209; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) – 2015. – **211**, no. 5. – P. 646–659; Yefimushkin A., Ryazanov V. On the Riemann–Hilbert Problem for the Beltrami Equations // Contemp. Math. - 2016. - **667**. - P. 299-316; Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E., Yefimushkin A. On Hilbert problem for Beltrami equation in quasihyperbolic domains // ArXiv.org: 1807.09578v3 [math.CV] 1 Nov 2018, 28 pp. As well known, the logarithmic capacity of a set coincides with the so–called transfinite diameter of the set. This geometric characteristic implies that sets of logarithmic capacity zero and, as a consequence, measurable functions with respect to logarithmic capacity are invariant under mappings that are continuous by Hölder. That circumstance is a motivation of our research. Let D be a domain in the complex plane $\mathbb{C}$ and let $\mu : D \to \mathbb{C}$ be a measurable function with $|\mu(z)| < 1$ a.e. The equation of the form $f_{\bar z} = \mu(z) f_z$ where $f_{\bar z} = \bar\partial f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x and f_y are partial derivatives of the function f in x and y, respectively, is said to be a *Beltrami equation*. The function μ is called its *complex coefficient*, and $K_\mu(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ is called its *dilatation quotient*. The Beltrami equation is said to be *degenerate* if $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$. The existence of homeomorphic solutions in the Sobolev class $W^{1,1}_{\rm loc}$ has been recently established for many degenerate Beltrami equations under the corresponding conditions on the dilatation quotient K_μ, see e.g. the monograph Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation. A geometric approach. Developments in Mathematics, 26. Springer, New York, 2012 and the further references therein. The main theorem of the paper, Theorem 1, states that a homeomorphic solution $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ in the Sobolev class $W^{1,1}_{\rm loc}$ of the Beltrami equation in the unit disk $\mathbb{D}$ has a homeomorphic extension to the boundary that is Hölder continuous if $K_\mu \in L^1(\mathbb{D})$ and, for some $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ and $C \in [1, \infty)$,

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \fint_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\varepsilon)} K_\mu(z)\ dm(z) \ < \ C \qquad \forall\ \zeta \in \partial\mathbb{D}$$

where $D(\zeta, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < \varepsilon\}$.

Keywords: *continuity by Hölder, Beltrami equations, degeneration of uniform ellipticity.*

В.І. Рязанов, Р.Р. Салімов

Щодо неперервності по Гьольдеру рішень рівнянь Бельтрамі на межі.

У статті знайдені умови на комплексну коефіцієнт рівнянь Бельтрами з виродженням умови рівномірної еліптичності в одиничному колі, при яких узагальнені гомеоморфні рішення неперервні по Гьольдеру на межі. Результати мають прикладне значення при дослідженні різних крайових задач для рівнянь Бельтрамі.

Ключові слова: *неперервність по Гьольдеру, рівняння Бельтрамі, виродження рівномірної еліптичності.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск;
Институт математики НАН Украины, Киев
vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

Получено 19.11.2018

УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-12

©2018. **Е.А. Севостьянов, С.А. Скворцов**

О ЛОКАЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрен некоторый класс гомеоморфизмов областей евклидового пространства, более общих, чем пространственные квазиконформные отображения. Для указанных гомеоморфизмов получены теоремы о локальном поведении соответствующих им обратных отображений в заданной области. В частности, доказано, что семейства отображений, обратные к которым удовлетворяют неравенству типа Полецкого, равностепенно непрерывны в заданной области, если мажоранта, относящаяся к этому неравенству, интегрируема.

MSC: 30C65.

Ключевые слова: *квазиконформные отображения, модули семейств кривых.*

1. Введение.

Настоящая статья посвящена изучению отображений, обратные к которым удовлетворяют неравенству типа Полецкого, см. соотношение (8.5) в [1], см. также [2–6]. Изучение таких отображений в случае, когда функция Q_1 в (8.5) ограничена, бессодержательно: если f удовлетворяет (8.5) при $Q_1(x)\leqslant K\equiv const$, то тогда f – квазиконформно; в то же время, f^{-1} также квазиконформно по следствию 13.3 в [2]. Значит, мы не выходим за пределы изучаемого класса при переходе к обратному отображению и их отдельное исследование смысла не имеет. Ситуация существенно изменится, если мы рассмотрим некоторый более общий класс гомеоморфизмов. В качестве примера, рассмотрим последовательность $f_m:\mathbb{B}^n\rightarrow B(0,2)$, определённую следующим образом:

$$f_m(x)\,=\,\begin{cases}\frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|}\cdot x\,, & 1/m\leqslant|x|\leqslant 1,\\ \frac{1+(1/m)^{\alpha}}{(1/m)}\cdot x\,, & 0<|x|<1/m\ ,\end{cases}$$

В этом случае, можно положить $Q_1(x)=\left(\frac{1+|x|^{\,\alpha}}{\alpha|x|^{\,\alpha}}\right)^{n-1}\in L^1(\mathbb{B}^n)$ (см. рассуждения из предложения 6.3 в [1]). Нетрудно убедиться, что

$$g_m(y):=f_m^{-1}(y)\,=\,\begin{cases}\frac{y}{|y|}(|y|-1)^{1/\alpha}\,, & 1+1/m^{\alpha}\leqslant|y|<2,\\ \frac{(1/m)}{1+(1/m)^{\alpha}}\cdot y\,, & 0<|y|<1+1/m^{\alpha}\ .\end{cases}$$

Можно показать, что Q_1, соответствующая отображениям g_m, имеет вид

$$Q_1(y)=\begin{cases}\frac{|y|}{\alpha(|y|-1)}\,, & 1+1/m^{\alpha}\leqslant|y|<2,\\ 1\,, & 0<|y|<1+1/m^{\alpha}\,.\end{cases}\qquad(1)$$

Нетрудно также проверить, что функция Q_1 в (1) не интегрируема в $B(0,2)$, и что какой-либо другой интегрируемой функции Q_1, которая также подходила бы к отображениям g_m в смысле соотношения (8.5) из [1], не существует.

Исследования, проведённые ниже, касаются локального поведения отображений, обратные к которым удовлетворяют условию (8.5) из [1], где Q_1 – интегрируемая функция. Основные определения и обозначения, используемые ниже, могут быть найдены в монографиях [1] и [2], и потому опускаются. Пусть M обозначает модуль семейств кривых (см. [2]), а $dm(x)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. Допустим, что в области $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, задано отображение $f:D\rightarrow\mathbb{R}^n$, и оно удовлетворяет неравенству вида

$$M(f(\Gamma))\leqslant\int\limits_D Q(x)\cdot\rho^n(x)\,dm(x)\quad\forall\,\rho\in\mathrm{adm}\,\Gamma \tag{2}$$

где $Q:D\rightarrow[1,\infty]$ – некоторая (заданная) фиксированная функция (см., напр., [3]). Напомним, что $\rho\in\mathrm{adm}\,\Gamma$ в том и только том случае, если

$$\int\limits_{\gamma}\rho(x)|dx|\geqslant 1\quad\forall\,\gamma\in\Gamma\,.$$

В частности, все конформные и квазиконформные отображения удовлетворяют неравенству (2), где функция Q будет равна 1 или некоторой постоянной, соответственно (см., напр., теоремы 4.6 и 6.10 в [4]).

Пусть E, $F\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ – произвольные множества. В дальнейшем всюду символом $\Gamma(E,F,D)$ мы обозначаем семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E$, $\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,\,b)$. Напомним, что область $D\subset\mathbb{R}^n$ называется *локально связной в точке* $x_0\in\partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V\subset U$ точки x_0 такая, что $V\cap D$ связно. Область D локально связна на ∂D, если D локально связна в каждой точке $x_0\in\partial D$. Граница области D называется *слабо плоской* в точке $x_0\in\partial D$, если для каждого $P>0$ и для любой окрестности U точки x_0 найдётся окрестность $V\subset U$ этой же точки такая, что $M(\Gamma(E,F,D))>P$ для произвольных континуумов $E,F\subset D$, пересекающих ∂U и ∂V. Граница области D называется слабо плоской, если соответствующее свойство выполнено в каждой точке границы D.

Для областей $D,D'\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и произвольной измеримой по Лебегу функции $Q:\mathbb{R}^n\rightarrow[1,\infty]$, $Q(x)\equiv 0$ при $x\notin D$, обозначим через $\mathfrak{R}_Q(D,D')$ семейство всех отображений $g:D'\rightarrow D$ таких, что $f=g^{-1}$ – гомеоморфизм области D на D' с условием (2). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что* $\overline{D}$ *и* $\overline{D'}$ *– компакты в* $\mathbb{R}^n$. *Если* $Q\in L^1(D)$, *то семейство* $\mathfrak{R}_Q(D,D')$ *равностепенно непрерывно в* D'.

2. Вспомогательные сведения.

Как обычно, для кривой $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ полагаем:

$$|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, t \in [a,b] : \gamma(t) = x\}\,,$$

при этом, $|\gamma|$ называется *носителем (образом)* γ.

Следующая лемма содержит в себе утверждение о том, что всякие внутренние точки произвольной области являются слабо плоскими.

Лемма 1. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $x_0 \in D$. Тогда для каждого $P > 0$ и для любой окрестности U точки x_0 найдётся окрестность $V \subset U$ этой же точки такая, что $M(\Gamma(E,F,D)) > P$ для произвольных континуумов $E, F \subset D$, пересекающих ∂U и ∂V.*

Доказательство. Пусть U – произвольная окрестность точки x_0. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $\overline{B(x_0,\varepsilon_0)} \subset D \cap U$. Пусть c_n – положительная постоянная, определённая в соотношении (10.11) в [2], а число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ настолько мало, что $c_n \cdot \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > P$. Положим $V := B(x_0, \varepsilon)$. Пусть E, F – произвольные континуумы, пересекающие ∂U и ∂V, тогда также E и F пересекают $S(x_0,\varepsilon_0)$ и ∂V (см. теорему 1.I.5.46 в [7]). Необходимое заключение вытекает на основании разд. 10.12 в [2], поскольку $M(\Gamma(E,F,D)) \geqslant c_n \cdot \log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} > P$. $\Box$

3. Доказательство теоремы 1.

Проведём доказательство теоремы 1 от противного. Предположим, что семейство $\mathfrak{R}_Q(D,D')$ не является равностепенно непрерывным в некоторой точке $y_0 \in D'$, другими словами, найдутся $y_0 \in D'$ и $\varepsilon_0 > 0$, такие что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует элемент $y_m \in D'$, $|y_m - y_0| < 1/m$, и гомеоморфизм $g_m \in \mathfrak{R}_Q(D,D')$, для которых

$$|g_m(y_m) - g_m(y_0)| \geqslant \varepsilon_0\,. \tag{3}$$

Проведём через точки $g_m(y_m)$ и $g_m(y_0)$ прямую $r = r_m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $-\infty < t < \infty$ (см. рисунок 1). Заметим, что указанная прямая $r = r_m(t)$ при $t \geqslant 1$ обязана пересекать область D ввиду теоремы 1.I.5.46 в [7], поскольку область D ограничена; таким образом, существует $t_1^m \geqslant 1$ такое, что $r_m(t_1^m) = x_1^m \in \partial D$. Не ограничивая общности, можно считать, что $r_m(t) \in D$ при всех $t \in [1, t_1^m)$, тогда отрезок $\gamma_1^m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $t \in [1, t_1^m]$, принадлежит D при всех $t \in [1, t_1^m)$, $\gamma_1^m(t_1^m) = x_1^m \in \partial D$ и $\gamma_1^m(1) = g_m(y_m)$. Ввиду аналогичных соображений, найдутся $t_2^m < 0$ и отрезок $\gamma_2^m(t) = g_m(y_0) + (g_m(y_m) - g_m(y_0))t$, $t \in [t_2^m, 0]$, такие, что $\gamma_2^m(t_2^m) = x_2^m \in \partial D$, $\gamma_2^m(0) = g_m(y_0)$ и $\gamma_2^m(t)$ принадлежит D при всех $t \in (t_2^m, 0]$. Положим $f_m := g_m^{-1}$. Так как f_m – гомеоморфизм, то при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ предельные множества $C(f_m, x_1^m)$ и $C(f_m, x_2^m)$ отображений f_m в соответствующих граничных точках $x_1^m, x_2^m \in \partial D$ лежат на $\partial D'$ (см. предложение 13.5 в [1]). Следовательно, найдётся точка $z_1^m \in D \cap |\gamma_1^m|$ такая, что $\operatorname{dist}(f_m(z_1^m), \partial D') < 1/m$. Так как $\overline{D'}$ – компакт, то можно считать, что последовательность $f_m(z_1^m) \to p_1 \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Аналогично, найдётся

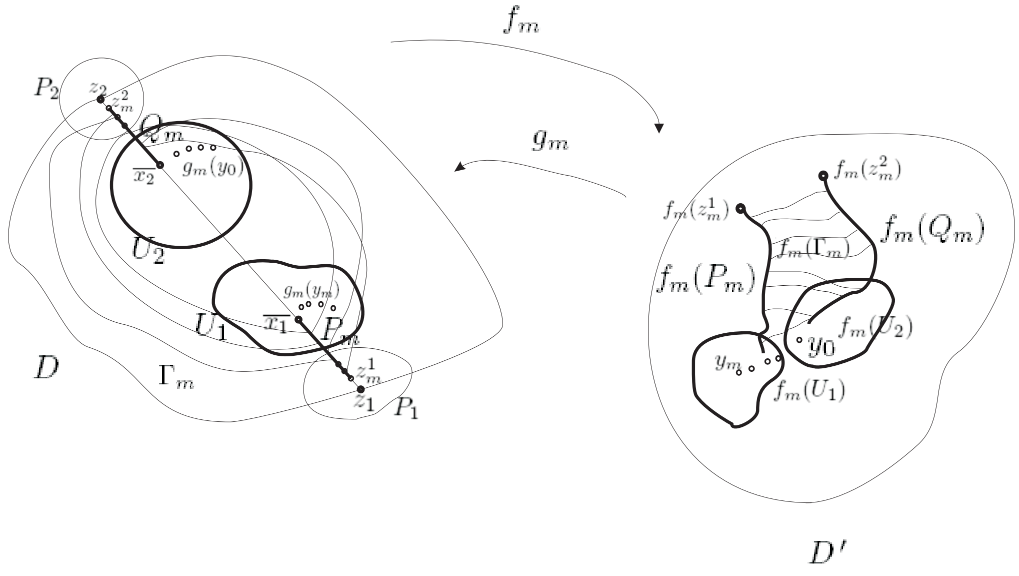

Рис. 1. К доказательству теоремы 1

последовательность $z_2^m \in D\cap|\gamma_2^m|$ такая, что $\operatorname{dist}(f_m(z_2^m),\partial D')<1/m$ и $f_m(z_2^m)\to p_2\in\partial D'$ при $m\to\infty$.

Пусть P_m – часть отрезка γ_1^m, заключённая между точек $g_m(y_m)$ и z_1^m, а Q_m – часть отрезка γ_2^m, заключённая между точек $g_m(y_0)$ и z_2^m. По построению и ввиду (3), $\operatorname{dist}(P_m,Q_m)\geqslant\varepsilon_0>0$. Пусть $\Gamma_m=\Gamma(P_m,Q_m,D)$, тогда функция

$$\rho(x)=\left\{\begin{array}{cc}\frac{1}{\varepsilon_0}, & x\in D,\\ 0, & x\notin D\end{array}\right.$$

является допустимой для семейства Γ_m, поскольку для произвольной (локально спрямляемой) кривой $\gamma\in\Gamma_m$ выполнено $\int\limits_{\gamma}\rho(x)|dx|\geqslant\frac{l(\gamma)}{\varepsilon_0}\geqslant 1$ (где $l(\gamma)$ обозначает длину кривой γ). Поскольку по условию отображения f_m удовлетворяют (2), получаем:

$$M(f_m(\Gamma_m))\leqslant\frac{1}{\varepsilon_0^n}\int\limits_D Q(x)\,dm(x):=c<\infty\,, \tag{4}$$

т.к. $Q\in L^1(D)$. С другой стороны, $\operatorname{diam} f_m(P_m)\geqslant|y_m-f_m(z_1^m)|\geqslant(1/2)\cdot|y_0-p_1|>0$ и $\operatorname{diam} f_m(Q_m)\geqslant|y_0-f_m(z_2^m)|\geqslant(1/2)\cdot|y_0-p_2|>0$ при больших $m\in\mathbb{N}$, кроме того,

$$\operatorname{dist}(f_m(P_m),f_m(Q_m))\leqslant|y_m-y_0|\to 0,\quad m\to\infty\,.$$

Тогда ввиду леммы 1 $M(f_m(\Gamma_m))=M(f_m(P_m),f_m(Q_m),D')\overset{m\to\infty}{\to}\infty$, что противоречит соотношению (4). Полученное противоречие указывает на ошибочность предположения в (3), что и завершает доказательство теоремы. $\Box$

Цитированная литература

1. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
2. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. 229. Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2005. – Vol. **30**, no. 1. – P. 49–69.
4. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. – 2004. – Vol. **93**. – P. 215–236.
5. Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестник. – 2007. – Т. **4**, № 2. – С. 199–234.
6. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. О равностепенной непрерывности одного семейства обратных отображений в терминах простых концов // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. **70**, № 9. – С. 1264–1273.
7. *Куратовский К.* Топология, т. 2. – М.: Мир, 1969.

References

1. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics. New York, Springer.
2. Väisälä J (1971). *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.* Lecture Notes in Math, 229. Berlin etc.: Springer-Verlag.
3. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On Q-homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 30*(1), 49-69.
4. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Mappings with finite length distortion. *J. d'Anal. Math., 93*, 215-236.
5. Ryazanov, V., Salimov, R. (2007). Weakly flat spaces and bondaries in the mapping theory. *Ukrain. Math. Bull., 4*(2), 199-233.
6. Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2018). On equicontinuity of one class of inverse mappings in terms of prime ends. *Ukr. Math. Zh., 70*(9), 1264-1273 (in Russian).
7. Kuratowski K. (1968). *Topology, v. 2.* New York-London: Academic Press.

E.A. Sevost'yanov, S.A. Skvortsov

On local behavior of one class of inverse mappings.

As is known, the local behavior of maps is one of the most important problems of analysis. This, in particular, relates to the study of mappings with bounded and finite distortion, which have been actively studied recently. As for this work, here we solve the problem of the behavior of maps, the inverse of which satisfies the Poletsky inequality. The main result is the statement about the equicontinuity of the indicated mappings inside the domain in the case when the majorant corresponding to the distortion of the module under the mapping is integrable in the original domain. It should be emphasized that the proof of this result is largely geometric, at the same time, it uses only the conditions of boundedness of the direct and mapped domains and does not involve any requirements on their boundaries. The study of families of mappings inverse to a given class may turn out to be trivial if we are talking about quasiconformal mappings. In the latter case, we do not go beyond the limits of the class under study in the transition to inverse maps. Nevertheless, when studying mappings with unbounded characteristic, this question is quite substantial, as simple examples of the corresponding classes show. The idea of the proof of the main result is based on the fact that the inner points of an arbitrary domain are weakly flat. The last statement can be called the Väisälä lemma, which was established in his monograph and related to families of curves joining two continua between the plates of a spherical condenser. The proof is also based on the fact that the module of families of curves joining two converging continua in a good domain must tend to infinity. In this case, the neighborhood of some inner point of the mapped domain serves as "good" region, in which we check the equicontinuity of the inverse family of maps. The results of this article are applicable to many other classes of mappings such as mappings with a finite distortion in the sense of Iwaniec, Sobolev classes on the plane and in space, and so on.

Keywords: *quasiconformal mappings, moduli of families of curves.*

Є.О. Севостьянов, С.О. Скворцов

Про локальну поведінку одного класу обернених відображень.

Розглянуто деякий клас гомеоморфізмів областей евклідового простору, більш загальних, ніж просторові квазіконформні відображення. Для вказаних гомеоморфізмів отримано теореми про локальну поведінку відповідних до них обернених відображень у заданій області. Зокрема, доведено, що сім'ї відображень, обернені до яких задовольняють нерівність Полецького, одностайно неперервні в заданій області, якщо мажоранта, що відноситься до цієї нерівності, інтегровна.

Ключові слова: *квазіконформні відображення, модулі сімей кривих.*

Житомирский государственный университет имени Ивана Франко, Житомир
`esevostyanov2009@gmail.com, serezha.skv@yandex.ru`

Получено 13.10.18

УДК 004.655
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-13

©2018. **А.С. Сенченко**

ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ, ОБЪЕДИНЕНИЕМ И ДРУГИМИ СИГНАТУРНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ В ТАБЛИЧНЫХ АЛГЕБРАХ

В настоящее время реляционные базы данных, математическая модель которых была предложена Э. Коддом, остаются наиболее распространенными. Табличные алгебры построены на основе реляционных алгебр Э. Кодда, существенно их развивают и составляют теоретический фундамент языков запросов современных табличных баз данных. В реляционных и табличных алгебрах актуальной является задача эквивалентного преобразования выражений с целью их минимизации или приведения к стандартному виду; она является одним из этапов оптимизации запросов, ее решение может значительно уменьшить время обработки информации в реляционных системах управления базами данных. Для решения этой задачи используются взаимосвязи между табличными операциями. На сегодня установлено значительное количество таких взаимосвязей, большинство из которых для общего случая выполняются в виде включений. Автором были найдены критерии перехода некоторых таких включений в равенства. В настоящей работе рассмотрены взаимосвязи пересечения и объединения таблиц с другими сигнатурными операциями табличных алгебр: разностью, селекцией, проекцией, насыщением, активным дополнением, соединением, переименованием атрибутов.

MSC: 68P15.

Ключевые слова: *пересечение, объединение, базы данных, табличные алгебры.*

1. Введение.

В настоящее время системы управления базами данных широко используются во многих сферах деятельности человека. Наиболее распространенными остаются реляционные (табличные) базы данных, основанные на реляционных моделях Э. Кодда [1]. Реляционные алгебры построены на базе теории множеств и отношений и являются основанием логики работы реляционных баз данных. Табличные алгебры, введенные В.Н. Редько и Д.Б. Буем [2], построены на основе реляционных алгебр Кодда, существенно их развивают и дополняют. Они составляют теоретический фундамент языков запросов современных табличных баз данных. Элементы носителя табличной алгебры уточняют реляционные структуры данных, а сигнатурные операции построены на базе основных табличных манипуляций в реляционных алгебрах и SQL-подобных языках.

Одной из актуальных задач в реляционных и табличных алгебрах является задача эквивалентного преобразования выражений с целью их упрощения / минимизации или приведения к стандартному виду; она является одним из этапов оптимизации запросов [3], ее решение может значительно уменьшить время обработки информации в реляционных системах управления базами данных. Для решения этой задачи используются взаимосвязи между основными табличными

операциями. Можно выделить пять видов взаимосвязей между табличными операциями: а) выражение одной операции через другие;
б) перестановочность (для двух унарных операций);
в) дистрибутивность (для двух бинарных или для бинарной и унарной операций);
г) аналоги известных свойств из теории множеств (для пересечения, объединения, разности таблиц).
д) коммутативность, ассоциативность, идемпотентность (для бинарных операций).

На сегодня [4] установлено значительное количество таких взаимосвязей, большинство из которых для общего случая выполняются в виде включений. Автором были найдены критерии перехода некоторых таких включений в равенства. Эти критерии выражаются в терминах активных доменов таблиц и являются естественными. В настоящей работе рассмотрены взаимосвязи пересечения и объединения таблиц с сигнатурными операциями табличных алгебр: разностью, селекцией, проекцией, насыщением, активным дополнением, соединением, переименованием атрибутов.

2. Основные определения.

Далее рассмотрим основные определения из теории табличных алгебр, а также укажем некоторые отличия между табличными и реляционными алгебрами Кодда.

Зафиксируем некоторое непустое множество $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$, элементы которого называются атрибутами. Произвольное конечное подмножество $R = \{A'_1, \ldots, A'_k\} \subseteq A$ назовем схемой, причем схема может являться пустым множеством. Строкой (кортежем в реляционных алгебрах Кодда) s схемы R ($s(R)$) называется множество пар $s = \{(A'_1, d_1), \ldots, (A'_k, d_k)\}$, проекция которого по первой компоненте равна R. Таблицей (отношением в реляционных алгебрах Кодда) схемы R ($T(R)$) называется конечное множество строк схемы R. Выделяют две особые таблицы: таблицу $T_\varepsilon = \{\varepsilon\}$, где ε – пустая строка, при этом схема таблицы T_ε является пустым множеством, и таблицу $T_\emptyset = \emptyset$ – пустое множество строк произвольной (в том числе и непустой) схемы.

Так же, как и в теории множеств, вводится понятие подтаблицы: таблица $T_1(R)$ является подтаблицей таблицы $T_2(R)$ (обозначается $T_1 \subseteq T_2$), если выполняется импликация: $\forall s(R) s \in T_1 \Rightarrow s \in T_2$. Кроме того, для любой таблицы $T(R)$ выполняется $T_\emptyset \subseteq T(R)$; если одновременно выполняются $T_1 \subseteq T_2$ и $T_2 \subseteq T_1$, то $T_1 = T_2$. Для удобства и уменьшения размера выражений, содержащих табличные операции, в основном мы не будем указывать явно схемы таблиц.

Далее в работе рассматриваем таблицы схемы R. На множестве всех таких таблиц введены такие параметрические операции:
1) пересечение $\bigcap\limits_R$ двух таблиц схемы R – таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат одновременно обеим исходным таблицам;
2) объединение $\bigcup\limits_R$ двух таблиц схемы R – таблица, состоящая из тех и только тех строк, которые принадлежат хотя бы одной из исходных таблиц;
3) разность $T_1 \underset{R}{-} T_2$ двух таблиц схемы R – таблица, состоящая из тех и только тех

строк, которые принадлежат таблице T_1 и не принадлежат таблице T_2.

Для введения операции насыщения необходимо одно вспомогательное понятие. Активным доменом атрибута A относительно таблицы T называется множество $D_{A,T} = \{d | \exists s \in T \wedge (A, d) \in s\}$, состоящее, говоря содержательно, из всевозможных значений атрибута A в таблице T. Насыщением $C(T)$ называется таблица $\prod\limits_{A \in R} D_{A,T}$, где R – схема таблицы T, а $\prod$ – оператор прямого (декартового) произведения, отвечающий индексированию $A \mapsto D_{A,T}$, $A \in R$ [4]. Таблица T называется насыщенной, если $T = C(T)$. Активным дополнением таблицы T называется таблица $\tilde{T} = C(T) \underset{R}{-} T$.

Введем определение операции селекции. Селекцией по предикату $P : S \to \{true, false\}$, где S – множество всех строк, называется унарная параметрическая операция σ_P , которая таблице сопоставляет ее подтаблицу, содержащую строки, на которых предикат P принимает истинное значения.

Введем определение операции проекции. Проекцией по множеству атрибутов $X \subseteq R$ называется унарная параметрическая операция π_X , значением которой является таблица, состоящая из ограничений по X всех строк исходной таблицы: $\pi_X(T) = \{s \mid x \quad | \; s \in T\}$. Здесь ограничение понимается стандартно: $s \mid x = s \bigcap X \times pr_2 s$, где $pr_2 s$ – проекция строки s по второй компоненте.

Для введения операции соединения необходимо одно вспомогательное понятие. Бинарные отношения ρ и τ называются совместными (обозначается $\rho \approx \tau$), если $\rho \mid x = \tau \mid x$, где $X = pr_1 \rho \bigcap pr_1 \tau$ [4]. Соединением называется бинарная операция $\otimes$, значением которой является таблица, состоящая из всевозможных объединений совместных строк исходных таблиц, т.е. $T_1 \otimes T_2 = \{s_1 \bigcup s_2 \mid s_1 \in T_1 \wedge s_2 \in T_2 \wedge s_1 \approx s_2\}$. Пусть T_1 – таблица схемы R_1, T_2 – таблица схемы R_2.

Введем определение операции переименования атрибутов. Переименованием называется унарная, в общем случае частичная операция RT_ξ , где ξ – инъективное отображение на множестве атрибутов. Эта операция осуществляет только переименование атрибутов таблиц в соответствии с отображением-параметром ξ. Содержательно говоря, переименование таблицы сводится к переименованию первых компонент пар – элементов строк.

Табличной алгеброй называют частичную алгебру с носителем — множеством всех таблиц произвольной схемы и приведёнными выше операциями (насыщение – вспомогательная операция), а также операцией деления, которая в этой статье не используется. Заметим, что в реляционных алгебрах Кодда [1] в качестве сигнатурных выделяют восемь операций: пересечение, объединение, разность, проекцию, селекцию, соединение, деление, а также, декартово произведение (в табличных алгебрах эта операция не является сигнатурной) таблиц; операции активного дополнения, переименования, а также, агрегации и многочисленные модификации операции соединения рассматриваются в различных пополнениях реляционных алгебр Кодда [3].

Рассмотрим взаимосвязи между пересечением, объединением и селекцией. В

[4] доказано выполненit равенств $\sigma_P(\bigcap\limits_i T_i) = \bigcap\limits_i \sigma_P(T_i)$ и $\sigma_P(\bigcup\limits_i T_i) = \bigcup\limits_i \sigma_P(T_i)$, то есть селекция дистрибутивна относительно пересечения и объединения таблиц.

Рассмотрим взаимосвязи между пересечением, объединением и соединением. В [4] доказано, что при совпадении схем таблиц T_i (только в этом случае определены $\bigcap\limits_i T_i$ и $\bigcup\limits_i T_i$) выполненяются равенства $T \otimes (\bigcap\limits_i T_i) = \bigcap\limits_i (T \otimes T_i)$ и $T \otimes (\bigcup\limits_i T_i) = \bigcup\limits_i (T \otimes T_i)$, то есть соединение дистрибутивно относительно пересечения и объединения таблиц.

Рассмотрим взаимосвязи между пересечением, объединением и переименовании атрибутов. В [4] доказано, что при корректном задании переименования атрибутов выполняются равенства $RT_\xi(\bigcap\limits_i T_i) = \bigcap\limits_i RT_\xi(T_i)$ и $RT_\xi(\bigcup\limits_i T_i) = \bigcup\limits_i RT_\xi(T_i)$, то есть переименование дистрибутивно относительно пересечения и объединения таблиц.

Взаимосвязи между пересечением, объединением и другими сигнатурными операциями табличных алгебр будут рассмотрены ниже.

3. Взаимосвязи между пересечением и табличными операциями.

Далее, если обратное не оговорено явно, для компактности изложения полагаем, что все упомянутые таблицы имеют непустую схему R с количеством атрибутов $k > 0$.

Известно, что пересечение может быть выражено через разность таблиц: $T_1 \bigcap\limits_R T_2 = T_1 \underset{R}{-} (T_1 \underset{R}{-} T_2)$. Доказательство тривиально.

Операция пересечения коммутативна, ассоциативна и идемпотентна, то есть выполняются равенства $T_1 \bigcap\limits_R T_2 = T_2 \bigcap\limits_R T_1$, $T_1 \bigcap\limits_R (T_2 \bigcap\limits_R T_3) = (T_1 \bigcap\limits_R T_2) \bigcap\limits_R T_3$ и $T \bigcap\limits_R T = T$. Доказательство тривиально.

Операции пересечения и объединения дистрибутивны между собой (двумя вариантами) то есть выполняются равенства $T_1 \bigcup\limits_R (T_2 \bigcap\limits_R T_3) = (T_1 \bigcup\limits_R T_2) \bigcap\limits_R (T_1 \bigcup\limits_R T_3)$ и $T_1 \bigcap\limits_R (T_2 \bigcup\limits_R T_3) = (T_1 \bigcap\limits_R T_2) \bigcup\limits_R (T_1 \bigcap\limits_R T_3)$. Доказательство тривиально.

Рассмотрим взаимосвязи между пересечением и разностью таблиц. Справедливы такие утверждения.

Лемма 1. *Выполняется равенство* $T_1 \bigcap\limits_R (T_2 \underset{R}{-} T_3) = (T_1 \bigcap\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcap\limits_R T_3)$.

Доказательство. Пусть $T_1 \bigcap\limits_R (T_2 \underset{R}{-} T_3) \neq T_\emptyset$ и $s \in T_1 \bigcap\limits_R (T_2 \underset{R}{-} T_3)$. Тогда, по определению пересечения и разности, $s \in T_1$, $s \in T_2$ и $s \notin T_3$. Из $s \in T_1$ и $s \in T_2$ следует $s \in T_1 \bigcap\limits_R T_2$, а из $s \in T_1$ и $s \notin T_3$ следует $s \notin T_1 \bigcap\limits_R T_3$, поэтому $s \in (T_1 \bigcap\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcap\limits_R T_3)$. Таким образом, $T_1 \bigcap\limits_R (T_2 \underset{R}{-} T_3) \subseteq (T_1 \bigcap\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcap\limits_R T_3)$.

Пусть теперь $(T_1 \bigcap\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcap\limits_R T_3) \neq T_\emptyset$ и $s \in (T_1 \bigcap\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcap\limits_R T_3)$. Тогда, по определению разности, $s \in T_1 \bigcap\limits_R T_2$ и $s \notin T_1 \bigcap\limits_R T_3$. Из $s \in T_1 \bigcap\limits_R T_2$ следует $s \in T_1$ и $s \in T_2$, а из $s \in T_1$ и $s \notin T_1 \bigcap\limits_R T_3$ следует $s \notin T_3$, поэтому $s \in T_2 \underset{R}{-} T_3$, поэтому

$s \in T_1 \bigcap_R (T_2 \underset{R}{-} T_3)$. Таким образом, $(T_1 \bigcap_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcap_R T_3) \subseteq T_1 \bigcap_R (T_2 \underset{R}{-} T_3)$. $\Box$

Лемма 2. *Выполняется включение* $T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcap_R T_3) \supseteq (T_1 \underset{R}{-} T_2) \bigcap_R (T_1 \underset{R}{-} T_3)$.

Доказательство. Пусть $(T_1 \underset{R}{-} T_2) \bigcap_R (T_1 \underset{R}{-} T_3) \neq T_\emptyset$ и $s \in (T_1 \underset{R}{-} T_2) \bigcap_R (T_1 \underset{R}{-} T_3)$. Тогда, по определению пересечения, $s \in T_1 \underset{R}{-} T_2$ и $s \in T_1 \underset{R}{-} T_3$, поэтому $s \in T_1$, $s \notin T_2$ и $s \notin T_3$. Из $s \notin T_2$ и $s \notin T_3$ следует $s \notin T_2 \bigcap_R T_3$. По определению разности таблиц $s \in T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcap_R T_3)$. $\Box$

Найдем критерий, при котором данное включение превращается в равенство.

Лемма 3. *Равенство* $T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcap_R T_3) = (T_1 \underset{R}{-} T_2) \bigcap_R (T_1 \underset{R}{-} T_3)$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $T_1 \bigcap_R T_2 = T_1 \bigcap_R T_3$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $T_1 = T_\emptyset$. Тогда $T_1 \bigcap_R T_2 = T_\emptyset$, $T_1 \bigcap_R T_3 = T_\emptyset$, $T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcap_R T_3) = T_\emptyset$, то есть равенство выполняется.

Пусть теперь $T_1 \neq T_\emptyset$. Если в этом случае $T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcap_R T_3) = T_\emptyset$, то по определению разности для любой строки $s \in T_1$ выполняется $s \in (T_2 \bigcap_R T_3)$, поэтому $s \in T_2$ и $s \in T_3$, следовательно $T_1 \underset{R}{-} T_2 = T_\emptyset$ и $T_1 \underset{R}{-} T_3 = T_\emptyset$, то есть равенство выполняется.

Пусть теперь $T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcap_R T_3) \neq T_\emptyset$ и $s \in T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcap_R T_3)$. Тогда, по определению разности, $s \in T_1$ и $s \notin T_2 \bigcap_R T_3$. Из $T_1 \bigcap_R T_2 = T_1 \bigcap_R T_3$ и $s \notin T_2 \bigcap_R T_3$ следует, что $s \notin T_2$ и $s \notin T_3$, поэтому $s \in T_1 \underset{R}{-} T_2$ и $s \in T_1 \underset{R}{-} T_3$, откуда следует $s \in (T_1 \underset{R}{-} T_2) \bigcap_R (T_1 \underset{R}{-} T_3)$, что доказывает необходимость.

От противного докажем достаточность утверждения. Пусть $T_1 \bigcap_R T_2 \neq T_1 \bigcap_R T_3$. Тогда $T_1 \neq T_\emptyset$. Для определенности положим, что существует такая строка s, что $s \in T_1 \bigcap_R T_2$ и $s \notin T_1 \bigcap_R T_3$. Тогда $s \in T_1$, $s \in T_2$ и $s \notin T_3$, следовательно, $s \notin T_2 \bigcap_R T_3$, то есть $s \in T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcap_R T_3)$. Из $s \in T_1$ и $s \in T_2$ вытекает $s \notin (T_1 \underset{R}{-} T_2)$, поэтому $s \notin (T_1 \underset{R}{-} T_2) \bigcap_R (T_1 \underset{R}{-} T_3)$, то есть равенство не выполняется. Аналогично доказывается невыполнимость равенства при существовании такой строки s, что $s \notin T_1 \bigcap_R T_2$ и $s \in T_1 \bigcap_R T_3$; это доказывает достаточность утверждения. $\Box$

Рассмотрим взаимосвязи между пересечением и насыщением таблиц. В [4] доказано включение $C(T_1 \bigcap_R T_2) \subseteq C(T_1) \bigcap_R C(T_2)$. В [5] найдены и доказаны критерии перехода этого включения в равенство для случая $C(T_1) \bigcap_R C(T_2) \neq T_\emptyset$. Из $C(T_1 \bigcap_R T_2) \subseteq C(T_1) \bigcap_R C(T_2)$, непустоты схемы таблиц и $C(T_1) \bigcap_R C(T_2) = T_\emptyset$ следует, что $C(T_1 \bigcap_R T_2) = T_\emptyset$, то есть для случая $C(T_1) \bigcap_R C(T_2) = T_\emptyset$ равенство $C(T_1 \bigcap_R T_2) = C(T_1) \bigcap_R C(T_2)$ выполняется всегда. Сформулируем полученный критерий.

Теорема 1. *Равенство $C(T_1 \bigcap_R T_2) = C(T_1) \bigcap_R C(T_2)$ выполняется при $C(T_1) \bigcap_R C(T_2) = T_\emptyset$. В противном случае это равенство выполняется при выполнении хотя бы одного из условий:*

1) выполняются равенства $\forall i \ D_{A_i, T_1 \bigcap_R T_2} = D_{A_i,T_1} \bigcap D_{A_i,T_2}$;

2) для любого индекса i и каждого элемента x из множества $D_{A_i,T_1} \bigcap D_{A_i,T_2}$ существует такая строка $s \in T_1 \bigcap_R T_2$, что $(A_i, x) \in s$.

Рассмотрим взаимосвязи между пересечением и активным дополнением. Для данных операций рассмотрены аналоги известных законов де Моргана (в данном случае можно говорить о взаимосвязях между пересечением, объединением и активным дополнением).

В [4] доказано включение $\tilde{T}_1 \bigcap_R \tilde{T}_2 \subseteq (T_1 \tilde{\bigcup_R} T_2)$. В [6] найдены и доказаны критерии перехода этого включения в равенство для случая $(T_1 \tilde{\bigcup_R} T_2) \neq T_\emptyset$. Из $\tilde{T}_1 \bigcap_R \tilde{T}_2 \subseteq (T_1 \tilde{\bigcup_R} T_2)$, непустоты схемы таблиц и $(T_1 \tilde{\bigcup_R} T_2) = T_\emptyset$ следует $\tilde{T}_1 \bigcap_R \tilde{T}_2 = T_\emptyset$, то есть при $(T_1 \tilde{\bigcup_R} T_2) = T_\emptyset$ это включение становится равенством. Сформулируем полученный критерий.

Теорема 2 (первый закон де Моргана). *Равенство $\tilde{T}_1 \bigcap_R \tilde{T}_2 = (T_1 \tilde{\bigcup_R} T_2)$ выполняется при $(T_1 \tilde{\bigcup_R} T_2) = T_\emptyset$. В противном случае это равенство выполняется при выполнении хотя бы одного из четырёх взаимоисключающих условий:*

1) $\forall A(A \in R \Rightarrow D_{A,T_1} = D_{A,T_2})$;

2) $\forall A(A \in R \Rightarrow D_{A,T_2} \subseteq D_{A,T_1})$, и для всех индексов q, значений $x \in D_{A_q,T_1} - D_{A_q,T_2}$ и всех значений $d_1, \ldots, d_{q-1}, d_{q+1}, \ldots, d_k$, принадлежащих соответственно активным доменам $D_{A_1,T_1}, \ldots, D_{A_{q-1},T_1}, D_{A_{q+1},T_1} \ldots, D_{A_k,T_1}$, строка $\{(A_1, d_1), \ldots, (A_{q-1}, d_{q-1}), (A_q, x), (A_{q+1}, d_{q+1}), \ldots, (A_k, d_k)\} \in T_1$;

3) $\forall A(A \in R \Rightarrow D_{A,T_1} \subseteq D_{A,T_2})$, и для всех индексов q, значений $x \in D_{A_q,T_2} - D_{A_q,T_1}$ и всех значений $d_1, \ldots, d_{q-1}, d_{q+1}, \ldots, d_k$, принадлежащих соответственно активным доменам $D_{A_1,T_2}, \ldots, D_{A_{q-1},T_2}, D_{A_{q+1},T_2} \ldots, D_{A_k,T_2}$, строка $\{(A_1, d_1), \ldots, (A_{q-1}, d_{q-1}), (A_q, x), (A_{q+1}, d_{q+1}), \ldots, (A_k, d_k)\} \in T_2$;

4) Существует такой атрибут A_q, для которого существуют значения $x \in D_{A_q,T_1} - D_{A_q,T_2}$, $y \in D_{A_q,T_2} - D_{A_q,T_1}$, причем $D_{A_q,T_1} \bigcap D_{A_q,T_2} \neq \emptyset$; кроме того, для всех $i \neq q$ выполняются равенства $D_{A_i,T_1} = D_{A_i,T_2}$; наконец, для всех $z_1 \in D_{A_q,T_1} - D_{A_q,T_2}$, всех $z_2 \in D_{A_q,T_2} - D_{A_q,T_1}$ и всех $d_1, \ldots, d_{q-1}, d_{q+1}, \ldots, d_k$, принадлежащих соответственно активным доменам $D_{A_1,T_1}, \ldots, D_{A_{q-1},T_1}, D_{A_{q+1},T_1} \ldots, D_{A_k,T_1}$, строка $\{(A_1, d_1), \ldots, (A_{q-1}, d_{q-1}), (A_q, z_1), (A_{q+1}, d_{q+1}), \ldots, (A_k, d_k)\} \in T_1$, а строка $\{(A_1, d_1), \ldots, (A_{q-1}, d_{q-1}), (A_q, z_2), (A_{q+1}, d_{q+1}), \ldots, (A_k, d_k)\} \in T_2$.

В [4] доказано включение $(T_1 \tilde{\bigcap}_R T_2) \subseteq \tilde{T}_1 \bigcup_R \tilde{T}_2$. В [6] найдены и доказаны критерии перехода этого включения в равенство для случая $(T_1 \tilde{\bigcap}_R T_2) \neq T_{\emptyset}$. Покажем, что это включение также превращается в равенство при $(T_1 \tilde{\bigcap}_R T_2) = T_{\emptyset}$ и выполнении любого из указанных в [6] условий.

Лемма 4. *Равенство* $(T_1 \tilde{\bigcap}_R T_2) = \tilde{T}_1 \bigcup_R \tilde{T}_2$ *при* $(T_1 \tilde{\bigcap}_R T_2) = T_{\emptyset}$ *выполняется тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух взаимоисключающих условий:*

1) для каждого атрибута $A \in R$ *выполняются равенства* $D_{A,T_1} = D_{A,T_1 \bigcap_R T_2}$ *и* $D_{A,T_2} = D_{A,T_1 \bigcap_R T_2}$*;*

2) для каждого атрибута $A_q \in R$ *и каждого такого значения* x*, что* $x \in D_{A_q,T_1} - D_{A_q,T_1 \bigcap_R T_2}$ *и всех значений* $d_1, \ldots, d_{q-1}, d_{q+1}, \ldots, d_k$*, которые принадлежат соответственно активным доменам* $D_{A_1,T_1}, \ldots, D_{A_{q-1},T_1}, D_{A_{q+1},T_1} \ldots, D_{A_k,T_1}$*, строка* $\{(A_1, d_1), \ldots, (A_{q-1}, d_{q-1}), (A_q, x), (A_{q+1}, d_{q+1}), \ldots, (A_k, d_k)\} \in T_1$*. Для каждого атрибута* $A_w \in R$ *и каждого такого значения* y*, что* $y \in D_{A_w,T_2} - D_{A_w,T_1 \bigcap_R T_2}$ *и всех значений* $d_1, \ldots, d_{w-1}, d_{w+1}, \ldots, d_k$*, которые принадлежат соответственно активным доменам* $D_{A_1,T_2}, \ldots, D_{A_{w-1},T_2}, D_{A_{w+1},T_2} \ldots, D_{A_k,T_2}$*, строка* $\{(A_1, d_1), \ldots, (A_{w-1}, d_{w-1}), (A_w, y), (A_{w+1}, d_{w+1}), \ldots, (A_k, d_k)\} \in T_2$*.*

Доказательство. Пусть $(T_1 \tilde{\bigcap}_R T_2) = T_{\emptyset}$ и выполняется условие (1). В [4] доказано, что $(T_1 \tilde{\bigcap}_R T_2) = T_{\emptyset}$ влечет $T_1 \bigcap_R T_2 = C(T_1 \bigcap_R T_2)$.

Допустим, что $T_1 \bigcap_R T_2 = T_{\emptyset}$. Тогда $T_1 = T_{\emptyset}$ и $T_2 = T_{\emptyset}$, так как существование строк в любой из таблиц T_1 или T_2 противоречит равенствам $D_{A,T_1} = D_{A,T_1 \bigcap_R T_2}$ и $D_{A,T_2} = D_{A,T_1 \bigcap_R T_2}$ соответственно. В этом случае $\tilde{T}_1 \bigcup_R \tilde{T}_2 = T_{\emptyset}$, то есть исходное включение превращается в равенство.

Пусть теперь $T_1 \bigcap_R T_2 \neq T_{\emptyset}$. Покажем, что в этом случае должны выполняться равенство $T_1 = T_2$. Допустим $T_1 \neq T_2$. Положим для определенности, что существует такая строка s, что $s \in T_1$ и $s \notin T_2$. Выполнение равенств условия (1) эквивалентно равенству активных доменов таблиц T_1, T_2 и $T_1 \bigcap_R T_2$, следовательно, $C(T_1) = C(T_2) = C(T_1 \bigcap_R T_2)$. Тогда $s \in T_1$ влечет $s \in C(T_1)$, поэтому $s \in C(T_1 \bigcap_R T_2)$. Из $s \notin T_2$ вытекает $s \notin T_1 \bigcap_R T_2$, то есть $s \in (T_1 \tilde{\bigcap}_R T_2)$, что противоречит предположению $(T_1 \tilde{\bigcap}_R T_2) = T_{\emptyset}$, поэтому $T_1 = T_2$. Тогда, заменив в исходном выражении таблицу T_2 таблицей T_1, получим верное равенство $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_1$. Таким образом, мы показали, что при $(T_1 \tilde{\bigcap}_R T_2) = T_{\emptyset}$ и выполнении условия (1) исходное выражение превращается в равенство. Аналогично доказывается выполнимость исходного равенства при существовании такой строки s, что $s \notin T_1$ и $s \in T_2$.

Покажем теперь, что при $(T_1 \tilde{\bigcap_R} T_2) = T_\emptyset$, невыполнении условия (1) и выполнении условия (2) исходное выражение тоже превращается в равенство, то есть $\tilde{T}_1 \bigcup_R \tilde{T}_2 = T_\emptyset$.

От противного, допустим, что $\tilde{T}_1 \bigcup_R \tilde{T}_2 \neq T_\emptyset$. Для определенности положим $\tilde{T}_1 \neq T_\emptyset$ и $s = \{(A_1, d_1), \ldots, (A_k, d_k)\} \in \tilde{T}_1$; тогда $s \notin T_1$. Покажем, что в этом случае должны выполняться принадлежности $d_1 \in D_{A_1, T_1 \bigcap_R T_2}, \ldots, d_k \in D_{A_k, T_1 \bigcap_R T_2}$. Допустим, что это неверно, то есть $d_q \in D_{A_q, T_1 \bigcap_R T_2}$ для некоторого индекса q. Тогда по определению активного дополнения $s \notin T_1$ и выполняются принадлежности $d_1 \in D_{A_1, T_1}, \ldots, d_k \in D_{A_k, T_1}$, то есть $d_q \in D_{A_q, T_1} - D_{A_q, T_1 \bigcap_R T_2}$. По условию (2) в этом случае должна выполняться принадлежность $s \in T_1$, противоречие доказывает неверность допущения. Следовательно, таблица $T_1 \bigcap_R T_2$ непуста, а поскольку $(T_1 \tilde{\bigcap_R} T_2) = T_\emptyset$, то таблица $T_1 \bigcap_R T_2$ является насыщенной. Из этого и из выполнения принадлежностей $d_1 \in D_{A_1, T_1 \bigcap_R T_2}, \ldots, d_k \in D_{A_k, T_1 \bigcap_R T_2}$ следует, что $\{(A_1, d_1), \ldots, (A_k, d_k)\} \in T_1 \bigcap_R T_2$, поэтому $s \notin T_1$, что противоречит первоначальному допущению. Поэтому случай $\tilde{T}_1 \neq T_\emptyset$ невозможен. Точно таким же образом доказывается невозможность случая $\tilde{T}_2 \neq T_\emptyset$, поэтому $\tilde{T}_1 \bigcup_R \tilde{T}_2 = T_\emptyset$, то есть исходное равенство выполняется. □

Таким образом, была доказана

Теорема 3 (второй закон де Моргана). $(T_1 \tilde{\bigcap_R} T_2) = \tilde{T}_1 \bigcup_R \tilde{T}_2$ *выполняется тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух взаимоисключающих условий из леммы 4.*

Рассмотрим взаимосвязи между пересечением и проекцией.

В [4] доказано включение $\pi_X(\bigcap_i T_i) \subseteq \bigcap_i \pi_X(T_i)$. В [7] найдены и доказаны критерии перехода этого включения в равенство для случая $\bigcap_i T_i \neq T_\emptyset$. Покажем, что это включение также превращается в равенство при $\bigcap_i T_i = T_\emptyset$ и выполнении указанного в [7] условия.

Теорема 4 (дистрибутивность проекции относительно пересечения). *Равенство* $\pi_X(\bigcap_i T_i) = \bigcap_i \pi_X(T_i)$ *при* $\bigcap_i T_i = T_\emptyset$ *выполняется тогда и только тогда, когда для каждой строки* $s = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p)\} \in \bigcap_i \pi_X(T)$ *существуют такие значения* $o_1 \in D_{O_1, \bigcap_i T_i}, \ldots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap_i T_i}$, *что строка* $s' = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \ldots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in \bigcap_i T_i$.

Доказательство. Пусть $\bigcap\limits_i T_i \neq T_\emptyset$. В [7] доказано, что равенство $\pi_X(\bigcap\limits_i T_i) = \bigcap\limits_i \pi_X(T_i)$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется указанное условие.

Пусть теперь $\bigcap\limits_i T_i = T_\emptyset$ От противного, допустим, что равенство не выполняется. Поскольку $\pi_X(T_\emptyset) = T_\emptyset$, то в таблице $\bigcap\limits_i \pi_X(T)$ существует некоторая строка $s = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p)\}$. По условию леммы в этом случае должны существовать такие значения $o_1 \in D_{O_1, \bigcap\limits_i T_i}, \ldots, o_{k-p} \in D_{O_{k-p}, \bigcap\limits_i T_i}$, что строка $s' = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (O_1, o_1), \ldots, (O_{k-p}, o_{k-p})\} \in \bigcap\limits_i T_i$, следовательно, $s' \in \bigcap\limits_i T_i$, что противоречит предположению $\bigcap\limits_i T_i = T_\emptyset$. $\square$

4. Взаимосвязи между объединением и табличными операциями.

Операция объединения коммутативна, ассоциативна и идемпотентна, то есть выполняются равенства $T_1 \bigcup\limits_R T_2 = T_2 \bigcup\limits_R T_1$, $T_1 \bigcup\limits_R (T_2 \bigcup\limits_R T_3) = (T_1 \bigcup\limits_R T_2) \bigcup\limits_R T_3$ и $T \bigcup\limits_R T = T$. Доказательство тривиально.

Рассмотрим взаимосвязи между объединением и разностью таблиц.

Лемма 5. *Выполняется включение* $T_1 \bigcup\limits_R (T_2 \underset{R}{-} T_3) \supseteq (T_1 \bigcup\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcup\limits_R T_3)$.

Доказательство. Пусть $(T_1 \bigcup\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcup\limits_R T_3) \neq T_\emptyset$ и $s \in (T_1 \bigcup\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcup\limits_R T_3)$. Если при этом $s \in T_1$, то по определению объединения $s \in T_1 \bigcup\limits_R (T_2 \underset{R}{-} T_3)$. Если же $s \notin T_1$, то по определению разности $s \in T_2$ и $s \notin T_1 \bigcup\limits_R T_3$, следовательно, $s \notin T_3$. Тогда $s \in T_2 \underset{R}{-} T_3$, поэтому $s \in T_1 \bigcup\limits_R (T_2 \underset{R}{-} T_3)$. $\square$

Найдем критерий, при котором данное включение превращается в равенство.

Лемма 6. *Равенство* $T_1 \bigcup\limits_R (T_2 \underset{R}{-} T_3) = (T_1 \bigcup\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcup\limits_R T_3)$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $T_1 = T_\emptyset$.

Доказательство. Пусть $T_1 = T_\emptyset$. Тогда $T_1 \bigcup\limits_R (T_2 \underset{R}{-} T_3) = (T_2 \underset{R}{-} T_3)$ и $(T_1 \bigcup\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcup\limits_R T_3) = (T_2 \underset{R}{-} T_3)$, то есть равенство выполняется.

Пусть теперь $T_1 \neq T_\emptyset$ и $s \in T_1$. Тогда $s \in T_1 \bigcup\limits_R (T_2 \underset{R}{-} T_3)$. С другой стороны, $s \in T_1 \bigcup\limits_R T_2$ и $s \in T_1 \bigcup\limits_R T_3$, поэтому $s \notin (T_1 \bigcup\limits_R T_2) \underset{R}{-} (T_1 \bigcup\limits_R T_3)$, то есть равенство не выполняется. $\square$

Лемма 7. *Выполняется включение* $T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcup\limits_R T_3) \subseteq (T_1 \underset{R}{-} T_2) \bigcup\limits_R (T_1 \underset{R}{-} T_3)$.

Доказательство. Пусть $T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcup\limits_R T_3) \neq T_\emptyset$ и $s \in T_1 \underset{R}{-} (T_2 \bigcup\limits_R T_3)$. Тогда, по определению разности, $s \in T_1$ и $s \notin T_2 \bigcup\limits_R T_3$, поэтому $s \in T_1$, $s \notin T_2$ и $s \notin T_3$. Из $s \in T_1$ и $s \notin T_2$ следует $s \in T_1 \underset{R}{-} T_2$, поэтому $s \in (T_1 \underset{R}{-} T_2) \bigcup\limits_R (T_1 \underset{R}{-} T_3)$. $\square$

Найдем критерий, при котором данное включение превращается в равенство.

Лемма 8. *Равенство* $T_1 \underset{R}{-} (T_2 \underset{R}{\bigcup} T_3) = (T_1 \underset{R}{-} T_2) \underset{R}{\bigcup} (T_1 \underset{R}{-} T_3)$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $T_1 \underset{R}{\bigcap} T_2 = T_1 \underset{R}{\bigcap} T_3$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $T_1 = T_\emptyset$. Тогда $T_1 \underset{R}{-} (T_2 \underset{R}{\bigcup} T_3) = T_\emptyset$ и $(T_1 \underset{R}{-} T_2) \underset{R}{\bigcup} (T_1 \underset{R}{-} T_3) = T_\emptyset$, то есть равенство выполняется. Пусть теперь $T_1 \neq T_\emptyset$ и $(T_1 \underset{R}{-} T_2) \underset{R}{\bigcup} (T_1 \underset{R}{-} T_3) \neq T_\emptyset$. Тогда существует $s \in (T_1 \underset{R}{-} T_2) \underset{R}{\bigcup} (T_1 \underset{R}{-} T_3)$, следовательно выполняется хотя бы одна из принадлежностей $s \in T_1 \underset{R}{-} T_2$ или $s \in T_1 \underset{R}{-} T_3$, поэтому $s \in T_1 \wedge s \notin T_2$ или $s \in T_1 \wedge s \notin T_3$. От противного, допустим, что $s \notin T_1 \underset{R}{-} (T_2 \underset{R}{\bigcup} T_3)$. Поскольку выполняется $s \in T_1$, это возможно только в том случае, когда $s \in T_2 \underset{R}{\bigcup} T_3$, что невозможно ввиду выполнения равенства $T_1 \underset{R}{\bigcap} T_2 = T_1 \underset{R}{\bigcap} T_3$ и хотя бы одного из условий $s \notin T_2$ или $s \notin T_2$; это доказывает необходимость.

От противного докажем достаточность утверждения. Пусть $T_1 \underset{R}{\bigcap} T_2 \neq T_1 \underset{R}{\bigcap} T_3$. Покажем, что в этом случае равенство не выполняется. $T_1 \underset{R}{\bigcap} T_2 \neq T_1 \underset{R}{\bigcap} T_3$ влечет $T_1 \neq T_\emptyset$. Для определенности положим, что существует такая строка s, что $s \in T_1 \underset{R}{\bigcap} T_2$ и $s \notin T_1 \underset{R}{\bigcap} T_3$. Тогда $s \in T_1$, $s \in T_2$ и $s \notin T_3$, следовательно, $s \in T_2 \underset{R}{\bigcup} T_3$, то есть $s \notin T_1 \underset{R}{-} (T_2 \underset{R}{\bigcup} T_3)$; при этом $s \in T_1 \underset{R}{\bigcup} T_3$, следовательно, $s \in (T_1 \underset{R}{-} T_2) \underset{R}{\bigcup} (T_1 \underset{R}{-} T_3)$. Аналогично доказывается невыполнимость равенства при существовании такой строки s, что $s \notin T_1 \underset{R}{\bigcap} T_2$ и $s \in T_1 \underset{R}{\bigcap} T_3$. $\square$

Рассмотрим взаимосвязи между объединениями и насыщением таблиц. В [4] доказано включение $C(T_1 \underset{R}{\bigcup} T_2) \supseteq C(T_1) \underset{R}{\bigcup} C(T_2)$. В [5] найдены и доказаны критерии перехода этого включения в равенство для случая $T_1 \neq T_\emptyset$ и $T_2 \neq T_\emptyset$. Несложно видеть что при $T_1 = T_\emptyset$ указанное включение превращается в равенство $C(T_2) = C(T_2)$, а при $T_2 = T_\emptyset$ – в равенство $C(T_1) = C(T_1)$. Сформулируем полученный критерий.

Теорема 5. *Если* $T_1 = T_\emptyset$ *или* $T_2 = T_\emptyset$, *то равенство* $C(T_1 \bigcup T_2) = C(T_1) \bigcup C(T_2)$ *выполняется. В противном случае это равенство выполняется при выполнении хотя бы одного из условий:*

1) существует не более одного атрибута, для которого значения активного домена относительно таблиц T_1 *и* T_2 *различается;*

2) выполняется хотя бы одно включение $\forall i \ D_{A_i,T_1} \subseteq D_{A_i,T_2}$ *или* $\forall i \ D_{A_i,T_2} \subseteq D_{A_i,T_1}$.

Рассмотрим взаимосвязи между объединением и проекцией. В [4] доказано выполнения равенства $\pi_X(\bigcup_i T_i) = \bigcup_i \pi_X(T_i)$, то есть проекция дистрибутивна относительно объединения таблиц.

5. Выводы.

В работе рассмотрены взаимосвязи пересечения и объединения таблиц с другими сигнатурными операциями табличных алгебр: разностью, селекцией, проекцией, насыщением, активным дополнением, соединением, переименованием атрибутов. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых некоторые взаимосвязи, которые для общего случая являются включениями, переходят в равенства. Эти результаты могут быть использованы для преобразования выражений, содержащих табличные операции с целью их минимизации или перехода к стандартному виду. В дальнейшем планируется рассмотреть взаимосвязи между другими табличными операциями, а также найти вероятности того, что найденные в работе критерии будут выполняться для произвольных таблиц и таблиц специального вида.

Цитированная литература

1. *Codd E.F.* A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks // Communications of the ACM. – 1970. – 13, No 6. – P. 377–387.
2. *Редько В.Н., Буй Д.Б.* К основаниям теории реляционных моделей баз данных // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – Т. 32, № 4. – С. 3–12.
3. *Гарсиа-Молина Г., Ульман Дж., Уидом Дж.* Системы баз данных. – Москва: «Вильямс», 2004. – 1088 с.
4. *Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: «Академперіодика», 2001. – 198 с.
5. *Сенченко А.С.* О дистрибутивности в табличных алгебрах операции насыщения относительно операций объединения и пересечения // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – Т. 26. – С. 197–204.
6. *Сенченко О.С.* Закони де Моргана у табличних алгебрах // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. Спецвипуск. – 2013. – С. 158–163.
7. *Сенченко А.С.* Свойства операции проекции в табличных алгебрах // Труды ИПММ НАН Украины. – 2014. – Т. 28. – С. 137–144.

References

1. Codd, E.F. (1996). A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. *Communications of the ACM, 13*(6), 377-387.
2. *Red'ko V.N., Bui D.B.* (1996). Foundations of the theory of relational database models. Cybernetics and Systems Analysis, Vol.**32**, Issue 4, pp. 471–478.
3. Red'ko, V.N., Bui, D.B. (1996). Foundations of the theory of relational database models. *Cybernetics and Systems Analysis, 32*(4), 471-478.
4. Garcia-Molina, H., Ullman, J.M., Widom, J. (2008). *Database Systems: The Complete Book* (2nd Edition). Pearson.
5. Red'ko, V.N., Brona, Yu. Y., Bui, D.B., Polyakov, S.A. (2001). *Relational databases: table algebras and SQL-like languages.* Kyiv: Academperiodica (in Ukrainian).
6. Senchenko, A.S. (2013). On a distributivity of a saturation to join and intersection in table algebra. *Trudy IPMM NAN Ukrainy, 26*, 197-204 (in Russian).
7. Senchenko, O.S. (2013). De Morgan's laws in table algebra. *Visnyk Kievskgo nacional'nogo un-ta im. T. Shevchenko. Seriya: fiz.-mat. nauki. Spec. issue*, 158-163 (in Ukrainian).
8. Senchenko, A.S. (2014). The properties of projection operation in table algebra. *Trudy IPMM NAN Ukrainy, 28*, 137-144 (in Russian).

A.S. Senchenko

The interrelations between intercestion, union and other signature operations in table algebra.

Currently, databases are widely used in almost all areas of human activity. For all variety of different types of databases the most common are relational (table) databases, mathematical model of which was proposed by E. Codd. From mathematical point of view, a relational database is a finite set of finite relations between different predefined sets of basic data. Table algebra introduced by V.N. Red'ko and D.B. Buy is based on Codd's relational algebra and significantly improves it. It formed the theoretical foundation of modern database query language. Elements of the carrier of table algebra specify relational data structures, and signature operations are based on the basic table manipulations in relational algebra and SQL-like languages. One of the most actual tasks in relational and table algebras is the problem of equivalent transformation of expressions in order to minimize or reduce them to a standard form; it is one of the stages of query optimization, and can also significantly reduce the processing time of information in relational database management systems. For the decision of this problem the interrelations between the basic table operations are used. In the present, a significant number of such interrelations have been established, most of which for the general case are performed as inclusions. The author has found criteria for the transition of some such inclusions into equalities. These criteria are expressed in terms of the active domains of the tables and are natural. In this paper, the interrelations of the intersection and the union of tables with other signature operations of table algebras: difference, selection, projection, saturation, active complement, join, renaming of attributes are considered.

Keywords: *intersection, union, databases, table algebra.*

О.С. Сенченко

Взаємозв'язки між перетином, об'єднанням та іншими сигнатурними операціями в табличних алгебрах.

В наш час реляційні бази даних, математична модель яких була запропонована Е. Коддом, залишаються найбільш розповсюдженими. Табличні алгебри побудовані на основі реляційних алгебр Е. Кодда, суттєво їх розвивають та складають теоретичний фундамент мов запитів сучасних табличних баз даних. У реляційних та табличних алгебрах актуальною є задача еквівалентного перетворення виразів із метою їх мінімізації або приведення до стандартного вигляду; вона є одним із етапів оптимізації запитів, її розв'язання може суттєво зменшити час обробки інформації в реляційних системах управління базами даних. Для розв'язування цієї задачі використовуються взаємозв'язки між основними табличными операціями. На сьогодні встановлено значну кількість таких взаємозв'язків, більшість із яких для загального випадку виконуються в вигляді включень. Автором були знайдені критерії переходу деяких таких включень у рівності. У роботі розглянуто взаємозв'язки перетину та об'єднання таблиць з іншими сигнатурними операціями табличних алгебр: різницею, селекцією, проекцією, насиченням, активним доповненням, з'єднанням, перейменуванням атрибутів.

Ключові слова: *перетин, об'єднання, база даних, табличні алгебри.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
`senchenko.a76@gmail.com`

Получено 18.12.18

УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-14

©2018. **С.М. Чуйко, Е.В. Чуйко, Я.В. Калиниченко**

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье предложены оригинальные условия регуляризации, а также схема нахождения решений линейной нетеровой краевой задачи для системы разностных уравнений, при этом существенно использована техника псевдообращения матриц по Муру–Пенроузу. Поставленная в статье задача продолжает исследование условий регуляризации линейных нетеровых краевых задач, приведенных в монографиях А.Н. Тихонова, В.Я. Арсенина, С.Г. Крейна, А.М. Самойленко, Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной и А.А. Бойчука. Исследован общий случай, когда линейный ограниченный оператор, соответствующий однородной части линейной нетеровой краевой задачи, не имеет обратного. В статье построен обобщенный оператор Грина и найден вид линейного возмущения регуляризованой линейной краевой задачи для системы разностных уравнений. Предложенные условия регуляризации, а также схема нахождения решений линейных нетеровых краевых задач для системы разностных уравнений подробно проиллюстрированы на примерах. В отличие от более ранних статей авторов, задача о регуляризации линейной краевой задачи для системы разностных уравнений решена конструктивно, причем получены достаточные условия существования решения задачи о регуляризации.

MSC: 34B15.

Ключевые слова: *регуляризация, линейная нетерова краевая задача, системы разностных уравнений.*

1. Постановка задачи.

Исследуем задачу о нахождении ограниченных решений $z(k) \in \mathbb{R}^n$ системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1) = A(k)z(k) + f(k), \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \dots \ ; \tag{1}$$

здесь $A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — ограниченные матрицы и $f(k)$ — действительные ограниченные вектор-столбцы. Как известно [1], общее решение задачи Коши $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для однородной части невырожденной ($\det A(k) \neq 0$) системы разностных уравнений (1) представимо в виде: $z(k) = X(k)c, \ c \in \mathbb{R}^n$; здесь $X(k)$ — нормальная фундаментальная матрица. Общее решение задачи Коши $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной части невырожденной ($\det A(k) \neq 0$) системы разностных уравнений (1) представимо в виде:

$$z(k) = X(k)c + K[f(j)](k), \ c \in \mathbb{R}^n;$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (номер государственной регистрации 0118U003390).

здесь

$$K[f(j)](k) := X(k) \sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1) f(j)$$

— оператор Грина задачи Коши для системы разностных уравнений (1). Задача о нахождении ограниченных решений системы линейных разностных уравнений (1) существенно усложняется в случае ее вырождения, а именно: при условии $\det A(k) = 0$ хотя бы для некоторых $k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$. В этом случае для нахождения ограниченных решений системы линейных разностных уравнений (1) можно использовать технику регуляризации [2–5]. Возмущение квадратной, но вырожденной матрицы $A(k)$ будем искать в виде

$$\mathcal{A}(k,\varepsilon) := A(k) + \varepsilon\, \Omega(k),\ \Omega(k) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

предполагая матрицу $\mathcal{A}(k,\varepsilon)$ невырожденной и ограниченной. Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

регуляризованной системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1,\varepsilon) = \mathcal{A}(k,\varepsilon) z(k,\varepsilon) + f(k),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots . \tag{2}$$

Поскольку любая $(n \times n)$ – матрица $A(k)$ постоянного ранга σ в определенном базисе может быть представлена в виде стандартного разложения [6–8]

$$A(k) = R(k) \cdot J_\sigma \cdot S(k),\ J_\sigma := \begin{pmatrix} I_\sigma & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

постольку возмущение матрицы $A(k)$ представимо в виде

$$\Omega(k) = R(k) \cdot \check{J}_{\sigma_0} \cdot S(k),\ \check{J}_\sigma := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-\sigma} \end{pmatrix};$$

здесь $R(k)$ и $S(k)$ — ограниченные невырожденные матрицы.

Общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ для однородной части невырожденной ($\det \mathcal{A}(k,\varepsilon) \neq 0$) системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon) = X(k,\varepsilon)c,\ c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь $X(k,\varepsilon)$ — нормальная фундаментальная матрица:

$$X(k+1,\varepsilon) = \mathcal{A}(k,\varepsilon) X(k,\varepsilon),\ X(0,\varepsilon) = I_n.$$

Одной из фундаментальных матриц является, в частности, матрица

$$X(k,\varepsilon) = \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{A}(j,\varepsilon).$$

Общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon)=c\in\mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon)=X(k,\varepsilon)c+X(k,\varepsilon)\sum_{j=0}^{k-1}X^{-1}(j+1,\varepsilon)f(j),\ c\in\mathbb{R}^n.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Предположим, что $(n\times n)$ – матрица $A(k)$ имеет постоянный ранг, а именно:*

$$1\le \operatorname{rank}\, A(k)=\sigma<n.$$

Тогда общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon)=c\in\mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon)=X(k,\varepsilon)c+K[f(j)](k,\varepsilon),\ c\in\mathbb{R}^n;$$

здесь

$$K[f(j)](k,\varepsilon):=X(k,\varepsilon)\sum_{j=0}^{k-1}X^{-1}(j+1,\varepsilon)f(j)$$

— оператор Грина задачи Коши для регуляризованной системы разностных уравнений (2).

Пример 1. *Найдем решение системы разностных уравнений первого порядка*

$$z(k+1)=Az(k)+f(k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{3}$$

где

$$A=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix},\ f(k)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Для нахождения возмущенной матрицы

$$\mathcal{A}(k,\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}0&3\sqrt{10}&3\sqrt{10}\\ \sqrt{10}&2\,\varepsilon&-2\,\varepsilon\\ 2\sqrt{10}&-\varepsilon&\varepsilon\end{pmatrix},\ \mathcal{A}(k,0)=A,$$

определяющей регуляризованную систему линейных разностных уравнений используем возмущение матрицы A в виде

$$\Omega=R\cdot\check{J}_\sigma\cdot S,\ J_\sigma:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}0&3&3\\ \sqrt5&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}.$$

При этом $X(k,\varepsilon)$ — нормальная фундаментальная матрица:

$$X(1,\varepsilon) = X(0,\varepsilon) = I_3,$$

кроме того

$$X(2,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 9 & \frac{3\,\varepsilon}{\sqrt{10}} & -\frac{3\,\varepsilon}{\sqrt{10}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}}\varepsilon & \frac{3}{5}\left(5+\varepsilon^2\right) & 3-\frac{3\,\varepsilon^2}{5} \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{10}} & 6-\frac{3\,\varepsilon^2}{10} & 6+\frac{3\,\varepsilon^2}{10} \end{pmatrix},$$

$$X(3,\varepsilon) = \frac{1}{10\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -30\,\varepsilon & 9\sqrt{10}\left(30+\varepsilon^2\right) & -9\sqrt{10}\left(-30+\varepsilon^2\right) \\ -6\sqrt{10}\left(-15+\varepsilon^2\right) & 6\varepsilon\left(-5+3\varepsilon^2\right) & -18\varepsilon\left(5+\varepsilon^2\right) \\ 3\sqrt{10}\left(60+\varepsilon^2\right) & -9\varepsilon\left(-10+\varepsilon^2\right) & -30\,\varepsilon+9\,\varepsilon^3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon)=c\in\mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений для системы (3) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon) = X(k,\varepsilon)c + K[f(j)](k,\varepsilon), \ c\in\mathbb{R}^3;$$

здесь

$$K[f(j)](1,\varepsilon) = f(1), \ K[f(j)](2,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 16 \\ 3-\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon \\ 5+\frac{\varepsilon}{\sqrt{10}} \end{pmatrix},$$

$$K[f(j)](3,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 25-\frac{3\,\varepsilon}{\sqrt{10}} \\ 18-2\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon-\frac{3\,\varepsilon^2}{5} \\ 35+\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon+\frac{3\,\varepsilon^2}{10} \end{pmatrix}$$

— оператор Грина регуляризованной задачи Коши для системы разностных уравнений (3). При этом нормальная фундаментальная матрица $X(k,\varepsilon)$ и оператор Грина задачи Коши для регуляризованной системы разностных уравнений (3) $K[f(j)](k,\varepsilon)$ непрерывны по ε :

$$X(k,\cdot), \ K[f(j)](k,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

поэтому общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon)=c\in\mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений для системы (3) $z(k,\varepsilon)$ при $\varepsilon=0$ обращается в точное решение $z(k)$ системы разностных уравнений (3)

$$z(k) = X(k)c + K[f(j)](k), \ c\in\mathbb{R}^3;$$

здесь

$$X(1) = I_3, \ X(2) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \ X(3) = \begin{pmatrix} 0 & 27 & 27 \\ 9 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— нормальная фундаментальная матрица и

$$K[f(j)](1) = f(1),\ K[f(j)](2) = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ K[f(j)](3) = \begin{pmatrix} 25 \\ 18 \\ 35 \end{pmatrix}$$

— обобщенный оператор Грина вырожденной задачи Коши для системы разностных уравнений (3).

2. Регуляризация линейной невырожденной краевой задачи для системы разностных уравнений.

Задача о нахождении ограниченных решений $z(k)$ линейной нетеровой ($m \neq n$) краевой задачи для линейной невырожденной системы разностных уравнений первого порядка

$$z(k+1) = A(k)z(k) + f(k),\ \ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m \tag{4}$$

была решена А.А. Бойчуком [1]; здесь $\ell z(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный ограниченный векторный функционал, определенный на пространстве ограниченных функций. Обозначим матрицу $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, а также

$$P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q),\ P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$$

— матрицы-ортопроекторы. Подставляя общее решение задачи Коши $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ неоднородного линейного разностного уравнения (4) в краевое условие (4)

$$z(k) = X(k)c + K\Big[f(s)\Big](k),$$

при условии $\det A(k) \neq 0$ приходим к уравнению

$$Q\,c = \alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot),$$

разрешимому тогда и только тогда, когда [1]

$$P_{Q^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{5}$$

В этом случае решение $z(k)$ линейной невырожденной нетеровой краевой задачи (4) определяет вектор

$$c = Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{Q_r} c_r,\ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — псевдообратная по Муру – Пенроузу матрица [1]; матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора

$P_Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Таким образом [1], линейная нетерова краевая задача для линейной системы разностных уравнений первого порядка (4) при условии $\det A(k) \neq 0$ разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (5); в этом случае решение $z(k)$ линейной нетеровой краевой задачи (4) представимо в виде:

$$z(k) = X_r(k)c_r + G\Big[f(s);\alpha\Big](k),\ \ c_r \in \mathbb{R}^r;$$

здесь $X_r(k) := X(k)P_{Q_r}$, $X(k)$ — нормальная ($X(0) = I_n$) фундаментальная матрица,

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](k) := X(k)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s)\Big](k)$$

— обобщенный оператор Грина нетеровой линейной краевой задачи (4) для невырожденной системы разностных уравнений первого порядка. Следуя традиционной классификации краевых задач [1], случай $P_{Q^*} \neq 0$ назовем критическим. Случай $P_{Q^*} = 0$ назовем некритическим. Поставим задачу о регуляризации [2, 3, 5] краевой задачи (4), а именно: поставим задачу о нахождении малого возмущения краевого условия (4) таким образом, чтобы линейная краевая задача (4) стала разрешимой для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (4). Возмущение функционала $\ell z(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определяющего вид краевого условия (4) будем искать в виде

$$\mathcal{L}z(\cdot,\varepsilon) := \ell z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\, \Xi z(0,\varepsilon) :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

линейного ограниченного векторного функционала, определенного на пространстве ограниченных функций $z(k,\varepsilon)$. Таким образом, возмущение матрицы Q будем искать в виде

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) := Q + \varepsilon\,\Xi,\ \ 0 < \varepsilon \ll 1,\ \ \Xi \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

предполагая матрицу $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ матрицей полного ранга:

$$P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon) = 0,\ \ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

в частности, для фредгольмовой ($m = n$) задачи (4), невырожденной. В случае нетеровой ($m \neq n$) краевой задачи (4) условие полноты ранга матрицы $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ равносильно уравнению

$$\Big(Q + \varepsilon\,\Xi\Big)\cdot\Big(Q + \varepsilon\,\Xi\Big)^+ = I_m \tag{6}$$

относительно $(m \times n)$– матрицы Ξ. Заметим, что в случае $P_{Q^*} \neq 0$ уравнение (6) разрешимо лишь для $m = n$, либо $m < n$. Действительно, предположим уравнение (6) переопределенным: $m > n$, при этом

$$\text{rank}\,\Big(Q + \varepsilon\,\Xi\Big)\Big(Q + \varepsilon\,\Xi\Big)^+ \leq \text{rank}\,\Big(Q + \varepsilon\,\Xi\Big) =$$

$$= \text{rank} \left(Q + \varepsilon\,\Xi \right)^{+} \le n < m,$$

что противоречит равенству рангов левой и правой части уравнения (6). Поскольку любая $(m \times n)$ – матрица Q в определенном базисе может быть представлена в виде стандартного разложения $Q = R \cdot J_\sigma \cdot S$, постольку возмущение матрицы Ξ представимо в виде

$$\Xi = R \cdot \check{J} \cdot S, \ \ \check{J} := \begin{pmatrix} O & O \\ O & \check{J}_{(m-\sigma)\times(n-\sigma)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n};$$

здесь

$$\check{J}_{(m-\sigma)\times(n-\sigma)} \in \mathbb{R}^{(m-\sigma)\times(n-\sigma)}$$

— любая постоянная матрица полного ранга. Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$z(k, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \ \ k = 0, \ 1, \ 2, \ ...$$

регуляризованной краевой задачи для системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1, \varepsilon) = A\, z(k, \varepsilon) + f(k), \ \ \mathcal{L}z(\cdot, \varepsilon) = \alpha. \tag{7}$$

В силу равенства $P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon) = 0$, регуляризованная краевая задача (7) разрешима для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (7). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Линейная нетерова краевая задача для линейной системы разностных уравнений первого порядка (4) при условии* $\det A(k) \neq 0$ *в критическом случае:*

$$P_{Q^*} \neq 0, \ \ m \le n$$

может быть регуляризована возмущением краевого условия:

$$\mathcal{L}z(\cdot, \varepsilon) := \ell z(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon\, \Xi z(0, \varepsilon), \ \ \Xi = R \cdot \check{J} \cdot S.$$

Регуляризованная краевая задача (7) разрешима для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (7), при этом решение $z(k)$ *линейной нетеровой краевой задачи (7) представимо в виде:*

$$z(k) = X_r(k)c_r + G\Big[f(s); \alpha\Big](k, \varepsilon), \ \ c_r \in \mathbb{R}^r;$$

здесь $X_r(k) = X(k)P_{Q_r}(\varepsilon)$, $X(k)$ *— нормальная* $(X(0) = I_n)$ *фундаментальная матрица,*

$$G\Big[f(s); \alpha\Big](k, \varepsilon) = X(k)\mathcal{Q}^+(\varepsilon)\Big\{\alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s)\Big](k)$$

— обобщенный оператор Грина регуляризованной краевой задачи (7) для невырожденной системы разностных уравнений первого порядка.

Пример 2. *Найдем решение периодической задачи для системы разностных уравнений первого порядка*

$$z(k+1) = Az(k) + f, \ z(0) - z(4) = 0, \tag{8}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае $\lambda_1, \lambda_2 = \pm\, i, \ \lambda_3 = 3 \neq 1$ — корни характеристического уравнения; в этом случае матрица A неособенным преобразованием подобия

$$A = S \cdot J \cdot S^{-1}, \ S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводится к жордановой форме

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

при этом общее решение линейной однородной системы разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$z(k+1) = Jz(k), \ k \in \mathbb{N}$$

представимо в виде

$$z(k) = Y(k)\, c, \ c \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$Y(k) := \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi k}{2} & \sin\frac{\pi k}{2} & 0 \\ -\sin\frac{\pi k}{2} & \cos\frac{\pi k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

— нормальная ($Y(0) = I_3$) фундаментальная матрица однородной части последней нормальной системы разностных уравнений. Общее решение однородной части системы (8) представимо в виде

$$z(k) = X(k)c, \ c \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$X(k)=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi k}{2}-\sin\frac{\pi k}{2} & -\sin\frac{\pi k}{2} & \sin\frac{\pi k}{2} \\ \cos\frac{\pi k}{2}+\sin\frac{\pi k}{2}-3^k & \cos\frac{\pi k}{2} & 3^k-\cos\frac{\pi k}{2} \\ \cos\frac{\pi k}{2}-\sin\frac{\pi k}{2}-3^k & -\sin\frac{\pi k}{2} & 3^k+\sin\frac{\pi k}{2} \end{pmatrix}$$

— фундаментальная матрица однородной части системы разностных уравнений (8); она определяет частное решение

$$K\Big[f(s)\Big](k)=\begin{pmatrix} 2\sin^2\frac{\pi k}{2} \\ -\sin\frac{\pi k}{2} \\ 2\sin^2\frac{\pi k}{2} \end{pmatrix},$$

представимое оператором Грина задачи Коши для системы разностных уравнений (8). Поскольку матрица

$$Q=X(0)-X(4)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -80 & 0 & 80 \\ -80 & 0 & 82 \end{pmatrix}$$

вырождена, постольку для краевой задачи (8) имеет место критический случай: $P_{Q^*}\neq 0$, при этом матрица Q базисе может быть представлена в виде стандартного разложения $Q=R\cdot J_\sigma\cdot S$, где

$$R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица

$$\mathcal{Q}(\varepsilon)=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ -80-\frac{\varepsilon}{2} & 0 & 80-\frac{\varepsilon}{2} \\ -80+\frac{\varepsilon}{2} & 0 & 82+\frac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}$$

невырождена, постольку

$$P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon)=P_{\mathcal{Q}}(\varepsilon)=0,$$

следовательно регуляризованная задача (7) в случае краевой задачи (8) разрешима для любых неоднородностей, при этом

$$z(k,\varepsilon)=G\Big[f(s)\Big](k,\varepsilon);$$

здесь

$$G\Big[f(s);0\Big](k)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi k}{2} \\ \sin\frac{\pi k}{2} \\ \cos\frac{\pi k}{2} \end{pmatrix}$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (8).

3. Регуляризация линейной вырожденной краевой задачи для линейной системы разностных уравнений.

Поставим задачу о регуляризации [2, 3, 5] краевой задачи (4) при условии $\det A(k) = 0$, а именно: поставим задачу о нахождении малого возмущения краевого условия (4) таким образом, чтобы линейная краевая задача (4) стала разрешимой для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (4). Возмущение квадратной, но вырожденной матрицы $A(k)$ будем искать в виде

$$\mathcal{A}(k,\varepsilon) := A(k) + \varepsilon\,\Omega(k),\ \Omega(k) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,,$$

предполагая матрицу $\mathcal{A}(k,\varepsilon)$ невырожденной и ограниченной. Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

регуляризованной системы линейных разностных уравнений (2). Поскольку любая $(n \times n)$ — матрица $A(k)$ постоянного ранга σ может быть представлена в виде стандартного разложения $A(k) = R(k)\cdot J_\sigma \cdot S(k)$, постольку возмущение матрицы $A(k)$ представимо в виде

$$\Omega(k) = R(k)\cdot \check{J}_\sigma \cdot S(k),\ \check{J}_\sigma := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-\sigma} \end{pmatrix}.$$

Одной из фундаментальных матриц является матрица

$$X(k,\varepsilon) = \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{A}(j,\varepsilon).$$

Общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon) = X(k,\varepsilon)c + K[f(j)](k,\varepsilon),\ c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь

$$K[f(j)](k,\varepsilon) := X(k,\varepsilon)\sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1,\varepsilon)f(j)$$

— оператор Грина задачи Коши для регуляризованной системы разностных уравнений (2). Поставим задачу о регуляризации краевой задачи (4) при условии

$$\det A(k) = 0,$$

а именно: поставим задачу о нахождении малого возмущения краевого условия (4) таким образом, чтобы линейная краевая задача (4) стала разрешимой для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (4). Возмущение функционала $\ell z(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определяющего вид краевого условия (4) будем искать в виде

$$\mathcal{L}z(\cdot,\varepsilon) := \ell z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\, \Xi z(0,\varepsilon) : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

линейного ограниченного векторного функционала, определенного на пространстве ограниченных функций $z(k,\varepsilon)$. Таким образом, возмущение матрицы Q будем искать в виде

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) := Q + \varepsilon\, \Xi, \ \Xi \in \mathbb{R}^{m\times n}, \ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

предполагая матрицу $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ матрицей полного ранга:

$$P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon) = 0, \ m \le n, \ 0 < \varepsilon \ll 1,$$

в частности, для фредгольмовой $(m = n)$ задачи (4), невырожденной. Поскольку любая $(m\times n)$ – матрица Q ранга σ_q может быть представлена в виде стандартного разложения $Q = R_1 \cdot J_{\sigma_q} \cdot S_1$, постольку матрица Ξ представима в виде

$$\Xi = R_1 \cdot \check{J}_{\sigma_q} \cdot S_1, \ \check{J}_{\sigma_q} := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-\sigma_q} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots$$

регуляризованной краевой задачи для системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1,\varepsilon) = \mathcal{A}(k,\varepsilon)\, z(k,\varepsilon) + f(k), \ \mathcal{L}z(\cdot,\varepsilon) = \alpha. \tag{9}$$

В силу равенства $P_{\mathcal{Q}^*}(\varepsilon) = 0$, регуляризованная краевая задача (9) разрешима для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (9). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Линейная нетерова краевая задача для линейной системы разностных уравнений первого порядка (4) при условии* $\det A(k) = 0$ *в критическом случае:* $P_{Q^*} \ne 0, \ m \le n$ *может быть регуляризована возмущением матрицы* $A(k)$:

$$\mathcal{A}(k,\varepsilon) := A(k) + \varepsilon\, \Omega(k), \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ \Omega(k) = R(k) \cdot \check{J}_\sigma \cdot S(k),$$

а также краевого условия:

$$\mathcal{L}z(\cdot,\varepsilon) := \ell z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\, \Xi z(0,\varepsilon), \ \Xi = R \cdot \check{J} \cdot S.$$

Регуляризованная краевая задача (9) разрешима для любых неоднородностей краевой задачи для системы разностных уравнений (7), при этом решение $z(k)$ *линейной нетеровой краевой задачи (9) представимо в виде:*

$$z(k) = X_r(k)c_r + G\Big[f(s);\alpha\Big](k,\varepsilon), \ c_r \in \mathbb{R}^r;$$

здесь $X_r(k) = X(k)P_{\mathcal{Q}_r}(\varepsilon)$, $X(k)$ *— нормальная* $(X(0) = I_n)$ *фундаментальная матрица,*

$$G\Big[f(s);\alpha\Big](k,\varepsilon) = X(k)\mathcal{Q}^{+}(\varepsilon)\Big\{\alpha - \mathcal{L}K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s)\Big](k)$$

— обобщенный оператор Грина регуляризованной краевой задачи (9) для невырожденной системы разностных уравнений первого порядка.

Пример 3. *Найдем решение двухточечной задачи для системы разностных уравнений первого порядка*

$$z(k+1) = A\,z(k) + f,\ \ \ell z(\cdot) := M\,z(0) + N\,z(3) = 0, \tag{10}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ N := 10\sqrt{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вырожденная матрица $A(k)$ постоянного ранга $\sigma = 2$ в виде стандартного разложения, а также возмущение $\mathcal{A}(\varepsilon)$ матрицы $A(k)$ представлены в примере 1, при этом нормальная фундаментальная матрица $X(k,\varepsilon)$, соответствующая возмущенной матрице $\mathcal{A}(k,\varepsilon)$ была найдена там же. Возмущение матрицы

$$Q(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10}\left(60+\varepsilon^2\right) & -9\,\varepsilon\left(-10+\varepsilon^2\right) & -30\,\varepsilon + 9\,\varepsilon^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

будем искать в виде

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) := Q(\varepsilon) + \varepsilon\,\Xi,\ \Xi \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Предполагая матрицу $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ невырожденной, находим

$$\Xi(\varepsilon) = R_1(\varepsilon)\cdot \check{J}_{\sigma_q}\cdot S_1(\varepsilon),\ \check{J}_{\sigma_q} := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_1 \end{pmatrix},$$

где

$$R_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -9\,\varepsilon\left(-10+\varepsilon^2\right) & -30\,\varepsilon + 9\,\varepsilon^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ S_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}\left(60+\varepsilon^2\right)}{90\,\varepsilon - 9\,\varepsilon^3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, находим невырожденную матрицу

$$\mathcal{Q}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10}\left(60+\varepsilon^2\right) & -9\,\varepsilon\left(-10+\varepsilon^2\right) & -30\,\varepsilon + 9\,\varepsilon^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

которая определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[f(s)\Big](0,\varepsilon)=\begin{pmatrix} -\frac{90+2\sqrt{10}\,\varepsilon+3\,\varepsilon^2}{3(60+\varepsilon^2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ G\Big[f(s)\Big](1,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{90+2\sqrt{10}\,\varepsilon+3\,\varepsilon^2}{3(60+\varepsilon^2)} \\ -\frac{\varepsilon\left(4\sqrt{10}+3\,\varepsilon\right)}{3(60+\varepsilon^2)} \end{pmatrix},$$

$$G\Big[f(s)\Big](2,\varepsilon)=\begin{pmatrix} -\frac{30+6\sqrt{10}\,\varepsilon+5\varepsilon^2}{60+\varepsilon^2} \\ \frac{180-18\sqrt{10}\,\varepsilon+7\varepsilon^2}{180+3\varepsilon^2} \\ \frac{540+9\sqrt{10}\,\varepsilon+7\varepsilon^2}{180+3\varepsilon^2} \end{pmatrix},\ G\Big[f(s)\Big](3,\varepsilon)=\begin{pmatrix} \frac{780-9\sqrt{10}\,\varepsilon+15\,\varepsilon^2}{60+\varepsilon^2} \\ -\frac{30+30\sqrt{10}\,\varepsilon+23\,\varepsilon^2}{60+\varepsilon^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

в свою очередь, определяемый оператором Грина задачи Коши для возмущенной системы разностных уравнений

$$K\Big[f(s)\Big](0,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ K\Big[f(s)\Big](1,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$K\Big[f(s)\Big](2,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 4 \\ 1-\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon \\ 3+\frac{\varepsilon}{\sqrt{10}} \end{pmatrix},\ K\Big[f(s)\Big](3,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 13-\frac{3\,\varepsilon}{\sqrt{10}} \\ 4-2\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon-\frac{3\,\varepsilon^2}{5} \\ 9+\sqrt{\frac{2}{5}}\,\varepsilon+\frac{3\,\varepsilon^2}{10} \end{pmatrix}.$$

Итак, найдено ограниченное решение $z(k,\varepsilon)$ регуляризованной краевой задачи (9) для линейной краевой задачи (10)

$$z(k,\varepsilon)=G\Big[f(s);\alpha\Big](k,\varepsilon),\ z(k,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

следовательно найдено ограниченное решение $z(k)$ линейной краевой задачи для вырожденной системы (10):

$$z(k):=G\Big[f(s);\alpha\Big](k,0),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3;$$

здесь

$$z(0)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ z(1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ z(2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ z(3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 26 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доказанная теорема обобщает соответствующие результаты [1] на случай необратимости матрицы $A(k)$. Кроме того, полученные результаты аналогично [10] могут быть использованы в теории устойчивости для систем разностных уравнений, а также аналогично [11, 12] — в теории нелинейных нетеровых краевых задач для систем разностных уравнений. Предложенная в статье схема исследования аналогично [11,13–15] может быть перенесена на нелинейные краевые задачи для систем разностных уравнений.

Цитированная литература

1. *Бойчук А.А.* Краевые задачи для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 832–835.
2. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
4. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
5. *Chuiko S.M., Chuiko E.V., Belushenko A.V.* On a regularization method for solving linear matrix equation // Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math. – 2014. – **1**. – P. 12–14.
6. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. 3 изд. – М.: Изд. МЦНМО, 2009. – 672 с.
7. *Чуйко С.М.* О понижении порядка в дифференциально алгебраической системе // Укр. мат. вестник. – 2018. – Т. 15, № 1. – С. 1–17.
8. *Chuiko S.M.* On a reduction of the order in a differential-algebraic system // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – V. 235, № 1. – P. 2–18.
9. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
10. *Коробов В.И., Бебия М.О.* Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 20–25.
11. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 pp.
12. *Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного разностного уравнения // Таврический вестник информатики и математики. – 2015. – № 1 (26). – С. 104–116.
13. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A.* On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – **214**. – P. 200–219.
14. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption // Israel Journal of Mathematics. – 2016. – **215**, № 1. – P. 163–179.
15. *Chuiko S.* Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – **17**, № 1. – P. 139–150.

References

1. Boichuk, A.A. (1997). Boundary value problems for systems of difference equations. *Ukr. mat. zhurn., 49*(6), 832-835 (in Russian).
2. Krein, S.G. (1971). *Linear equations in Banach space.* Moscow: Nauka (in Russian).
3. Tihonov, A.N., Arsenin, V.Ya. (1986). *Methods for solving incorrect problems.* Moscow: Nauka (in Russian).
4. Azbelev, N.V., Maksimov, V.P., Rahmatullina, L.F. (1991). *Introduction to the theory of functional differential equations.* Moscow: Nauka (in Russian).
5. Chuiko, S.M., Chuiko, E.V., Belushenko, A.V. (2014). On a regularization method for solving linear matrix equation. *Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math., 1*, 12-14.
6. Arnold, V.I., Varchenko, A.N., Guseyn-Zade, S.M. (2009). *Features of differentiable mappings.* 3rd ed. Moscow: Izd. MTsNMO (in Russian).
7. Chuiko, S.M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *Ukr. mat. vestnik, 15*(1), 1-17 (in Russian).
8. Chuiko, S.M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *J. Math. Sci., 235*(1), 2-18.

9. Voevodin, V.V., Kuznetsov, Yu.A. (1984). *Matrices and calculations.* Moscow: Nauka (in Russian).
10. Korobov, V.I., Bebiya, M.O. (2014). Stabilization of a class of nonlinear systems uncontrollable by the first approximation. *Dopovidi NAN Ukraini, 2*, 20-25 (in Russian).
11. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems* (2-th edition). Berlin; Boston: De Gruyter.
12. Chuiko, S.M. (2015). Generalized Green operator for a linear Fredholm boundary value problem for a matrix difference equation. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki, 1*(26), 104-116 (in Russian).
13. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2016). On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane. *J. Math. Sci., 214*, 200-219.
14. Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics, 215*(1), 163-179.
15. Chuiko, S. (2016). Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation. *Miskolc Mathematical Notes, 17*(1), 139-150.

S.M. Chuiko, E.V. Chuiko, Ya.V. Kalinichenko

On a regularization method for solving linear Noetherian boundary value problem for difference system.

The article proposes unusual regularization conditions as well as a scheme for finding bounded solutions of the linear Noetherian boundary value problem for a system of difference equations in the critical case, significantly using the Moore-Penrose matrix pseudo-inversion technology. The problem posed in the article continues the study of the a sufficient condition for solvability and regularization conditions for linear Noetherian boundary value problems in the critical case given in the monographs by A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin, S.G. Krein, A.M. Samoilenko, N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina and A.A. Boichuk. The general case is studied in which a linear bounded operator corresponding to a homogeneous part of a linear Noetherian boundary value problem has no inverse. The noninvertibility of the operators corresponding to a homogeneous part of a linear Noetherian boundary value problem is a consequence of the fact that the number of boundary conditions does not coincide with the number of unknown variables of the difference equations. Using the theory of generalized inverse operators and Moore-Penrose pseudoinverse matrix in the article, a generalized Green operator is constructed and the type of a linear perturbation of a regularized linear Noether boundary value problem for a system of difference equations in the critical case is found. The proposed regularization conditions, as well as the scheme for finding of bounded solutions to linear Noetherian boundary value problems for a system of difference equations in the critical case, are illustrated in details with examples. In contrast to the earlier articles of the authors, the regularization problem for a linear Noether boundary value problem for a system of difference equations in the critical case has been resolved constructively, and sufficient conditions has been obtained for the existence of a bounded solution to the regularization problem.

Keywords: *regularization, linear Noether boundary value problem, systems of difference equations.*

С.М. Чуйко, О.В. Чуйко, Я.В. Калиниченко

Про регуляризацію лінійної нетерової крайової задачі для системи різницевих рівнянь.

У статті запропоновано оригінальні умови регуляризації, а також схема знаходження розв'язків лінійної нетерової крайової задачі для системи різницевих рівнянь, при цьому істотно використано техніку псевдообернення матриць за Муром–Пенроузом. Поставлена в статті задача продовжує дослідження умов регуляризації лінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях А.М. Тихонова, В.Я. Арсеніна, С.Г. Крейна, М.В. Азбелева, А.М. Самойленка, Л.Ф. Рахматулліної та О.А. Бойчука. Досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, відповідний до однорідної частини лінійної нетерової крайової задачі, не має оберненого. У статті побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдений вигляд лінійного збурення регулярізованої лінійної крайової задачі для системи різницевих рівнянь. Запропоновані умови регуляризації, а також схема знаходження розв'язків лінійних нетерових крайових задач для системи різницевих рівнянь детально проілюстровано на прикладах. На відміну від попередніх статей авторів, задача про регуляризацію лінійної крайової задачі для системи різницевих рівнянь розв'язана конструктивно, причому отримані достатні умови існування розв'язку задачі про регуляризацію.

Ключові слова: *регуляризація, лінійна нетерова крайова задача, системи різницевих рівнянь.*

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
chujko-slav@inbox.ru, chujko-slav@ukr.net

Получено 22.11.2018

УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-15

©2018. **М.О. Шань**

АПРІОРНІ ОЦІНКИ ТИПУ КЕЛЛЕРА–ОССЕРМАНА ДЛЯ ДВІЧІ НЕЛІНІЙНИХ АНІЗОТРОПНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З АБСОРБЦІЄЮ

Отримано поточкові оцінки зверху для розв'язків двічі нелінійних анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом, які виражені у термінах відстані до межі. Оцінки такого типу беруть свій початок в роботах Дж. Б. Келлера, Р. Оссермана і мають значення для так званих великих розв'язків.

MSC: 35B45.

Ключові слова: *апріорні оцінки, анізотропні параболічні рівняння.*

1. Вступ.

У даній статті отримано апріорні оцінки типу Келлера–Оссермана для невід'ємних розв'язків анізотропних параболічних рівнянь з абсорбційним членом. Такі оцінки мають важливе значення в теорії існування і неіснування так званих великих розв'язків, ініційованих К. Бандле і М. Маркусом [1], а також у задачах регулярності, усувності ізольованих особливостей.

Відмітимо, що перші оцінки такого типу були зроблені для рівняння p-Лапласу з абсорбційним членом

$$\triangle_p u = u^q,\ x \in \Omega \subset R^n,\ q > p-1$$

Дж. Келлером [2] і Р. Оссерманом [3] при $p = 2$, і розповсюджені на випадок, коли $p \neq 2$ Д. Васкесом [4]: будь-який невід'ємний розв'язок $u \in C^2(\Omega)$ задовольняє нерівності

$$u(x) \leq c\, dist(x, \partial\Omega)^{-\frac{p}{q-p+1}},\ f(u) = u^q,$$

де $dist(x, \partial\Omega)$ відстань до межі і $c = c(p, q, n)$.

Відомо, що такі оцінки для розв'язків еліптичних і параболічних рівнянь пов'язані з рівняннями, для яких мають місце теореми порівняння. Для ознайомлення з результатами дивіться [5–8] і на посилання в них. Анізотропні еліптичні та параболічні рівняння були об'єктом дослідження невеликої кількості робіт, оскільки для них немає принципу порівняння, і основні роботи стосуються рівнянь тільки з конкретним членом абсорбції, а саме $f(u) = u^q$ (див. [9–18]). Взагалі анізотропні рівняння мало вивчені, якісна теорія для них не побудована, тому останнім часом зростає зацікавленість в дослідженні якісних властивостей розв'язків цих рівнянь.

Роботу виконано за підтримки гранту 0118U003138 Міністерства освіти і науки України.

2. Постановка задачі і основний результат.

В обмеженій області $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ розглянемо невід'ємні розв'язки квазілінійного параболічного рівняння другого порядку у дивергентному вигляді

$$u_t - divA(x,t,u,\nabla u) + a_0(u) = 0,\ (x,t) \in \Omega_T. \tag{1}$$

На коефіцієнти рівняння $A = (a_1, ..., a_n)$ і a_0 будемо накладати наступні умові

- $A = (a_1, ..., a_n)$ і a_0 задовольняють умові Каратеодорі
- $$A(x,t,u,\xi)\xi \geq \nu_1 \sum_{i=1}^{n} |u|^{(m_i-1)(p_i-1)} |\xi_i|^{p_i},$$
$$|a_i(x,t,u,\xi)| \leq \nu_2 u^{(m_i-1)\frac{p_i-1}{p_i}} \left(\sum_{j=1}^{n} |u|^{(m_j-1)(p_j-1)} |\xi_j|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p_i}},\ i = \overline{1,n}, \tag{2}$$
$$a_0(u) \geq \nu_1 f(u),$$

  де ν_1, ν_2 додатні сталі , $f(u)-$ неперервна, додатня функція та для показників m_i, p_i справедливі нерівності

$$2 < p_1 \leq ... \leq p_n,\ \min_{1\leq i\leq n} m_i > 1,\ \max_{1\leq i\leq n} m_i(p_i - 1) \leq 1 + \frac{\kappa}{n},\ p < n, \tag{3}$$

  де $\kappa = n(p(m-d) - 1) + p$, $d = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m_i}{p_i}$.

Не втрачаючи спільності, будемо вважати, що $m_n = \max\limits_{1\leq i\leq n} m_i$.

Введемо необхідні означення.

Означення 1. Будемо казати, що функція φ належить простору $V_{p,m}(\Omega_T)$, якщо $\varphi \in C(0,T,L^2(\Omega))$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_T} |\varphi|^{(m_i-1)(p_i-1)} |\varphi_{x_i}|^{p_i}\, dxdt < \infty$.

Означення 2. Будемо казати, що $u-$ слабкий розв'язок рівняння (1), якщо $u \in V_{p,m}(\Omega_T)$ і для будь-якого інтервалу $(t_1, t_2) \subset (0,T)$ справедлива інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega} u\varphi dx \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \{-u\varphi_t + A(x,t,u,\nabla u)\nabla\varphi + a_0(u)\varphi\}\, dx\, dt = 0 \tag{4}$$

для всіх $\varphi \in \overset{o}{V}_{p,m}(\Omega_T)$.

Зауваження 1. Умова (3) гарантує локальну обмеженість слабкого розв'язку рівняння (1) ([19]).

Для формулювання головного результата введемо наступні позначення. Зафіксуємо довільну точку $(x^{(0)},t^{(0)}) \in \Omega_T$, для будь-яких $\tau,\theta_1,\theta_2,...,\theta_n > 0$, $\theta = (\theta_1,...,\theta_n)$ визначемо циліндри $Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)}) := \{(x,t) : |t-t^{(0)}| < \tau,\ |x_i - x_i^{(0)}| < \theta_i,\ i=\overline{1,n}\}$ і позначемо $M(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)})} u$, $\delta(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)})} \delta(u)$, $\Phi(\theta,\tau) := \sup\limits_{Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)})} \Phi(u)$, $\Phi(u) = \int\limits_0^u g(s)ds$, $g(s) = s^{m_n-1}f(s)$.

Теорема 1. *Нехай виконані умови* (2), (3) *і* $u-$ *невід'ємний слабкий розв'язок рівняння* (1), *припустимо також, що* $f \in C^1(R^1_+)$ *і* $f'(u) \geq 0$. *Зафіксуємо точку* $(x^{(0)},t^{(0)}) \in \Omega_T$ *і нехай* $\sigma \in (0,1)$, $\tau \in (0, \min(\theta_n^{p_n}, t^{(0)}, T - t^{(0)}))$, $\theta_i \in (0,\theta_n)$ *для* $i \in I' = \{i = \overline{1,n} : m_i(p_i - 1) < m_n(p_n-1)\}$ *і* $\theta_i = \theta_n$ *для* $i \in I'' = \{i=\overline{1,n} : m_i(p_i-1) = m_n(p_n-1)\}$. *Тоді існують додатні сталі* c_1, c_2, *які залежать лише від* $n,\nu_1,\nu_2,m_1,...,m_n,p_1,...,p_n$, *що виконується*

$$u(x^{(0)},t^{(0)}) \leq (\tau^{-1}\rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}} + \sum_{i\in I'} (\theta_i^{-1}\theta_n^{\frac{p_n}{p_i}})^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}}, \tag{5}$$

або

$$\Phi(\sigma\theta,\sigma\tau) \leq c_1(1-\sigma)^{-c_2}\theta_n^{-p_n}\delta(\theta,\tau)M^{m_np_n-1}(\theta,\tau). \tag{6}$$

У випадку, коли I' *пуста множина, тобто* $m_1(p_1-1) = m_2(p_2-1) = ... = m_n(p_n-1)$, *або справедлива оцінка*

$$u(x^{(0)},t^{(0)}) \leq (\tau^{-1}\theta_n^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}}, \tag{7}$$

або (5) *має місце.*

3. Доведення основного результату.

3.1 Допоміжний матеріал

Лема 1. ([20]) *Нехай* $\Omega \in R^n$, $n \geq 2$ *обмежена множина,* $u \in \overset{o}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, *тоді справедлива наступна нерівність*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \gamma \prod_{i=1}^n \left(\int\limits_\Omega |u_{x_i}| dx \right)^{\frac{1}{n}},\ q = \frac{n}{n-1},$$

де додатня стала γ *залежить лише від* n.

Лема 1. ([21]) *Нехай для послідовності невід'ємних чисел* $\{y_j\}_{j\in N}$, $j = 0,1,2,...$ *виконується нерівність*

$$y_{j+1} \leq Cb^j y_j^{1+\varepsilon},$$

де $\varepsilon, C > 0, b > 1$. *Тоді справедлива оцінка*

$$y_j \le C^{\frac{(1+\varepsilon)^j - 1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^j - 1}{\varepsilon^2} - \frac{j}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^j}.$$

Зокрема, якщо $y_0 \le C^{-\frac{1}{\varepsilon}} b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}$, *тоді* $\lim\limits_{j\to\infty} y_j = 0$.

3.2 Допоміжні результати

Зафіксуємо довільну точку $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T$, для будь-яких $\eta_1, ..., \eta_n > 0, \eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ і $s > 0$ визначемо циліндри $Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t}) := Q_\eta(\bar{x}) \times (\bar{t} - s, \bar{t} + s)$, щоб $Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t}) \subset \Omega_T$ через ζ позначемо невід'ємну кусково-гладку функцію, що обертається в 0 на параболічній межі $Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t})$. Будемо вважати, що

$$2 < p_1 \le ... \le p_{n-1} < p_n, \ \min_{1\le i\le n} m_i > 1, \ m_n(p_n - 1) \le 1 + \frac{\kappa}{n}, \ p < n. \tag{8}$$

Через γ позначемо сталу, яка залежить тільки від $n, \nu_1, \nu_2, p_1, ..., p_n, m_1, ..., m_n$ і змінюється від рядка до рядка.

Лема 3. *Нехай u — невід'ємний слабкий розв'язок рівняння (1) і нехай виконані умови (2), (3). Тоді для кожного циліндру $Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t}) \subset \Omega_T$ і для кожної додатньої сталої k виконується нерівність*

$$\sup_{|t-\bar{t}|<s} \int\limits_{Q_\eta(\bar{x})} (\Phi(u) - k)_+^2 \zeta^{p_n} dx + \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{A_{k,\eta,s}} g^2(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i} \zeta^{p_n} dxdt +$$
$$+ \iint\limits_{A_{k,\eta,s}} f(u) g(u) (\Phi(u) - k)_+ \zeta^{p_n} dxdt \le \gamma \iint\limits_{A_{k,\eta,s}} (\Phi(u) - k)_+^2 |\zeta_t| \zeta^{p_n - 1} dxdt +$$

$$+\gamma \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{A_{k,\eta,s}} (\Phi(u) - k)_+^2 \delta^{p_i - 2}(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |\zeta_{x_i}|^{p_i} dxdt, \tag{9}$$

де $A_{k,\eta,s} = \{(x,t) \in Q_{\eta,s}(\bar{x}, \bar{t}) : \Phi(u) > k\}$.

Доведення. В інтегральну тотожність (4) підставимо пробну функцію $\varphi =$

$(\Phi(u)-k)_+ g(u)\zeta^p$. Застосувавши умову (2), отримаємо

$$\sup_{|t-\bar t|<s}\int\limits_{Q_\eta(\bar x)}(\Phi(u)-k)_+^2\zeta^{p_n}dx+\iint\limits_{A_{k,\eta,s}}f(u)g(u)(\Phi(u)-k)_+\zeta^{p_n}dxdt+$$
$$+\sum_{i=1}^n\iint\limits_{A_{k,\eta,s}}\left(g^2(u)+g'(u)(\Phi(u)-k)_+\right)u^{(m_i-1)(p_i-1)}|u_{x_i}|^{p_i}\zeta^{p_n}dxdt\le$$
$$\le\gamma\iint\limits_{A_{k,\eta,s}}(\Phi(u)-k)_+^2|\zeta_t|\zeta^{p_n-1}dxdt+$$
$$+\gamma\sum_{i=1}^n\iint\limits_{A_{k,\eta,s}}\left(\sum_{j=1}^n g^2(u)u^{(m_j-1)(p_j-1)}|u_{x_j}|^{p_j}\zeta^{p_n}\right)^{1-\frac{1}{p_i}}\times$$
$$\times g^{\frac{2}{p_i}-1}(u)u^{(m_i-1)\frac{p_i-1}{p_i}}(\Phi(u)-k)_+|\zeta_{x_i}|\zeta^{\frac{p_n}{p_i}-1}dxdt.$$

З останньої формули, використовуючи нерівність Юнга і очевидну нерівність $\frac{\Phi(u)}{g(u)}\le\delta(u)$, приходимо до оцінки (9). $\square$

3.3 Доведення Теореми 1

Розглянемо циліндр $Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)})$ і нехай $(\bar x,\bar t)$ довільна точка у $Q_{\sigma\theta,\sigma\tau}(x^{(0)},t^{(0)})$. Якщо $u(x^{(0)},t^{(0)})\ge(\tau^{-1}\rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\theta_i^{-1}\rho^{\frac{p_n}{p_i}}\right)^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}}$, тоді $M(\theta,\tau)=\max(M(\theta,\tau),\delta(\theta,\tau))\ge(\tau^{-1}\rho^{p_n})^{\frac{1}{m_n(p_n-1)-1}}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\theta_i^{-1}\rho^{\frac{p_n}{p_i}}\right)^{\frac{p_i}{m_n(p_n-1)-m_i(p_i-1)}}$, і отже $Q_{\eta,s}(\bar x,\bar t)\subset Q_{\theta,\tau}(x^{(0)},t^{(0)})$, де $s=(1-\sigma)\theta_n^{p_n}M^{1-m_n(p_n-1)}(\theta,\tau)$, $\eta_i=(1-\sigma)\theta_n^{\frac{p_n}{p_i}}M^{m_i(p_i-1)-m_n(p_n-1)}$ (θ,τ), $i=\overline{1,n}$. Для фіксованої сталої $k>0$ і $l,j=0,1,2...$ визначемо $\alpha_l=\frac14(1+2^{-1}+...+2^l)$, $\eta_{i,j,l}=(\alpha_l+\frac14 2^{-j-l-1})\eta_i$, $i=\overline{1,n}$, $\eta_{j,l}=(\eta_{1,j,l},...,\eta_{n,j,l})$, $s_{j,l}=(\alpha_l+\frac14 2^{-j-l-1})s$, $k_j=k(1-2^{-j})$, $Q_{j,l}=Q_{\eta_{j,l},s_{j,l}}(\bar x,\bar t)$, $A_{k_j,j,l}=\{(x,t)\in Q_{j,l}: F(u)>k_j\}$. Let $\zeta_j\in C_0^\infty(Q_{j,l})$, $0\le\zeta_j\le1$, $\zeta_j=1$ in $Q_{j+1,l}$, $\left|\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}\right|\le\gamma2^{j+l-1}\eta_i$, $i=\overline{1,n}$, $\left|\frac{\partial\zeta_j}{\partial t}\right|\le\gamma2^{j+l}s^{-1}$.

Застосувавши нерівність Гьольдера і Лему 1, отримаємо

$$\iint\limits_{A_{k_{j+1},j+1,l}}(\Phi(u)-k_{j+1})_+^2dxdt\le$$
$$\le\left(\iint\limits_{A_{k_{j+1},j+1,l}}\left(\Phi(u)-k_{j+1})_+^2\zeta_j^{p_n}\right)^{\frac{n+1}{n}}dxdt\right)^{\frac{n}{n+1}}|A_{k_{j+1},j+1,l}|^{\frac{1}{n+1}}\le$$

$$\leq \gamma \left(\sup_{|t-\bar{t}|<s_{j,l}} \int\limits_{Q_{\eta_j,l}(\bar{x})} (\Phi(u)-k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} dx \right)^{\frac{1}{n+1}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \left(\iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} \left| \left((\Phi(u)-k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} \right)_{x_i} \right| dxdt \right)^{\frac{n}{n+1}} |A_{k_{j+1},j,l}|^{\frac{1}{n+1}} \qquad (10)$$

Використовуючи нерівність $\Phi(u)-k_j \geq \frac{k}{2^{j+1}}$, яка справедлива на множині $A_{k_{j+1},j,l}$, $\frac{\Phi(u)}{g(u)} \leq \delta(u)$, оцінимо другий доданок у правій частині (10):

$$\iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} \left| \left((\Phi(u)-k_{j+1})_+^2 \zeta_j^{p_n} \right)_{x_i} \right| dxdt \leq \gamma \iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} g(u)(\Phi(u)-k_{j+1})_+ |u_{x_i}| \zeta_j^{p_n} dxdt +$$

$$+ \gamma \iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} (\Phi(u)-k_{j+1})_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| \zeta_j^{p_n-1} dxdt \leq$$

$$\leq \gamma 2^{j\gamma} k^{-\frac{p_i-1}{p_i}} \left(\iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} g^2(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i} \zeta_j^{p_n} dxdt \right)^{\frac{1}{p_i}} \times$$

$$\times \left(\iint\limits_{A_{k_{j+1},j,l}} \left(\frac{\Phi(u)}{g(u)} \right)^{\frac{p_i}{p_i-1}} g(u) u^{m_n-m_i} f(u) (\Phi(u)-k_j)_+ \zeta_j^{p_n} dxdt \right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} +$$

$$+ \gamma \iint\limits_{A_{k_j,j,l}} (\Phi(u)-k_j)_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| \zeta_j^{p_n-1} dxdt \leq$$

$$\leq \gamma 2^{j\gamma} k^{-\frac{p_i-1}{p_i}} \delta(\theta,\tau) M^{\frac{m_n-m_i}{p_i}(p_i-1)}(\theta,\tau) \left(\iint\limits_{A_{k_j,j,l}} g^2(u) u^{(m_i-1)(p_i-1)} |u_{x_i}|^{p_i} \zeta_j^{p_n} dxdt \right)^{\frac{1}{p_i}} \times$$

$$\times \left(\iint\limits_{A_{k_j,j,l}} g(u) f(u) (\Phi(u)-k_j)_+ \zeta_j^{p_n} dxdt \right)^{1-\frac{1}{p_i}} + \gamma \iint\limits_{A_{k_j,j,l}} (\Phi(u)-k_j)_+^2 \left| \frac{\partial \zeta_j}{\partial x_i} \right| dxdt \qquad (11)$$

Обираючи k з умови

$$k \geq \theta_n^{-p_n} \delta(\theta,\tau) M^{m_n p_n - 1}(\theta,\tau),$$

та використовуючи Лему 3, з (10), (11) маємо

$$y_{j+1,l} = \iint\limits_{A_{k_{j+1},j+1,l}} (\Phi(u) - k_{j+1})_+^2 dxdt \leq \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} 2^{(j+l)\gamma} k^{-\frac{2}{n+1}} |Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})|^{-\frac{1}{n+1}} y_{j,l}^{1+\frac{1}{n+1}}.$$

Нехай $Q_l = Q_{\alpha_l\eta,\alpha_l s}, \Phi_l = \sup\limits_{Q_l} \Phi(u)$, з Леми 2 випливає, що $y_{j,l} \to 0$, коли $j \to \infty$, за умови, що k задовольняє рівності

$$k^2 = \gamma(1-\sigma)^{-\gamma} 2^{\gamma l} \left|Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})\right|^{-1} \iint\limits_{Q_{l+1}} \Phi^2(u) dxdt.$$

Якщо $\varepsilon \in (0,1)$, тоді з попередньої нерівності отримаємо

$$\Phi_l \leq \gamma\theta_n^{-p_n}\delta(\theta,\tau)M^{m_n p_n - 1}(\theta,\tau) +$$

$$+ \gamma(1-\sigma)^{-\gamma}2^{\gamma l}\delta^{\frac{1}{2}}(\theta,\tau)M^{\frac{m_n-1}{2}}(\theta,\tau)\Phi_{l+1}^{\frac{1}{2}} \left|Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})\right|^{-\frac{1}{2}} \left(\iint\limits_{Q_{\frac{\eta}{2},\frac{s}{2}}(\bar{x},\bar{t})} f(u)dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \varepsilon\Phi_{l+1} + \gamma\theta_n^{-p_n}\delta(\theta,\tau)M^{m_n p_n - 1}(\theta,\tau) +$$

$$+ \gamma\varepsilon^{-1}(1-\sigma)^{-\gamma}2^{\gamma l}\delta(\theta,\tau)M^{m_n-1}(\theta,\tau) \left|Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})\right|^{-1} \iint\limits_{Q_{\frac{\eta}{2},\frac{s}{2}}(\bar{x},\bar{t})} f(u)dxdt,\ l = 0,1,2...$$

З цього за допомогою ітерацій приходимо до оцінки

$$\Phi(u(\bar{x},\bar{t})) \leq \Phi_0 \leq \varepsilon^l\Phi_l + \gamma\varepsilon^{-1}\sigma^{-\gamma}\sum_{i=0}^{l-1}(\varepsilon 2^\gamma)^i \times$$

$$\times \left(\theta_n^{-p_n}\delta(\theta,\tau)M^{m_n p_n - 1}(\theta,\tau) + \delta(\theta,\tau)M^{m_n-1}(\theta,\tau) \left|Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})\right|^{-1} \iint\limits_{Q_{\frac{\eta}{2},\frac{s}{2}}(\bar{x},\bar{t})} f(u)dxdt \right),$$

для кожного $l \geq 1$.

Оберемо $\varepsilon = 2^{-\gamma-1}$, щоб сума у правій частині була збіжним рядом, коли $l \to \infty$:

$$\Phi(u(\bar{x},\bar{t})) \leq \gamma(1-\sigma)^{-\gamma}\theta_n^{-p_n}\delta(\theta,\tau)M^{m_n p_n - 1}(\theta,\tau)dxdt +$$

$$+\gamma(1-\sigma)^{-\gamma}\delta(\theta,\tau)M^{m_n-1}(\theta,\tau) \left|Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})\right|^{-1} \iint\limits_{Q_{\frac{\eta}{2},\frac{s}{2}}(\bar{x},\bar{t})} f(u)dxdt. \tag{12}$$

Нехай $\xi \in C_0^\infty(Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})), 0 \le \xi \le 1, \xi = 1$ у $Q_{\frac{\eta}{2},\frac{s}{2}}(\bar{x},\bar{t})$, $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\right| \le \gamma\eta_i^{-1}, i = \overline{1,n}$, $\left|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right| \le \gamma s^{-1}$. Щоб оцінити інтеграл у правій частині формули (12), у інтегральну тотожність (4) підставимо функцію $\varphi = \frac{u}{u+\varepsilon}\xi^{p_n}$. Використовуючи умову (2), нерівність Гьольдера і переходячи до границі, коли $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} f(u)\xi^{p_n}dxdt \le \gamma \iint\limits_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} u|\xi_t|\xi^{p_n-1}dxdt+$$

$$+\gamma\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\iint\limits_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})}|u_{x_i}|^{p_j}\xi^{p_n}dxdt\right)^{1-\frac{1}{p_i}}\left(\iint\limits_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})}|\xi_{x_i}|^{p_i}dxdt\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Тепер підставляючи в інтегральну тотожність (4) пробну функцію $\varphi = u\xi^{p_n}$, використовуючи умову (2) і нерівність Юнга, маємо

$$\iint\limits_{Q_{\eta,s}(\bar{x},\bar{t})} f(u)\xi^{p_n}dxdt \le \gamma M(\theta,\tau)|Q_\eta(\bar{x})|. \tag{13}$$

Комбінуючи нерівності (12), (13), приходимо до оцінки

$$\Phi(u(\bar{x},\bar{t})) \le \gamma\sigma^{-\gamma}\theta_n^{-p_n}\delta(\theta,\tau)M^{m_n p_n-1}(\theta,\tau). \tag{14}$$

Оскільки $(\bar{x},\bar{t})$ була довільна точка з циліндру $Q_{\sigma\theta,\sigma\tau}(x^{(0)},t^{(0)})$, тоді з нерівності (14) виходить необхідна оцінка (6), що доводить Теорему 1.

Цитована література

1. *Bandle K., Marcus M.* Large solutions of semilinear elliptic equations: Existence, uniqueness and asymptotic behavior // Jl. d'Anal. Math. – 1992. – V. 58. – P. 9–24.
2. *Keller J.B.* On the solutions of $\triangle u = f(u)$ // Comm. Pure Applied Math. – 1957. – V. 10. – P. 503–510.
3. *Osserman R.* On the inequality $-\triangle u \ge f(u)$ // Pacific J. Math. – 1957. – V. 7, N. 4. – P. 1641–1647.
4. *Vazquez J.L.* An a priori interior estimate for the solutions of a nonlinear problem representing weak diffusion // Nonlinear Anal. – 1981. – V. 5. – P. 95–103.
5. *Kovalevsky A.A., Skrypnik I.I., Shishkov A.E.* Singular Solutions of Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations, De Gruyter,Series in Nonl.Analysis and Applications, Berlin, 2016.
6. *Marcus M., Veron L.* Nonlinear second order elliptic equations involving measures, Berlin, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2014.
7. *Radulescu V.D.* Singular phenomena in nonlinear elliptic problems: from blow-up boundary solutions to equations with singular nonlinearities // Handb. Differ. Equat., North-Holland, Amsterdam. – 2007. – P. 485–593.
8. *Veron L.* Singularities of Solution of Second Order Quasilinear Equations, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman, Harlow, 1996.
9. *Cirstea F.C., Vetois J.* Fundamental solutions for anisotropic elliptic equations: existence and a priori estimates // Comm. PDE. – 2015. – V. 40, N. 4. – P. 727–767.

10. *Garcia-Melian J., Rossi J.D., Sabina de Lis J.C.* Large solutions to an anisotropic quasilinear elliptic problem // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 2010. – V. 189. – P. 689–712.
11. *Namlyeyeva Yu.V., Shishkov A.E., Skrypnik I.I.* Isolated singularities of solutions of quasilinear anisotropic elliptic equations // Adv. Nonlinear Stud. – 2006. – V. 6. – P. 617–641.
12. *Namlyeyeva Yu.V., Shishkov A.E., Skrypnik I.I.* Removable isolated singularities for solutions of doubly nonlinear anisotropic parabolic equations // Applicable Analysis. – 2010. – V. 10 – P. 1559–1574.
13. *Skrypnik I.I.* Removability of an isolated singularity for anisotropic elliptic equations with absorption // Mat. Sb. – 2008. – V. 199, N. 7. – P. 85–102.
14. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularity for anisotropic parabolic equations with absorption // Manuscr. Math. – 2013. – V. 140. – P. 145–178.
15. *Skrypnik I.I.* Removable singularities for anisotropic elliptic equations // Potential Anal. – 2014. – V. 41. – P. 1127–1145.
16. *Vetois J.* Strong maximum principles for anisotropic elliptic and parabolic equations // Advanced Nonlinear Studies. – 2016. – V. 12. – P. 101–114.
17. *Vetois J.* A priori estimates for solutions of anisotropic elliptic equations // Nonlin. Anal. – 2009. – V. 71, N. 9. – P. 3881–3905.
18. *Vetois J.* The blow-up of critical anisotropic equations with critical directions // Nonlinear Differ. Equ. Appl. – 2011. – V. 18. – P. 173–197.
19. *Kolodij I.M.* On boundedness of generalized solutions of parabolic differential equations // Vestnik Moskov. Gos. Univ. – 1971. – V. 5. – P. 25–31.
20. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Изд. 2-е, перераб. – Москва : Наука, 1973. – 576 с.
21. *DiBenedetto E.* Degenerate Parabolic Equations. Universitext, Springer–Verlag, New York, 1993.

References

1. Bandle, K., Marcus, M. (1992). Large solutions of semilinear elliptic equations: Existence, uniqueness and asymptotic behavior. *J. d'Anal. Math., 58*, 9-24.
2. Keller, J.B. (1957). On the solutions of $\triangle u = f(u)$. *Comm. Pure Applied Math., 10*, 503-510.
3. Osserman, R. (1957). On the inequality $-\triangle u \geq f(u)$. Pacific J. Math., 7(4), 1641-1647.
4. Vazquez, J.L. (1981). An a priori interior estimate for the solutions of a nonlinear problem representing weak diffusion. *Nonlinear Anal., 5*, 95-103.
5. Kovalevsky, A.A., Skrypnik, I.I., Shishkov, A.E. (2016). *Singular solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations.* Series in Nonl.Analysis and Applications, Berlin: De Gruyter.
6. Marcus, M., Veron, L. (2014). *Nonlinear second order elliptic equations involving measures.* Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG.
7. Radulescu, V.D. (2007). Singular phenomena in nonlinear elliptic problems: from blow-up boundary solutions to equations with singular nonlinearities. In *Handb. Differ. Equat.* (pp. 485-593), Amsterdam: North-Holland.
8. Veron, L. (1996). *Singularities of Solution of Second Order Quasilinear Equations.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman, Harlow.
9. Cirstea, F.C., Vetois, J. (2015). Fundamental solutions for anisotropic elliptic equations: existence and a priori estimates. *Comm. PDE., 40*(4), 727-767.
10. Garcia-Melian, J., Rossi, J.D., Sabina de Lis, J.C. (2010). Large solutions to an anisotropic quasilinear elliptic problem. *Annali di Matematica Pura ed Applicata, 189*, 689-712.
11. Namlyeyeva, Yu.V., Shishkov, A.E., Skrypnik, I.I. (2006). Isolated singularities of solutions of quasi-linear anisotropic elliptic equations. *Adv. Nonlinear Stud., 6*, 617-641.
12. Namlyeyeva, Yu.V., Shishkov, A.E., Skrypnik, I.I. (2010). Removable isolated singularities for solutions of doubly nonlinear anisotropic parabolic equations. *Applicable Analysis, 10*, 1559-1574.

13. Skrypnik, I.I. (2008). Removability of an isolated singularity for anisotropic elliptic equations with absorption. *Mat. Sb., 199*(7), 85-102.
14. Skrypnik, I.I. (2013). Removability of isolated singularity for anisotropic parabolic equations with absorption. *Manuscr. Math., 140*, 145-178.
15. Skrypnik, I.I. (2014). Removable singularities for anisotropic elliptic equations. *Potential Anal., 41*, 1127-1145.
16. Vetois, J. (2016). Strong maximum principles for anisotropic elliptic and parabolic equations. *Advanced Nonlinear Studies, 12*, 101-114.
17. Vetois, J. (2009). A priori estimates for solutions of anisotropic elliptic equations. *Nonlin. Anal., 71*(9), 3881-3905.
18. Vetois, J. (2011). The blow-up of critical anisotropic equations with critical directions. *Nonlinear Differ. Equ. Appl., 18*, 173-197.
19. Kolodij, I.M. (1971). On boundedness of generalized solutions of parabolic differential equations. *Vestnik Moskov. Gos. Univ., 5*, 25-31.
20. Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N. (1968). *Linear and quasilinear elliptic equations.* New York: Academic Press (in Russian).
21. DiBenedetto, E. (1993). *Degenerate Parabolic Equations.* Universitext, New York: Springer-Verlag.

M.A. Shan

Keller-Osserman a priori estimates for doubly nonlinear anisotropic parabolic equations with absorption term.

We are concerned with divergence type quasilinear parabolic equation with measurable coefficients and lower order terms model of which is a doubly nonlinear anisotropic parabolic equations with absorption term. This class of equations has numerous applications which appear in modeling of electrorheological fluids, image precessing, theory of elasticity, theory of non-Newtonian fluids with viscosity depending on the temperature. But the qualitative theory doesn't construct for these anisotropic equations. So, naturally, that during the last decade there has been growing substantial development in the qualitative theory of second order anisotropic elliptic and parabolic equations. The main purpose is to obtain the pointwise upper estimates in terms of distance to the boundary for nonnegative solutions of such equations. This type of estimates originate from the work of J. B. Keller, R. Osserman, who obtained a simple upper bound for any solution, in any number of variables for Laplace equation. These estimates play a crucial role in the theory of existence or nonexistence of so called large solutions of such equations, in the problems of removable singularities for solutions to elliptic and parabolic equations. Up to our knowledge all the known estimates for large solutions to elliptic and parabolic equations are related with equations for which some comparison properties hold. We refer to I.I. Skrypnik, A.E. Shishkov, M. Marcus , L. Veron, V.D. Radulescu for an account of these results and references therein. Such equations have been the object of very few works because in general such properties do not hold. The main ones concern equations only in the precise choice of absorbtion term $f(u) = u^q$. Among the people who published significative results in this direction are I.I. Skrypnik, J. Vetois, F.C. Cirstea, J. Garcia-Melian, J.D. Rossi, J.C. Sabina de Lis. The main result of the paper is a priori estimates of Keller-Osserman type for nonnegative solutions of a doubly nonlinear anisotropic parabolic equations with absorption term that have been proven despite of the lack of comparison principle. To obtain these estimates we exploit the method of energy estimations and De Giorgy iteration techniques.

Keywords: *a priori estimates, anisotropic parabolic equations.*

М.А. Шань

Априорные оценки типа Келлера-Оссермана для дважды нелинейных анизотропных параболических уравнений с абсорбцией.

Получены поточечные оценки сверху для решений дважды нелинейных анизотропных параболических уравнений с абсорбционным членом в терминах расстояния до границы. Оценки такого типа берут свое начало в работах Дж. Келлера, Р. Оссермана и имеют значение для так называемых больших решений.

Ключевые слова: *априорные оценки, анизотропные параболические уравнения.*

Донецький національний університет імені Василя Стуса,
Вінниця
`shan_maria@ukr.net`

Отримано 25.09.18

УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-16

©2018. **В.С. Шпаківський**

ГІПЕРКОМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

В даній роботі пропонується процедура побудови нескінченної кількості сімейств розв'язків заданих лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. При цьому використовуються моногенні (тобто неперервні і диференційовні в сенсі Гато) функції, що визначені на певних послідовностях комутативних асоціативних алгебр над полем комплексних чисел. Для досягнення цієї мети, спочатку вивчаються розв'язки, так званого, характеристичного рівняння на заданій послідовності алгебр. Далі вивчаються моногенні функції на послідовності алгебр та досліджується їх зв'язок з розв'язками рівняннь в частинних похідних. Запропонований метод застосовано до побудови розв'язків деяких рівнянь математичної фізики. Зокрема, для тривимірних рівняння Лапласа та хвильового рівняння, для рівняння поперечних коливань пружного стержня та спряженого з ним, узагальненого бігармонічного рівняння та двовимірного рівняння Гельмгольца.

MSC: 30G35, 57R35.

Ключові слова: *комутативна асоціативна алгебра, моногенна функція, характеристичне рівняння, розширення комутативної алгебри.*

1. Вступ.

Нехай $\mathbb{A}$ — n-вимірна комутативна асоціативна алгебра над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ і нехай $e_1, e_2, \dots, e_d$ — набір векторів в $\mathbb{A}$, де нутуральне число $d \geq 2$. Позначимо $\zeta := x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$, де $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ і визначимо на алгебрі $\mathbb{A}$ експоненціальну функцію $\exp\zeta$ у вигляді суми абсолютно збіжного ряду

$$\exp\zeta := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\zeta^r}{r!}\,. \tag{1}$$

Похідна від функції $\Phi(\zeta) = \exp\zeta$ розуміється як формальна похідна ряду (1). Як наслідок, $\frac{\partial}{\partial x_j}\exp\zeta = e_j \exp\zeta$, $j = 1, 2, \dots, d$.

Нехай $\mathbb{Z}^+ := \{0, 1, 2, \dots\}$. Позначимо $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+$, $j = 1, 2, \dots, d$, і $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$. Розглянемо загальне лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$E(u) := E_0(u) + E_1(u) + \cdots + E_p(u) = 0, \tag{2}$$

де

$$E_k(u) := \sum_{\alpha:|\alpha|=k} C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_d}\, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\,, \quad C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_d} \in \mathbb{R}.$$

Внаслідок рівності

$$E(u) = (E_0^* + E_1^* + \cdots + E_p^*) \exp \zeta,$$

де

$$E_k^* := \sum_{\alpha:|\alpha|=k} C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d} \, e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \cdots e_d^{\alpha_d},$$

функція $\exp \zeta$ задовольняє рівняння (2), якщо вектори $e_1, e_2, \ldots, e_d$ задовольняють *характеристичне* рівняння

$$E_0^* + E_1^* + \cdots + E_p^* = 0. \tag{3}$$

Оскільки рівняння (2) лінійне, то всі комплекснозначні компоненти розкладу функції $\exp \zeta$ за базисом алгебри $\mathbb{A}$ також є його розв'язками.

Якщо ж рівняння (2) має вигляд

$$E_p(u) = 0, \tag{4}$$

то, очевидно, що при виконанні умови $E_p^*(u) = 0$ не лише $\exp \zeta$ є розв'язком рівняння (4), але й довільна $\mathbb{A}$-значна аналітична функція Φ змінної ζ. Аналогічно, усі комплекснозначні компоненти розкладу функції Φ за базисом алгебри $\mathbb{A}$ також є розв'язками рівняння (4).

Такий підхід до побудови розв'язків заданих диференціальних рівнянь в частинних похідних використовувався в багатьох роботах, зокрема в роботах [1–14].

Таким чином, маємо дві задачі. Задача (З 1) — описати всі набори векторів $e_1, e_2, \ldots, e_d$, які задовольняють характеристичне рівняння (3) (або вказати процедуру за якою вони знаходяться), а друга задача (З 2) — описати всі компоненти аналітичної функції. Зокрема, для рівняння (4) — описати компоненти функції $\Phi(\zeta) = \exp \zeta$.

Відмітимо, що в роботах [15, 16] отримано конструктивний опис усіх аналітичних функцій зі значеннями в довільній скінченновимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{C}$. Теорема 5.1 роботи [17] стверджує, що для побудови розв'язків диференціального рівняння (2) у вигляді компонент моногенних функцій зі значеннями в комутативних асоціативних алгебрах, достатньо обмежитись вивченням моногенних функцій в алгебрах з базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$, де $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ — нільпотенти. А в роботі [18] показано, що в кожній алгебрі з базисом виду $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$ рівняння (3) має розв'язки. Тобто, на класах комутативних асоціативних алгебр з базисом $\{1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}\}$ задачі (З 1) та (З 2) повністю розв'язані.

Варто зауважити, що в скінченновимірних алгебрах розклад аналітичної функції за базисом має скінченну кількість компонент, а тому породжує скінченне число розв'язків заданого диференціального рівняння в частинних похідних.

В даній роботі пропонується процедура побудови нескінченної кількості сімейств розв'язків заданих рівнянь з частинними похідними, використовуючи аналітичні функції, що визначені на певних послідовностях $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ комутативних асоціативних алгебр. Для досягнення цієї мети, в п. 2 вивчаються розв'язки характеристичного рівняння (3) на послідовності $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, а в п. 5 вивчаються аналітичні функції на послідовності $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ та їх зв'язок з розв'язками рівняння (2). В пп. 9 – 14 даний метод застосовано до побудови розв'язків деяких рівнянь математичної фізики.

2. Послідовності розширень комутативної алгебри.

Нехай $\mathbb{A}_n$ — довільна n-вимірна комутативна асоціативна алгебра над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ та з єдиним ідемпотентом — одиницею алгебри. За теоремою Е. Картана [19, с. 33] в алгебрі $\mathbb{A}_n$ існує базис $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ і існують структурні константи $\Upsilon_{r,k}^{s}$ такі, що виконуються наступні правила множення:

$$\forall\, r,s \in \{1,2,\ldots,n-1\} \qquad I_r\, I_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \Upsilon_{r,k}^{s} I_k\,, \tag{5}$$

тобто

$\cdot$	1	I_1	I_2	$\ldots$	I_{n-1}
1	1	I_1	I_2	$\ldots$	I_{n-1}
I_1	I_1	$\sum\limits_{k=2}^{n-1} \Upsilon_{1,k}^{1} I_k$	$\sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^{1} I_k$	$\cdots$	0
I_2	I_2	$\sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^{1} I_k$	$\sum\limits_{k=3}^{n-1} \Upsilon_{2,k}^{2} I_k$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I_{n-1}	I_{n-1}	0	0	$\cdots$	0

. (6)

Покладемо $I_0 := 1$.

Нехай $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}$ — $(n+1)$-вимірна комутативна асоціативна алгебра з базисом $\{1, \widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2, \ldots, \widetilde{I}_n\}$ виду (5):

$$\forall\, r,s \in \{1,2,\ldots,n\} \qquad \widetilde{I}_r\, \widetilde{I}_s = \sum_{k=\max\{r,s\}+1}^{n} \widetilde{\Upsilon}_{r,k}^{s}\, \widetilde{I}_k\,. \tag{7}$$

Означення 1 [18]. Алгебра $\widetilde{\mathbb{A}}_{n+1}$ називається розширенням алгебри $\mathbb{A}_n$, якщо справедливі рівності

$$\widetilde{\Upsilon}_{r,k}^{s} = \Upsilon_{r,k}^{s} \tag{8}$$

$$\forall\, k \in \{2,\ldots,n-1\} \quad \forall\, r,s \in \{1,2,\ldots,k-1\}.$$

Надалі розширення алгебри $\mathbb{A}_n$ позначатимемо через $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$.

При $n = 2$ за означенням покладаємо, що алгебра $\mathbb{A}_3(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, з таблицею множення

$\cdot$	1	$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_2$
1	1	$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_2$
$\widetilde{I}_1$	$\widetilde{I}_1$	$\alpha\widetilde{I}_2$	0
$\widetilde{I}_2$	$\widetilde{I}_2$	0	0

є розширенням бігармонічної алгебри $\mathbb{B}$ (див., наприклад, [5]) з таблицею множення

$\cdot$	1	I_1
1	1	I_1
I_1	I_1	0

.

Зауважимо, що алгебра $\mathbb{A}_3(\alpha)$ при всіх $\alpha \in \mathbb{C}$ ізоморфна алгебрі $\mathbb{A}_3(1)$, моногенні функції в якій вивчались в роботі [6].

Зауваження 1. Іншими словами, рівність (8) означає, що якщо в таблиці множення виду (6) алгебри $\mathbb{E}(\mathbb{A}_n)$ відкинути останній рядок і останній стовпчик і скрізь у таблиці множення елемент $\widetilde{I}_n$ замінити на нуль, то отримаємо таблицю множення алгебри $\mathbb{A}_n$.

Розглянемо приклади розширень.

Приклад 1. [18]. Кожна з наведених нижче алгебр є розширенням попередньої алгебри.

$\mathbb{B} \to \mathbb{A}_3(1) \to$

$\cdot$	1	I_1	I_2	I_3
1	1	I_1	I_2	I_3
I_1	I_1	I_2	I_3	0
I_2	I_2	I_3	0	0
I_3	I_3	0	0	0

$\to$

$\cdot$	1	I_1	I_2	I_3	I_4
1	1	I_1	I_2	I_3	I_4
I_1	I_1	I_2	I_3	I_4	0
I_2	I_2	I_3	I_4	0	0
I_3	I_3	I_4	0	0	0
I_4	I_4	0	0	0	0

.

Можна говорити також про *послідовність розширень.*

Означення 2. Послідовність алгебр $\{\mathbb{A}_n\}_{n=2}^{\infty}$ виду (6) називатимемо послідовністю розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, якщо кожна наступна алгебра $\mathbb{A}_{n+1}$ є розширенням попередньої алгебри $\mathbb{A}_n$.

Очевидно, що $\mathbb{E}^2 \equiv \mathbb{B}$, $\mathbb{E}^3$ співпадає з однією із алгебр $\mathbb{A}_3(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ і т. д.

Приклад 2. Очевидно, що наведені в прикладі 1 алгебри мають такі відповідні базиси: $\{1, \rho^1\}$, $\rho^2 = 0$; $\{1, \rho^1, \rho^2\}$, $\rho^3 = 0$; $\{1, \rho^1, \rho^2, \rho^3\}$, $\rho^4 = 0$; $\{1, \rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$, $\rho^5 = 0$. Для кожного натурального n розглянемо алгебру $\mathbb{A}_n$ з базисом $\{1, \rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^n\}$, $\rho^{n+1} = 0$. Очевидно, що $(n+1)$-ша алгебра є розширенням n-ї алгебри. Тому послідовність алгебр $\{\mathbb{A}_n\}_{n=2}^{\infty}$ з базисами $\{1, \rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^n\}$ і властивістю $\rho^{n+1} = 0$ є *послідовністю розширень.*

3. Розв'язки рівняння (3) на послідовності розширень.

Означення 3. Будемо казати, що вектор $e(n) = \sum\limits_{r=0}^{n} c_r I_r$, $c_r \in \mathbb{C}$, визначений на послідовності розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, якщо при кожному $n = 2, 3, \ldots$ справедливе співвідношення $e(n) \in \mathbb{E}^n$.

Означення 4. Скажемо, що рівняння (3) має розв'язки на послідовності розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, якщо при кожному $n = 2, 3, \ldots$ існують вектори $e_1(n)$, $e_2(n), \ldots,$ $e_d(n)$ алгебри $\mathbb{E}^n$, які задовольняють рівняння (3) в $\mathbb{E}^n$.

Теорема 1. *На кожній послідовності розширень* $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ *рівняння (3) має розв'язки.*

Доведення. Повністю аналогічно до доведення теореми 2.3 з роботи [18] доводиться, що при кожному $n = 2, 3, \ldots$ в алгебрі $\mathbb{E}^n$ рівняння (3) має розв'язки. $\square$

Зауваження 2. Більше того, серед розв'язків $e_1(n), e_2(n), \ldots, e_d(n)$ рівняння (3) на $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$ завжди можна $d-1$ вектор визначити довільним чином на $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$, а останній вектор виражається рекурентними співвідношеннями через вибрані $d-1$ векторів. Нехай для визначеності

$$e_d(n+1) = f\big(e_1(n+1), e_2(n+1), \ldots, e_{d-1}(n+1), e_d(n)\big). \tag{9}$$

Збільшуючи як завгодно n, визначаємо вектор $e_d(n)$ на послідовності розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$. Очевидно, що рекурентні формули (9) визначаються рівнянням (3) і послідовністю розширень $\{\mathbb{E}^n\}_{n=2}^{\infty}$. Прикладом рекурентних співвідношень (9) є формули (15) з роботи [11]. Також відмітимо, що якщо у змінній $\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$ перейти до "базису" послідовності розширень, то ми фактично отримуємо нескінченновимірну змінну ζ.

4. Моногені функції.

Нехай вектори $e_1, e_2, \ldots, e_d$ алгебри $\mathbb{A}_n$, які задовольняють характеристичне рівняння (3) в $\mathbb{A}_n$, мають наступний розклад в базисі алгебри:

$$e_j = \sum_{r=0}^{n-1} a_{jr}\, I_r\,, \quad a_{jr} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \ldots, d. \tag{10}$$

Для елемента $\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$, де $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$, комплексне число

$$\xi := x_1a_{10} + x_2a_{20} + \cdots + x_da_{d0}$$

називається *спектром* точки ζ.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{A}_n$ лінійну оболонку $E_d := \{\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d : x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\}$, породжену векторами $e_1, e_2, \ldots, e_d$ алгебри $\mathbb{A}_n$.

Далі істотним є припущення: $x_1a_{10} + x_2a_{20} + \cdots + x_da_{d0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ при всіх дійсних $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Очевидно, що це має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{d0}$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. В теоремі 4 роботи [16] встановлено підклас рівнянь вигляду (2) для яких умова $x_1a_{10} + x_2a_{20} + \cdots + x_da_{d0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ виконується при всіх дійсних $x_1, x_2, \ldots, x_d$.

Множині S простору $\mathbb{R}^d$ поставимо у відповідність множину

$$S_\zeta := \{\zeta = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d : (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in S\} \text{ в } E_d\,.$$

Неперервну функцію $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ називатимемо *моногенною* в області $\Omega_\zeta \subset E_d$, якщо Φ диференційовна за Гато в кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}_n$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\right) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_d.$$

$\Phi'(\zeta)$ називається *похідною Гато* функції Φ в точці ζ.

Розглянемо розклад функції $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{A}_n$ за базисом $\{I_k\}_{k=0}^{n-1}$:

$$\Phi(\zeta)=\sum_{k=0}^{n-1}U_k(x_1,x_2,\ldots,x_d)\,I_k\,. \tag{11}$$

У випадку, коли функції $U_k:\Omega\to\mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω, тобто для довільного $(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in\Omega$

$$U_k\left(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_d+\Delta x_d\right)-U_k(x_1,x_2,\ldots,x_d)=$$

$$=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}\,\Delta x_j+\,o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{d}(\Delta x_j)^2}\right),\qquad \sum_{j=1}^{d}(\Delta x_j)^2\to 0\,,$$

функція Φ моногенна в області Ω_ζ тоді і тільки тоді, коли у кожній точці області Ω_ζ виконуються наступні аналоги умов Коші–Рімана:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\,e_1=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\,e_j\qquad \text{при всіх}\quad j=2,3,\ldots,d.$$

Відмітимо, що розклад резольвенти має вигляд

$$(te_1-\zeta)^{-1}=\sum_{k=0}^{n-1}A_k\,I_k\quad\ \forall\,t\in\mathbb{C}:\ t\neq\xi\,, \tag{12}$$

де A_k визначені наступними рекурентними співвідношеннями:

$$A_0:=\frac{1}{t-\xi}\,,\quad A_1:=\frac{\xi_1}{(t-\xi)^2}\,,\ \ \xi_1:=x_1a_{11}+x_2a_{21}+\cdots+x_da_{d1},$$

$$A_s=\frac{\xi_s}{(t-\xi)^2}+\frac{1}{t-\xi}\sum_{r=1}^{s-1}A_r\,B_{r,s} \tag{13}$$

при

$$\xi_s:=x_1a_{1s}+x_2a_{2s}+\cdots+x_da_{ds}\,,\ \ B_{r,s}:=\sum_{k=1}^{s-1}\xi_k\Upsilon_{r,s}^{k}\,,\quad s=2,3,\ldots,n-1.$$

Із співвідношень (12) випливає, що точки $(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, які відповідають необоротним елементам $\zeta\in E_d$, лежать на множині

$$M:\quad\left\{\begin{array}{l} x_1\,\mathrm{Re}\,a_{10}+x_2\,\mathrm{Re}\,a_{20}+\cdots+x_d\,\mathrm{Re}\,a_{d0}=0,\\ x_1\,\mathrm{Im}\,a_{10}+x_2\,\mathrm{Im}\,a_{20}+\cdots+x_d\,\mathrm{Im}\,a_{d0}=0\end{array}\right. \tag{14}$$

у просторі $\mathbb{R}^d$.

Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_d$ опукла відносно множини напрямків M_ζ. Це означає, що Ω_ζ містить відрізок $\{\theta_1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1) : \alpha \in [0,1]\}$ для всіх $\theta_1, \theta_2 \in \Omega_\zeta$ таких, що $\theta_2 - \theta_1 \in M_\zeta$. Позначимо

$$D := \{\xi = x_1 a_{10} + x_2 a_{20} + \cdots + x_d a_{d0} \in \mathbb{C} : \zeta \in \Omega_\zeta\}.$$

Теорема A [16]. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_d$ опукла відносно множини напрямків M_ζ і нехай хоча б одне з чисел $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{d0}$ належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тоді кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} I_k \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_k(t)(t-\zeta)^{-1} \, dt, \tag{15}$$

де F_k — деяка голоморфна функція в області D, а Γ — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка лежить в області D і охоплює точку ξ.

Оскільки за умов теореми **A** кожна моногенна функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_n$ продовжується до функції, моногенної в області

$$\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_d : \xi \in D\},$$

тому надалі будемо розглядати моногенні функції Φ, визначені в областях виду Π_ζ.

5. Розв'язки рівняння (4).

Відповідно до п. 1, компоненти $U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ моногенної функції (11) задовольняють рівняння (4). Крім того, очевидно, що зображення моногенної фукції (15) залежить від n — розмірності алгебри.

Далі дослідимо, як компоненти $U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ моногенної функції (11) залежать від n і від k.

Отже, маємо дві алгебри $\mathbb{E}^n$ та $\mathbb{E}^{n+1}$. В алгебрі $\mathbb{E}^n$ визначений набір векторів $e_1(n), e_2(n), \ldots, e_d(n)$, який задовольняє рівняння (3), а в алгебрі $\mathbb{E}^{n+1}$ визначений інший набір векторів — $e_1(n+1), e_2(n+1), \ldots, e_d(n+1)$, який також задовольняє рівняння (3) (відносно вибору векторів $e_1(n+1), e_2(n+1), \ldots, e_d(n+1)$ див. зауваження 2). В $\mathbb{E}^n$ розглядаємо змінну $\zeta(n) = x_1 e_1(n) + x_2 e_2(n) + \cdots + x_d e_d(n)$ і моногенну функцію $\Phi\big(\zeta(n)\big)$, а в алгебрі $\mathbb{E}^{n+1}$ розглядаємо змінну $\zeta(n+1) = x_1 e_1(n+1) + x_2 e_2(n+1) + \cdots + x_d e_d(n+1)$ і моногенну функцію $\Phi\big(\zeta(n+1)\big)$. Нехай $\Phi\big(\zeta(n)\big) : \Pi_{\zeta(n)} \to \mathbb{E}^n$ має вигляд (11), а моногенна функція $\Phi\big(\zeta(n+1)\big) : \Pi_{\zeta(n+1)} \to \mathbb{E}^{n+1}$ має вигляд

$$\Phi\big(\zeta(n+1)\big) = \sum_{k=0}^{n} V_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) \, \widetilde{I}_k \, .$$

Повністю аналогічно до теореми 4.1 з роботи [18] доводиться співвідношення

$$U_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) \equiv V_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) \quad \text{при всіх } \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Таким чином, для побудови розв'язків рівняння (4) у вигляді компонент моногенної функції має сенс розглядати лише останню — n-ту компоненту $U_n(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ моногенної функції в $\mathbb{E}^n$ при кожному фіксованому n. Перейдемо до вичення поставленої задачі.

Праву частину рівності (15) подамо у вигляді:

$$\sum_{k=0}^{n-1} I_k \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_k(t)(t-\zeta)^{-1} \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \sum_{k=0}^{n-1} I_k \, W_k(x_1, \ldots, x_d, t) dt$$

і будемо розглядати функції $W_k(x_1, \ldots, x_d, t)$.

Підставляючи вираз для резольвенти (12) в рівність (15), враховуючи правила множення алгебри $\mathbb{E}^n$, отримаємо такі перші чотири значення:

$$W_0(x_1, \ldots, x_d, t) = F_0 A_0 \, ,$$

$$W_1(x_1, \ldots, x_d, t) = F_1 A_0 + \widetilde{F}_0 A_1 \, ,$$

$$W_2(x_1, \ldots, x_d, t) = F_2 A_0 + \widetilde{F}_1 A_1 \Upsilon^1_{1,2} + \widehat{F}_0 A_2 \, ,$$

$$W_3(x_1, \ldots, x_d, t) = F_3 A_0 + \Big(\widehat{F}_1(t)\Upsilon^1_{1,3} + \widetilde{F}_2(t)\Upsilon^1_{2,3}\Big) A_1 +$$

$$+\Big(\widehat{F}_1(t)\Upsilon^1_{2,3} + \widetilde{F}_2(t)\Upsilon^2_{2,3}\Big) A_2 + \widetilde{\widetilde{F}}_0(t) A_3 \, ,$$

де F з усіма індексами і тільдами довільні комплексні аналітичні функції.

Проаналізуємо отримані вирази. Відповідно до п. 1

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} W_0(x_1, \ldots, x_d, t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F_0 A_0 dt$$

є розв'язком рівняння (4). Розглянемо вираз для W_1. Оскільки аналітичні функції F_0, F_1 довільні, то вираз $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F_1 A_0 dt$ задовольняє рівняння (2). Беручи до уваги, що $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma W_1 dt$ є розв'язком рівняння (4) і що це рівняння лінійне, то й їх різниця

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (W_1 - F_1 A_0) dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \widetilde{F}_0 A_1 dt$$

є розв'язком рівняння (4). Міркуючи аналогічно, приходимо до висновку, що й наступна різниця

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (W_2 - F_2 A_0 - \widetilde{F}_1 A_1 \Upsilon^1_{1,2}) dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \widehat{F}_0 A_2 dt$$

є розв'язком рівняння (4). Точно так само отримуємо наступний розв'язок:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \widetilde{\widetilde{F}}_0(t) A_3 dt.$$

Збільшуючи як завгодно натуральне n, отримуємо нескінченне сімейство розв'язків рівняння (4):

$$\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F_k(t)A_k\,dt\right\}_{k=0}^{\infty}, \tag{16}$$

де F_k — довільні аналітичні функції комплексної змінної, а A_k визначені рекурентними формулами (13).

Далі вкажемо сімейство розв'язків рівняння (2). З цією метою зазначимо, що визначення функції $\exp\zeta$ у вигляді суми абсолютно збіжного ряду (1) рівносильне її визначенню у вигляді головного продовження голоморфної функції комплексної змінної e^z в алгебру $\mathbb{E}^n$:

$$\exp\zeta := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^z(z-\zeta)^{-1}dz, \tag{17}$$

де γ — спрямлювана кривая в комплексній площині, що охоплює точку $\xi = x_1a_{10}+x_2a_{20}+\cdots+x_da_{d0}$ (див., наприклад, [20, с. 182]). А оскільки функція (17) задовольняє рівняння (2), то і її компоненти також задовольняють це рівняння. Тобто, для рівняння (2) будемо мати таке нескінченне сімейство розв'язків:

$$\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^t A_k\,dt\right\}_{k=0}^{\infty}. \tag{18}$$

6. Послідовність розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$.

У цьому пункті на конкретній послідовності розширень випишемо розв'язки виглядів (16) та (18).

Через $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ позначимо послідовність розширень, наведену в прикладі 2. На послідовності $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ у розкладі резольвенти (12) коефіцієнти A_k визначаються наступними рекурентними співвідношеннями (див. [11]):

$$A_0 := \frac{1}{t-\xi}\,,\ A_s = \frac{1}{t-\xi}(\xi_sA_0+\xi_{s-1}A_1+\cdots+\xi_1A_{s-1}),\ s=1,2,\ldots,n-1. \tag{19}$$

Тобто, маємо такі перші значення:

$$A_1 = \frac{\xi_1}{(t-\xi)^2}\,,\quad A_2 = \frac{\xi_2}{(t-\xi)^2}+\frac{\xi_1^2}{(t-\xi)^3}\,,$$

$$A_3 = \frac{\xi_3}{(t-\xi)^2}+\frac{2\xi_1\xi_2}{(t-\xi)^3}+\frac{\xi_1^3}{(t-\xi)^4}\,,$$

$$A_4 = \frac{\xi_4}{(t-\xi)^2}+\frac{2\xi_1\xi_3+\xi_2^2}{(t-\xi)^3}+\frac{3\xi_1^2\xi_2}{(t-\xi)^4}+\frac{\xi_1^4}{(t-\xi)^5}\,,$$

$$A_5 = \frac{\xi_5}{(t-\xi)^2} + \frac{2\xi_1\xi_4 + 2\xi_2\xi_3}{(t-\xi)^3} + \frac{3\xi_1^2\xi_3 + 3\xi_1\xi_2^2}{(t-\xi)^4} + \frac{4\xi_1^3\xi_2}{(t-\xi)^5} + \frac{\xi_1^5}{(t-\xi)^6}\,,$$

$$A_6 = \frac{\xi_6}{(t-\xi)^2} + \frac{\xi_3^2 + 2\xi_1\xi_5 + 2\xi_2\xi_4}{(t-\xi)^3} + \frac{\xi_2^3 + 6\xi_1\xi_2\xi_3 + 3\xi_1^2\xi_4}{(t-\xi)^4} +$$
$$+ \frac{4\xi_1^3\xi_3 + 6\xi_1^2\xi_2^2}{(t-\xi)^5} + \frac{5\xi_1^4\xi_2}{(t-\xi)^6} + \frac{\xi_1^6}{(t-\xi)^7}\,,$$

і т. д.

7. Розв'язки рівняння (2).

Далі на $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ випишемо експоненту (1). Для цього зауважимо, що $A_r = A_r\big((t-\xi)^s, \xi_1, \ldots, \xi_r\big)$, де $s = \{2, 3, \ldots, r+1\}$.

Введемо деякі визначення. Нехай $\varphi(t-\xi, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ — довільна комплексна функція від $(r+1)$ комплексних змінних. Визначимо лінійний оператор P, який кожній функції φ ставить у відповідність функцію від r змінних за правилом

$$P\varphi\big((t-\xi)^s, \xi_1, \ldots, \xi_r\big) = \varphi\Big((s-1)!\,, \xi_1, \ldots, \xi_r\Big) \qquad \forall\, s \in \{2, 3, \ldots, r+1\}.$$

Так, наприклад,

$$P\left(\frac{\xi_3}{(t-\xi)^2} + \frac{2\xi_1\xi_2}{(t-\xi)^3} + \frac{\xi_1^3}{(t-\xi)^4}\right) = \xi_3 + \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1^3}{3!}\,.$$

Тепер визначимо функції

$$\Psi_0 := 1, \quad \Psi_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) := P\,A_r\big((t-\xi)^s, \xi_1, \ldots, \xi_r\big) \tag{20}$$
$$\forall\, s \in \{2, 3, \ldots, r+1\}, \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Лема 1 [11]. *На послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ справедлива рівність*

$$\exp\zeta = e^\xi \sum_{r=0}^\infty \Psi_r\,\rho^r, \tag{21}$$

де коефіцієнти Ψ_r визначені співвідношеннями (20).

Випишемо декілька перших членів розкладу експоненти (21):

$$\exp\zeta = e^\xi \Bigg[1 + \xi_1\,\rho + \left(\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2!}\right)\rho^2 + \left(\xi_3 + \xi_1\xi_2 + \frac{\xi_1^3}{3!}\right)\rho^3 +$$
$$+ \left(\xi_4 + \frac{2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2}{2!} + \frac{3\xi_1^2\xi_2}{3!} + \frac{\xi_1^4}{4!}\right)\rho^4 +$$
$$+ \left(\xi_5 + \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 + \frac{\xi_1\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3}{2!} + \frac{\xi_1^3\xi_2}{3!} + \frac{\xi_1^5}{5!}\right)\rho^5 + \cdots\Bigg].$$

Оскільки функція $\exp\zeta$ задовольняє рівняння (2), то її комплексні компоненти $V_r(t,x)$ розкладу

$$\exp\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} V_r(t,x)\,\rho^r \tag{22}$$

також задовольняють рівняння (2). Сформулюємо це в наступному вигляді.

Теорема 2. *Рівняння (2) задовольняють комплексні функції*

$$V_r(x_1,x_2,\ldots,x_d) = \Psi_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)e^{\xi(x_1,x_2,\ldots,x_d)} \tag{23}$$

при всіх $r = 0,1,\ldots$, де поліноми Ψ_r визначаються рівностями (20).

Зауваження 3. Виділяючи в комплексному розв'язку V_r дійсну і уявну частини, отримуємо два дійсні розв'язки рівняння (2) вигляду

$$V_{r,1} = U_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)e^{\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_d)}\cos\mu(x_1,x_2,\ldots,x_d),$$

$$V_{r,2} = R_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)e^{\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_d)}\sin\mu(x_1,x_2,\ldots,x_d),$$

де U_r , R_r — деякі поліноми степеня r, а $\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_d) := \operatorname{Re}\xi$, $\mu(x_1,x_2,\ldots,x_d) := \operatorname{Im}\xi$.

В наступній теоремі встановлюється властивість розв'язків вигляду (23) рівняння (2).

Теорема 3. *Для розв'язків (23) рівняння (2) справедливі рівності*

$$\sum_{r+s=n}\int\limits_{\gamma} V_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)\,d\xi_s = 0 \qquad \forall\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{24}$$

де γ — довільна замкнена жорданова спрямлювана крива у просторі $\mathbb{R}^d$, яка гомотопна точці.

Доведення. Відповідно до аналога теореми Коші (див. теорему 3 з роботи [21]), справедлива рівність $\int_\gamma \exp\zeta\,d\zeta = 0$. Нехай $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ фіксоване. Враховуючи позначення (22), отримуємо рівності

$$\int\limits_{\gamma}\exp\zeta\,d\zeta = \int_{\gamma}\sum_{r=0}^{n} V_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)\,\rho^r\sum_{s=0}^{n} d\xi_s\,\rho^s =$$

$$= \int\limits_{\gamma}\sum_{0\le r+s\le n} V_r(x_1,x_2,\ldots,x_d)\,d\xi_s\,\rho^{r+s} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при ρ^{r+s}, отримуємо співвідношення (24). □

8. Розв'язки рівняння (4).

У цьому пункті на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ випишемо декілька перших сімейств розв'язків виду (16) рівняння (4). Для цього у вирази (16) підставимо перші коефіцієнти розкладу резольвенти (19). Якщо послідовність (16) позначити через $\{U_k(x_1, x_2, \dots, x_d)\}_{k=0}^\infty$, то перші значення цієї послідовності матимуть наступний вигляд:

$$U_0 = F_0(\xi), \qquad U_1 = \xi_1 F_1'(\xi), \quad U_2 = \xi_2 F_2'(\xi) + \frac{\xi_1^2}{2!} F_2''(\xi),$$

$$U_3 = \xi_3 F_3'(\xi) + \xi_1\xi_2 F_3''(\xi) + \frac{\xi_1^3}{3!} F_3'''(\xi),$$

$$U_4 = \xi_4 F_4'(\xi) + \frac{1}{2}(2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2) F_4''(\xi) + \frac{\xi_1^2\xi_2}{2} F_4'''(\xi) + \frac{\xi_1^4}{4!} F_4^{(4)}(\xi),$$

$$U_5 = \xi_5 F_5'(\xi) + (\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3) F_5''(\xi) + \frac{1}{2}(\xi_1\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3) F_5'''(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\xi_1^3\xi_2 F_5^{(4)}(\xi) + \frac{\xi_1^5}{5!} F_5^{(5)}(\xi),$$

$$U_6 = \xi_6 F_6'(\xi) + \frac{1}{2}(\xi_3^2 + 2\xi_1\xi_5 + 2\xi_2\xi_4) F_6''(\xi) + \frac{1}{6}(\xi_2^3 + 6\xi_1\xi_2\xi_3 + 3\xi_1^2\xi_4) F_6'''(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{4!}(4\xi_1^3\xi_3 + 6\xi_1^2\xi_2^2) F_6^{(4)}(\xi) + \frac{\xi_1^4\xi_2}{4!} F_6^{(5)}(\xi) + \frac{\xi_1^6}{6!} F_6^{(6)}(\xi),$$

і т. д., де F_m при $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ — довільні аналітичні функції комплексної змінної.

Обчислюючи за рекурентною формулою (19) значення A_k, виписуємо нескінченну множину розв'язків рівняння (4), причому у кожному розв'язку міститься довільна аналітична функція.

Далі розглянемо кілька прикладів застосування даного методу.

9. Розв'язки тривимірного рівняння Лапласа.

У цьому пункті для тривимірного рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{25}$$

побудуємо розв'язки виду (16). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ знайдемо усі трійки векторів e_1, e_2, e_3, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0. \tag{26}$$

Для простоти сприйняття вектори e_1, e_2, e_3 вигляду (10) перепозначимо наступним чином:

$$e_1 = \sum_{r=0}^\infty k_r\rho^r, \quad e_2 = \sum_{r=0}^\infty m_r\rho^r, \quad e_3 = \sum_{r=0}^\infty g_r\rho^r, \quad k_r, m_r, g_r \in \mathbb{C}.$$

Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^{\infty} B_r \rho^r$. В роботі [11] (див. формули (9), (10)) встановлено, що

$$B_0 = k_0^2\,, \quad B_1 = 2k_0k_1\,, \quad B_2 = k_1^2 + 2k_0k_2\,, \tag{27}$$

і в загальному випадку

$$B_r(k_0, k_1, \ldots, k_r) = \begin{cases} k_{r/2}^2 + 2\left(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r}{2}-1}k_{\frac{r}{2}+1}\right) \\ \hfill \text{при } r \text{ парному}, \\ 2\left(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r-1}{2}}k_{\frac{r+1}{2}}\right) \\ \hfill \text{при } r \text{ непарному}. \end{cases} \tag{28}$$

Очевидно, що рівняння (26) рівносильне нескінченній системі рівнянь

$$B_r(k_0, k_1, \ldots, k_r) + B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) + B_r(g_0, g_1, \ldots, g_r) = 0, \tag{29}$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots.$$

Відповідно до зауваження 2, вектори e_1, e_2 покладаємо довільними, а вектор e_3 виразимо через e_1 та e_2 рекурентними формулами виду (9). Тобто, $k_r\,, m_r$ є довільними комплексними числами при всіх $r = 0, 1, 2, \ldots$. Із системи (29), з урахуванням (27), маємо такі початкові значення:

$$g_0 = \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\,, \quad g_1 = \frac{\pm i(k_0k_1 + m_0m_1)}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\,, \tag{30}$$

де серед знаків $+, -$ вибираються одночасно верхні або нижні знаки. З урахуванням рівностей (28), система (29) має такий розв'язок:

$$g_r = \begin{cases} \frac{-1}{2g_0}\Big[k_{r/2}^2 + m_{r/2}^2 + g_{r/2}^2 + 2\big(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r}{2}-1}k_{\frac{r}{2}+1} \\ +m_0m_r + m_1m_{r-1} + \cdots + m_{\frac{r}{2}-1}m_{\frac{r}{2}+1} \\ +g_1g_{r-1} + g_2g_{r-2} + \cdots + g_{\frac{r}{2}-1}g_{\frac{r}{2}+1}\big)\Big] \qquad \text{при } r \text{ парному}, \\ \frac{-1}{g_0}\Big(k_0k_r + k_1k_{r-1} + \cdots + k_{\frac{r-1}{2}}k_{\frac{r+1}{2}} \\ +m_0m_r + m_1m_{r-1} + \cdots + m_{\frac{r-1}{2}}m_{\frac{r+1}{2}} \\ +g_1g_{r-1} + g_2g_{r-2} + \cdots + g_{\frac{r-1}{2}}g_{\frac{r+1}{2}}\Big) \qquad \text{при } r \text{ непарному} \end{cases} \tag{31}$$

з початковими значеннями (30). Зауважимо, що формула (31) є формулою виду (9) для рівняння (25).

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$. У нашому випадку,

$$\xi = k_0x + m_0y + g_0z = k_0x + m_0y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\,z,$$

а $\xi_r = k_rx + m_ry + g_rz$ при $r = 1, 2, \ldots$. При цьому $k_r\,, m_r$ — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \ldots$, а g_r визначаються рекурентними формулами (31).

Таким чином, тепер ми можемо виписати нескінченну кількість точних розв'язків виду (16). Відповідно до пункту , випишемо декілька перших розв'язків. Маємо

$$U_0 = F_0\left(k_0x + m_0y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\,z\right),$$

$$U_1 = \left(k_1x + m_1y \pm \frac{i(k_0k_1 + m_0m_1)}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\,z\right)F_1\left(k_0x + m_0y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\,z\right),$$

$$U_2 = \Biggl(k_2x + m_2y \pm \frac{i}{2\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\Bigl(k_1^2 + m_1^2 + 2k_0k_1 + 2m_0m_1 -$$

$$- \frac{(k_0k_1 + m_0m_1)^2}{k_0^2 + m_0^2}\Bigr)\,z\Biggr)F_2\left(k_0x + m_0y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\,z\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(k_1x + m_1y \pm \frac{i(k_0k_1 + m_0m_1)}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\,z\right)^2 F_2'\left(k_0x + m_0y \pm i\sqrt{k_0^2 + m_0^2}\,z\right),$$

де $k_r\,, m_r$ при $r = 0, 1, 2,$ — довільні комплексні числа, а F_0, F_1, F_2 — довільні аналітичні функції комплексної змінної.

10. Розв'язки хвильового рівняння.

Маючи розв'язки рівняння (25) легко виписати розв'язки хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0. \tag{32}$$

Для рівняння (32) характеристичне рівняння має вигляд

$$\hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2 - \hat{e}_3^2 = 0. \tag{33}$$

Очевидним є наступне твердження: *якщо трійка векторів* $e_1, e_2, e_3 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ *задовольняє рівняння (26), то вектори* $\hat{e}_1 := e_1, \hat{e}_2 := e_2, \hat{e}_3 := ie_3 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ *задовольняють рівняння (33) і навпаки.* Тобто, потрібно праві частини рівностей (30), (31) помножити на комплексну одиницю i. Далі повторюється процедура як у попередньому пункті. Зокрема, $\xi = k_0x + m_0y \pm \sqrt{k_0^2 + m_0^2}\,z$. Відповідно, перші два розв'язки рівняння (32) матимуть вигляд:

$$W_0 = F_0\left(k_0x + m_0y \pm \sqrt{k_0^2 + m_0^2}\,z\right),$$

$$W_1 = \Big(k_1 x + m_1 y \pm \frac{k_0 k_1 + m_0 m_1}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}}\, z\Big) F_1 \left(k_0 x + m_0 y \pm \sqrt{k_0^2 + m_0^2}\, z\right),$$

де k_0, m_0, k_1, m_1 — довільні комплексні числа, а F_0, F_1 — довільні аналітичні функції дійсної або комплексної змінної.

11. Розв'язки рівняння (34).

У цьому пункті для рівняння поперечного коливання пружного стержня (див., наприклад, [22, с. 940])

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{34}$$

побудуємо розв'язки виду (23). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ знайдемо усі пари векторів e_1, e_2, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^2 + a^2 e_2^4 = 0. \tag{35}$$

Вектори e_1, e_2 вигляду (10) перепозначимо наступним чином:

$$e_1 = \sum_{r=0}^{\infty} k_r \rho^r, \quad e_2 = \sum_{r=0}^{\infty} m_r \rho^r, \quad k_r, m_r \in \mathbb{C}.$$

Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^{\infty} B_r \rho^r, \quad e_2^2 = \sum_{r=0}^{\infty} C_r \rho^r$. Коефіцієнти B_r визначені рівностями (27) та (28). Коефіцієнти C_r, очевидно, визначаються співвідношеннями

$$C_r(m_0, m_1, \ldots, m_r) \equiv B_r(m_0, m_1, \ldots, m_r). \tag{36}$$

Відповідно до зауваження 2, вектор e_2 покладемо довільним, а вектор e_1 виразимо через e_2 рекурентними формулами виду (9). Для цього рівняння (35) перепишемо у вигляді $e_1^2 + (ae_2^2)^2 = 0$, звідки $e_1 = \pm i a e_2^2$, що рівносильно

$$k_r = \pm i\, a\, C_r\,, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{37}$$

Зауважимо, що формула (37) є формулою виду (9) для рівняння (34).

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \ldots$. У нашому випадку,

$$\xi = k_0 x + m_0 y = \pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y,$$

а $\xi_r = k_r x + m_r y$ при $r = 1, 2, \ldots$. При цьому m_r — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \ldots$, а k_r визначаються рекурентними формулами (37).

Таким чином, ми можемо виписати нескінченну кількість точних розв'язків виду (23). Відповідно до пункту , випишемо декілька перших розв'язків. Маємо

$$V_0 = e^{\xi} = e^{\pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y},$$

$$V_1 = \xi_1 e^{\xi} = \Big(\pm 2i\, a\, m_0\, m_1\, x + m_1 y\Big) e^{\pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y}.$$

$$V_2 = \left(\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2}\right) e^{\xi} =$$

$$= \left[\pm ia(m_1^2 + 2m_0 m_2)x + m_2 y + \frac{1}{2}(\pm 2i\, a\, m_0\, m_1\, x + m_1 y)^2 \right] e^{\pm i\, a\, m_0^2\, x + m_0 y},$$

де m_0, m_1, m_2 — довільні комплексні числа.

12. Розв'язки рівняння $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$.

Маючи точні розв'язки рівняння (34), легко виписати розв'язки рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{38}$$

Для рівняння (38) характеристичне рівняння має вигляд

$$\hat{e}_1^2 - a^2 \hat{e}_2^4 = 0. \tag{39}$$

Очевидним є наступне твердження: *якщо пара векторів $e_1, e_2 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ задовольняє рівняння (35), то вектори $\hat{e}_1 := e_1, \hat{e}_2 := \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e_2 \in \{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ задовольняють рівняння (39) і навпаки.* Тобто, потрібно праву частину рівності (37) помножити на $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i$. Далі повторюється процедура як у попередньому пункті. Зокрема, $\xi = k_0 x + m_0 y = \pm\, a\, m_0^2\, x + m_0 y$. Відповідно, перші два розв'язки рівняння (38) матимуть вигляд:

$$W_0 = e^{\xi} = e^{\pm a\, m_0^2\, x + m_0 y},$$

$$W_1 = \xi_1 e^{\xi} = \Big(\pm\, 2\, a\, m_0\, m_1\, x + m_1 y \Big) e^{\pm a\, m_0^2\, x + m_0 y}.$$

де m_0, m_1 — довільні комплексні числа.

13. Розв'язки узагальненого бігармонічного рівняння.

У цьому пункті для рівняння

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2p \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \qquad p \in \mathbb{R} \tag{40}$$

побудуємо розв'язки виду (16). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^\infty$ знайдемо усі пари векторів e_1, e_2, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^4 + 2p\, e_1^2 e_2^2 + e_2^4 = 0. \tag{41}$$

Вектори e_1, e_2 вигляду (10) перепозначимо наступним чином:

$$e_1 = \sum_{r=0}^{\infty} k_r \rho^r, \quad e_2 = \sum_{r=0}^{\infty} m_r \rho^r, \quad k_r, m_r \in \mathbb{C}. \tag{42}$$

Нехай $e_1^2 = \sum_{r=0}^{\infty} B_r \rho^r$, де коефіцієнти B_r визначені рівностями (27), (28). Покладаючи $e_1^4 = \sum_{r=0}^{\infty} C_r \rho^r$, коефіцієнти C_r, очевидно, визначаються співвідношеннями

$$C_r(k_0, k_1, \dots, k_r) = B_r(B_0, B_1, \dots, B_r).$$

Якщо $e_2^2 = \sum_{r=0}^{\infty} H_r \rho^r$, то коефіцієнти H_r визначаються рівностями

$$H_r(m_0, m_1, \dots, m_r) = B_r(m_0, m_1, \dots, m_r).$$

Аналогічно, для $e_2^4 = \sum_{r=0}^{\infty} D_r \rho^r$, коефіцієнти D_r, визначаються співвідношеннями

$$D_r(m_0, m_1, \dots, m_r) = H_r(H_0, H_1, \dots, H_r).$$

Залишилось визначити коефіцієнти R_r із розкладу $e_1^2 e_2^2 = \sum_{r=0}^{\infty} R_r \rho^r$. Враховуючи правила множення для послідовності розширень $\{\mathbb{E}_\rho^n\}_{n=2}^{\infty}$, маємо

$$R_r = B_0 H_r + B_1 H_{r-1} + \dots + B_r H_0.$$

Тепер очевидно, що рівняння (41) рівносильне нескінченній системі рівнянь

$$D_r + 2pR_r + C_r = 0, \qquad r = 0, 1, 2, \dots. \tag{43}$$

Відповідно до зауваження 2, вектор e_1 покладемо довільним, а вектор e_2 виразимо через e_1 рекурентними формулами виду (9). Тобто, k_r є довільними комплексними числами при всіх $r = 0, 1, 2, \dots$. Із системи (43), маємо такі початкові значення:

$$m_0 = \pm k_0 \sqrt{\pm\sqrt{p^2 - 1} - p}\,, \quad m_1 = -\frac{k_0^3 k_1 + p k_0 k_1 m_0^2}{m_0^3 + p k_0^2 m_0}\,,$$

$$m_2 = -\frac{m_0^2(3m_1^2 + pk_1^2 + 2pk_0k_2) + 3k_0^2(k_1^2 + 2k_0k_2 + pm_1^2) + 4pk_0k_1m_0m_1}{2m_0^3 + 2pk_0^2 m_0}\,, \tag{44}$$

де серед знаків $+, -$ вибирається будь-який. Зауважимо, що для визначення коефіцієнтів m_r при всіх $r = 3, 4, \dots$ із рівностей (43) щоразу будемо отримувати лінійне рівняння.

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r = 1, 2, \dots$. У нашому випадку, $\xi = k_0 x + m_0 y$, $\xi_r = k_r x + m_r y$ при $r = 1, 2, \dots$. При цьому k_r — довільні комплексні числа при $r = 0, 1, 2, \dots$, а m_r — визначаються із рекурентних формул (43) з урахуванням (44).

Таким чином, тепер ми можемо виписати нескінченну кількість точних розв'язків виду (16). Зокрема, маючи значення m_0, m_1, m_2 можемо виписати перші три розв'язки

$$U_0 = F_0(\xi), \qquad U_1 = \xi_1 F_1(\xi), \quad U_2 = \xi_2 F_2(\xi) + \frac{\xi_1^2}{2!} F_2'(\xi),$$

де F_0, F_1, F_2 — довільні аналітичні функції змінної ξ.

14. Розв'язки двовимірного рівняння Гельмгольца.

У цьому пункті для однорідного рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\, u=0, \qquad \lambda\in\mathbb{C} \tag{45}$$

побудуємо розв'язки виду (23). З цією метою на послідовності розширень $\{\mathbb{E}^n_\rho\}_{n=2}^\infty$ знайдемо пари векторів e_1, e_2, які задовольняють характеристичне рівняння

$$e_1^2+e_2^2+\lambda=0. \tag{46}$$

Нехай вектори e_1, e_2 подаються у вигляді (42). Нехай $e_1^2=\sum_{r=0}^\infty B_r\rho^r$, $e_2^2=\sum_{r=0}^\infty C_r\rho^r$, де коефіцієнти B_r визначені рівностями (27), (28), а коефіцієнти C_r визначаються формулою (36). Очевидно, що рівняння (46) рівносильне нескінченній системі рівнянь

$$\begin{gathered} k_0^2+m_0^2+\lambda=0,\\ B_r(k_0,k_1,\ldots,k_r)+B_r(m_0,m_1,\ldots,m_r)=0,\ \ r=1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{47}$$

Вектор e_1 покладаємо довільними, а вектор e_2 виразимо через e_1 (9). Тобто, k_r є довільними комплексними числами при всіх $r=0,1,2,\ldots$. Із системи (47) маємо такі початкові значення:

$$m_0=\pm i\sqrt{k_0^2+\lambda}\,,\quad m_1=\frac{\pm i k_0 k_1}{\sqrt{k_0^2+\lambda}}\,,\quad m_2=\frac{k_1^2\lambda}{2m_0^3}-\frac{k_0k_2}{m_0}\,, \tag{48}$$

де серед знаків $+,-$ вибираються одночасно верхні або нижні знаки. З урахуванням рівностей (28), система (47) має такий розв'язок:

$$m_r=\begin{cases} \frac{-1}{2m_0}\Big[k_{r/2}^2+m_{r/2}^2+2\big(k_0k_r+k_1k_{r-1}+\cdots+k_{\frac{r}{2}-1}k_{\frac{r}{2}+1}+\\ \quad +m_1m_{r-1}+m_2m_{r-2}+\cdots+m_{\frac{r}{2}-1}m_{\frac{r}{2}+1}\big)\Big]\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } r \text{ парному},\\ \frac{-1}{m_0}\Big(k_0k_r+k_1k_{r-1}+\cdots+k_{\frac{r-1}{2}}k_{\frac{r+1}{2}}+m_1m_{r-1}+\\ \quad +m_2m_{r-2}+\cdots+m_{\frac{r-1}{2}}m_{\frac{r+1}{2}}\Big) \quad \text{при } r \text{ непарному} \end{cases} \tag{49}$$

з початковими значеннями (48). Зауважимо, що формула (49) є формулою виду (9) для рівняння (45).

Тепер можемо визначити змінні ξ та ξ_r, $r=1,2,\ldots$. В цьому випадку,

$$\xi=k_0x+m_0y=k_0x\pm yi\sqrt{k_0^2+\lambda},$$

а $\xi_r=k_rx+m_ry$ при $r=1,2,\ldots$. При цьому k_r — довільні комплексні числа при $r=0,1,2,\ldots$, а m_r визначаються рекурентними формулами (49).

Таким чином, тепер ми можемо виписати нескінченну кількість точних розв'язків виду (23). Відповідно до пункту , випишемо декілька перших розв'язків. Маємо

$$V_0 = e^{\xi} = e^{k_0 x \pm yi\sqrt{k_0^2+\lambda}},$$

$$V_1 = \xi_1 e^{\xi} = \Big(k_1 x \pm \frac{ik_0k_1}{\sqrt{k_0^2+\lambda}}\, y\Big) e^{k_0 x \pm yi\sqrt{k_0^2+\lambda}}.$$

$$V_2 = \left(\xi_2 + \frac{\xi_1^2}{2}\right) e^{\xi} =$$

$$= \left[k_2 x + \Big(\frac{k_1^2\lambda}{\sqrt{2m_0^3}} - \frac{k_0k_2}{m_0}\Big) y + \frac{1}{2}\Big(k_1 x \pm \frac{ik_0k_1}{\sqrt{k_0^2+\lambda}}\, y\Big)^2\right] e^{k_0 x \pm yi\sqrt{k_0^2+\lambda}},$$

де k_0, k_1, k_2 — довільні комплексні числа.

Зауваження 4. В роботі [11] даний метод застосовано до побудови точних розв'язків рівняння гідродинаміки

$$\frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

А в роботі [12] отримано гіперкомплексне представлення аналітичних розв'язків даного рівняння, використовуючи двовимірну комутативну алгебру.

Зауваження 5. Використовуючи запропонований в роботі метод, отримуємо усі аналітичні розв'язки дворимірного рівняння Лапласа

$$\Delta_2 u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{50}$$

та двовимірного бігармонічного рівняння

$$\Delta_2^2 u(x,y) = 0. \tag{51}$$

Зокрема, усі аналітичні розв'язки рівняння (50) отримуються у вигляді компоненти U_0, а всі розв'язки у вигляді компонент U_k при $k = 2, 3, \ldots$ будуть підмножиною розв'язків, що отримані у вигляді компоненти U_0. Для рівняння (51) загальний розв'язок отримуємо у вигляді суми $U_0 + U_1$. Причому, розв'язок $U_0 + U_1$ буде вточності співпадати з формулою Гурса загального розв'язку рівняння (51). А всі інші розв'язки U_k при $k = 3, 4, \ldots$ є підмножиною множини розв'язків $U_0 + U_1$.

Цитована література

1. *Ketchum P. W.* A Complete Solution of LaPlace's Equation by an Infinite Hypervariabl // American J. Math. – 1929. – **51**, No. 2. – P. 179–188.
2. *Ketchum P. W.* Solution of Partial Differential Equations by Means of Hypervariables // American J. Math. – 1932. – **54**, No. 2. – P. 253–264.

3. *Roşculeţ M.N.* Funcţii monogene pe algebre comutative. – Bucuresti: Acad. Rep. Soc. Romania, 1975. – 339 p.
4. *Мельниченко И.П., Плакса С.А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
5. *Grishchuk S.V., Plaksa S.A.* Monogenic functions in a biharmonic algebra // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, No. 12. – P. 1865–1876.
6. *Plaksa S.A., Shpakovskii V.S.* Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank // Ukr. Math. J. – 2011. – **62**, No. 8. – P. 1251–1266.
7. *Plaksa S.A., Shpakivskyi V.S.* Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality // J. Algerian Math. Soc. – 2014. – **1**. – P. 1–13.
8. *Pogorui A., Rodriguez-Dagnino R.M., Shapiro M.* Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras // Math. Meth. Appl. Sci. – 2014. – **37**, No. 17. – P. 2799–2810.
9. *Pogorui A., Rodriguez-Dagnino R.M.* Solutions of some partial differential equations with variable coefficients by properties of monogenic functions // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 5. – P. 624–632.
10. *Плакса С.А.* Аналитические решения одной системы эллиптических уравнений // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 292–306.
11. *Шпаковский В. С.* Гиперкомплексные функции и точные решения одного уравнения гидродинамики // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – **14**, № 1. – С. 262–274.
12. *Шпаковский В.С.* Гиперкомплексное представление аналитических решений одного уравнения гидродинамики // Труды ИПММ НАН Украины. – 2016. – **30**. – С. 155–164.
13. *Plaksa S.A., Pukhtaevich R.P.* Constructive description of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with one-dimensional radical // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 5. – P. 740–751.
14. *Plaksa S.A., Pukhtaievych R.P.* Constructive description of monogenic functions in n-dimensional semi-simple algebra // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. – 2014. – **22**, No. 1. – P. 221–235.
15. *Shpakivskyi V.S.* Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra // Adv. Pure Appl. Math. – 2016. – **7**, No. 1. – P. 63–75.
16. *Shpakivskyi V.S.* Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras // Zb. Pr. Inst. Math. of NAS of Ukraine. – 2015. – **12**, No. 3. – P. 251–268.
17. *Шпаківський В.С.* Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах // Укр. мат. вісник. – 2018. – **15**, No. 2. – P. 272–294.
18. *Шпаківський В.С.* Про моногенні функції на розширеннях комутативної алгебри // Праці міжнар. геометр. центру. – 2018. – **11**, No. 3. – P. 1–18.
19. *Cartan E.* Les groupes bilinéares et les systèmes de nombres complexes // Annales de la faculté des sciences de Toulouse. – 1898. – **12**, No. 1. – P. 1–64.
20. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
21. *Shpakivskyi V.S.* Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras // Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. – 2015. – **12**, No. 4. – P. 313–328.
22. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. – Second Edition, Updated, Revised and Extended. 2016. – 1632 p.

References

1. Ketchum, P.W. (1929). A Complete Solution of LaPlace's Equation by an Infinite Hypervariable. *American J. Math. 51*(2), 179-188.
2. Ketchum, P.W. (1932). Solution of Partial Differential Equations by Means of Hypervariables. *American J. Math. 54*(2), 253-264.
3. Rosculet, M.N. (1975). *Functii monogene pe algebre comutative.* Bucuresti: Acad. Rep. Soc. Romania.
4. Mel'nichenko, I.P., Plaksa, S.A. (2008). *Commutative algebras and spatial potential fields.* Kiev.

Inst. Math. NAS Ukraine (in Russian).
5. Grishchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2009). Monogenic functions in a biharmonic algebra. *Ukr. Math. J., 61*(12), 1865-1876.
6. Plaksa, S.A., Shpakovskii, V.S. (2011). Constructive description of monogenic functions in a harmonic algebra of the third rank. *Ukr. Math. J., 62*(8), 1251-1266.
7. Plaksa, S.A., Shpakivskyi, V.S. (2014). Monogenic functions in a finite-dimensional algebra with unit and radical of maximal dimensionality. *J. Algerian Math. Soc., 1*, 1-13.
8. Pogorui, A., Rodriguez-Dagnino, R. M., Shapiro, M. (2014). Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras. *Math. Meth. Appl. Sci., 37*(17), 2799-2810.
9. Pogorui, A., Rodriguez-Dagnino, R.M. (2017). Solutions of some partial differential equations with variable coefficients by properties of monogenic functions. *J. Math. Sci., 220*(5), 624-632.
10. Plaksa, S.A. (2012). Analytical solutions of one system of elliptic equations. *Zb. Pr. Inst. Math. of NAS of Ukraine, 9*(2), 292-306 (in Russian).
11. Shpakivskyi, V.S. (2017). Hypercomplex functions and exact solutions of one hydrodynamic equation. *Zb. Pr. Inst. Math. of NAS of Ukraine, 1*4(1), 262-274 (in Russian).
12. Shpakivskyi, V.S. (2016). Hypercomplex representation of analytical solutions of one hydrodynamic equation. *Proc. IAMM of NAS of Ukraine, 30*, 155-164 (in Russian).
13. Plaksa, S.A., Pukhtaevich, R.P. (2013). Constructive description of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with one-dimensional radical. *Ukr. Math. J., 65*(5), 740-751.
14. Plaksa, S.A., Pukhtaievych, R.P. (2014). Constructive description of monogenic functions in n-dimensional semi-simple algebra. *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, 22*(1), 221-235.
15. Shpakivskyi, V.S. (2016). Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra. *Adv. Pure Appl. Math., 7*(1), 63-75.
16. Shpakivskyi, V.S. (2015). Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras. *Zb. Pr. Inst. Math. of NAS of Ukraine, 12*(3), 251-268.
17. Shpakivskyi, V.S. (2018). On monogenic functions defined in different commutative algebras. *Ukr. Math. Visnyk, 15*(2), 272-294. (in Ukrainian).
18. Shpakivskyi, V.S. (2018). On monogenic functions on extensions of commutative algebra. *Proc. Internat. Geometry Center, 11*(3), 1-18 (in Ukrainian).
19. Cartan, E. (1898). Les groupes bilineares et les systemes de nombres complexes. *Annales de lafaculte des sciences de Toulouse, 12*(1), 1-64.
20. Hille, E., Phillips, R. (1962). *Functional analysis and semigroups.* Moscow: Izdat. Inostran. Lit. (in Russian).
21. Shpakivskyi, V.S. (2015). Integral theorems for monogenic functions in commutative algebras. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 12*(4), 313-328.
22. Polyanin, A.D., Nazaikinskii, V.E. (2016). *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists.* Second Edition, Updated, Revised and Extended, New-York: Chapman and Hall/CRC.

V.S. Shpakivskyi

Hypercomplex method for solving linear PDEs.

Algebraic-analytic approach to constructing solutions for given partial differential equations were investigated in many papers. In particular, in papers [1 – 14]. It involves solving two problems. Problem (P 1) is to describe all the sets of vectors $e_1, e_2, \ldots, e_d$, which satisfy the characteristic equation (or specify the procedure by which they can be found). And the problem (P 2) is to describe all the components of monogenic (i. e., continuous and differentiable in sense Gateaux) functions. In particular, for the equation (4) we must describe the components of the function $\Phi(\zeta) = \exp \zeta$. Note that in the papers [15, 16] a constructive description of all analytic functions with values is obtained in an arbitrary finite-dimensional commutative associative algebra over the field $\mathbb{C}$. The Theorem 5.1 of the paper [17] states that it is enough to limit the study of monogenic functions in algebras with the basis of $\{1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}\}$, where $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ are nilpotents. In addition, in [18] it is showed that in each algebra with a basis of the form $\{1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}\}$ the equation (3) has solutions. That is, the problems (P 1) and (P 2) are completely solved on the classes of commutative associative algebras with the basis $\{1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}\}$. It is worth noting that in a finite-dimensional algebra a decomposition of monogenic functions has a finite number of components, and therefore, it generates a finite number of solutions of a given partial differential equations. In this paper, we propose a procedure for constructing an infinite number of families of solutions of given linear differential equations with partial derivatives with constant coefficients. We use monogenic functions that are defined on some sequences of commutative associative algebras over the field of complex numbers. To achieve this goal, we first study the solutions of the so-called characteristic equation on a given sequence of algebras. Further, we investigate monogenic functions on the sequence of algebras and study their relation with solutions of partial deferential equations. The proposed method is used to construct solutions of some equations of mathematical physics. In particular, for the three-dimensional Laplace equation and the wave equation, for the equation of transverse oscillations of the elastic rod and the conjugate equation, a generalized biharmonic equation and the two-dimensional Helmholtz equation. We note that this method yields all analytic solutions of the two-dimensional Laplace equation and the two-dimensional biharmonic equation (Goursat formula).

Keywords: *commutative associative algebra, monogenic function, characteristic equation, expansion of commutative algebra.*

В.С. Шпакивский

Гиперкомплексный метод решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

В данной работе предлагается процедура построения бесконечного множества семейств решений заданных линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. При этом используются моногенные (то есть, непрерывные и дифференцируемые по Гато) функции со значениями на определенных последовательностях коммутативных ассоциативных алгебр над полем комплексных чисел. Для достижения данной цели, сначала изучаются решения, так называемого, характеристического уравнения на заданной последовательности алгебр. Дальше изучаются моногенные функции на последовательности алгебр та их связь с решениями уравнений в частных производных. Предложенный метод применено к построению решений некоторых уравнений математической физики. В частности, для трехмерного уравнения Лапласа та волнового уравнения, для уравнения поперечных колебаний упругого стержня та сопряженного с ним, обобщенного бигармонического уравнения та двумерного уравнения Гельмгольца.

Ключевые слова: *коммутативная ассоциативная алгебра, моногенная функция, характеристическое уравнение, расширения коммутативной алгебры.*

Інститут математики НАН України, Київ
shpakivskyi86@gmail.com

Отримано 03.11.18

УДК 531.38, 62-50
DOI: 10.37069/1683-4720-2018-32-17

©2018. **В.Ф. Щербак, И.С. Дмитришин**

ОЦЕНКА СКОРОСТИ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ СЕТЕЙ

Рассмотрена задача наблюдения для системы взаимосвязанных осцилляторов, совершающих нелинейные колебания. В качестве математической модели каждого осциллятора сети используются уравнения Льенара – общая модель нелинейных колебаний материальной точки. Такие системы возникают при упрощенном моделировании многих биологических, физических процессов, имеющих циклический характер. Предложена схема решения задачи наблюдения, обеспечивающая получение экспоненциальных оценок скорости каждого из осцилляторов по информации об их положении. Для построения соответствующего нелинейного наблюдателя использован метод синтеза инвариантных соотношений, позволяющий синтезировать выражения, определяющие искомые неизвестные как функции от известных величин.

MSC: 34A60, 34D20, 34N05.

Ключевые слова: *нелинейный наблюдатель, инвариантные соотношения, нелинейные осцилляторы.*

1. Введение.

Исследование коллективного поведения многомасштабных динамических процессов является на данный момент одной из наиболее актуальных задач нелинейной динамики. Она имеет принципиальное значение для понимания основных закономерностей синхронной динамики распределенных активных подсистем с колебаниями, таких как нейронные ансамбли, биомеханические модели сердечной или локомоторной деятельности, модели турбулентных сред и т. п. Поскольку нелинейные колебания, которые наблюдаются в таких системах, имеют устойчивый предельный цикл, который не зависит от начальных условий, то в качестве модели многомасштабных процессов обычно используют систему связанных между собой нелинейных осцилляторов. В качестве основной динамической модели каждого из этих осцилляторов часто используют уравнения Льенара [1].

Уравнения Льенара являются важным, с практической точки зрения, классом нелинейных дифференциальных уравнений. Данные уравнения возникают в теории нелинейных колебаний, теории динамических систем, задачах нелинейной механики, задачах теории упругости, задачах механики жидкости и газа, задачах описания динамики биологических систем и в ряде других приложений. В частности, к уравнениям типа Льенара относятся уравнения Рэлея, использующиеся для описания динамики пузырька газа в жидкости, осциллятор Ван дер Поля, осциллятор Мэтьюса–Лакшманана, осциллятор Дуфинга–Ван дер Поля и ряд других уравнений нелинейной механики.

Практические исследования таких моделей многомасштабных динамических процессов при их использовании в разного рода изделиях зачастую связаны с проблемой определения характеристик активных подсистем по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени. В частности, для изучения и управления процессом синхронизации движения компонент сложных систем требуется знание скорости колебаний каждого из осцилляторов системы при измерениях положения колеблющихся точек [2–4]. В такой постановке эта задача является классической задачей наблюдения динамической системы по ее выходу [5].

В работе проводится построения нелинейного наблюдателя, позволяющего получать асимптотические оценки скоростей колебаний в ансамблях осцилляторов, описываемых уравнениями Льенара. Используется разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений [6], который в задачах управления позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами [7]. На первом этапе наблюдатель строится для одного осциллятора. Найденное решение используется далее для системы связанных между собой нелинейных осцилляторов.

2. Задача определения скорости колебаний осциллятора Льенара.

Рассмотрим уравнение Льенара, описывающее процесс нелинейных колебаний материальной точки

$$\ddot{x} - F(x)\dot{x} + G(x) = 0. \tag{1}$$

Будем трактовать переменную x как отклонение положения точки от состояния равновесия $x = 0$. Предполагаем, что функции $F(x), G(x)$ являются непрерывными при всех значениях x и обеспечивают для заданных начальных значений единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий. Тогда уравнение (1) описывает широкий класс нелинейных моделей колебательных процессов при дополнительном условии: для $x \neq 0$

$$x \cdot G(x) > 0,$$

которое означает, что сила, возвращающая материальную точку в положение равновесия, направлена в сторону положения равновесия. Одной из задач, возникающих при использовании модели (1) в тех или иных устройствах, является задача определения скорости точки в предположении, что значения функции времени $x(t)$ доступны измерению.

Перепишем уравнение Льенара в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Обозначим $x_1 = x,\ x_2 = dx/dt$ и запишем (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= F(x_1)x_2 - G(x_1), \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим задачу нахождения $x_2(t)$ как задачу наблюдения системы (2) по известной информации о движении. Такой информацией является выход – функция $y(t) = x_1(t)$, а также любые величины, которые могут быть найдены с использованием только лишь значений выхода. В частности, далее известным будем считать любое решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t)), \ \xi(0) = \xi_0 \in R, \tag{3}$$

в которой функция $U(\xi, x_1)$ обеспечивает существование и единственность решения $\xi(t, \xi_0)$ для $t \in [0, \infty)$. Используя традиционный подход к решению задачи наблюдения [4], сформулируем задачу.

Задача 1. Найти асимптотически точные оценки переменной $x_2(t)$ системы (2) по известным значениям выхода $x_1(t)$.

3. Синтез дополнительного соотношения.

Для решения задачи используем метод синтеза инвариантных соотношений, с помощью которого на некоторых траекториях расширенной системы дифференциальных уравнений (2), (3) строятся явные зависимости неизвестных от известных величин [7]. Суть данного подхода состоит в подборе правой части уравнения (3) – функции $U(\xi, x_1)$ таким образом, чтобы полученная расширенная система дифференциальных уравнений (2),(3) допускала некоторое инвариантное соотношение

$$V(x_1, x_2, \xi) = 0, \tag{4}$$

со следующими свойствами:

А) Соотношение (4) формирует уравнение для определения неизвестной, т.е. $\frac{\partial V}{\partial x_2} \neq 0$;

Б) Соответствующее соотношению (4) двумерное инвариантное многообразие $M = \{(x_1, x_2, \xi) \in R^3 : \ V(x_1, x_2, \xi) = 0\}$ обладает свойством глобального притяжения. Иными словами на любых решениях расширенной системы (2),(3)

$$\lim_{t \to \infty} V(x_1(t), x_2(t), \xi(t)) = 0.$$

Чтобы свойство А было выполнено во всей рассматриваемой области, соотношения (4) будем искать в виде

$$V(x_1, x_2, \xi) = x_2 - \xi - \Phi(x_1) = 0, \tag{5}$$

где переменная ξ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3). Если неопределенные пока функции $\Phi(x_1), U(\xi, x_1)$ выбраны такими, что соотношения (5) становится инвариантным на рассматриваемом решении системы (2),(3), то тогда искомое $x_2(t)$ может быть найдено непосредственно из уравнения (5).

Покажем, что в случае уравнения Льенара существует широкое семейство функций $\Phi(x_1)$, для которых такие соотношения могут быть построены.

Теорема. *Для любой дифференцируемой функции $\Phi(x_1)$ существуют управление $U(\xi, x_1)$ такое, что равенство (5) выполняется тождественно на некоторых решениях расширенной системы дифференциальных уравнений* (2),(3).

Доказательство. Введем переменную ε, которая характеризует невязку в формуле (5) на решениях системы (2), (3)

$$x_2(t) - \xi(t) - \Phi(x_1(t)) = \varepsilon(t). \tag{6}$$

Сделаем в уравнениях (2) замену переменных. Перейдем по формуле (6) от переменной x_2 к переменной ε. Дифференцируя (6) в силу системы (2), (3), получаем дифференциальные уравнения для отклонений

$$\dot{\varepsilon} = \dot{x}_2 - \Phi'(x_1)\dot{x}_1 - \dot{\xi}(t) = [F(x_1) - \Phi'(x_1)][\Phi(x_1) + \xi + \varepsilon] - G(x_1) - \dot{\xi}, \qquad (7)$$

где $\Phi'(x_1)$ означает производную по переменной x_1.

Чтобы равенство (5) выполнялось тождественно на некоторых решениях системы (2), (3), достаточно показать, что дифференциальное уравнение (7) допускает тривиальное решение $\varepsilon(t) \equiv 0$.

Для этого зафиксируем вид правой части (3), а именно: оставляя пока свободной функцию $\Phi(x_1)$, положим

$$U(\xi, x_1) = [(F(x_1) - \Phi'(x_1)][\Phi(x_1) + \xi] - G(x_1). \qquad (8)$$

В результате дифференциальное уравнение для отклонения ε становится однородным

$$\dot{\varepsilon} = [F(x_1) - \Phi'(x_1)]\varepsilon, \ \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \qquad (9)$$

а значит допускает тривиальное решение. Утверждение доказано.

Замечание. Таким образом, для любой дифференцируемой функции $\Phi(x_1)$ начальное значение ξ_0 в задаче Коши для уравнения (3) может быть выбрано так, что в момент $t = 0$ выражение (5) окажется верным равенством. В частности, это означает, что при таком выборе начальное значение для отклонения $\varepsilon_0 = 0$. В этом случае равенство (5) на траектории расширенной системы (2), (3) выполняется тождественно, образуя, тем самым, инвариантное соотношение, в котором единственным неизвестным является функция $x_2(t)$.

В общем случае осуществить такой выбор ξ_0 не представляется возможным, поскольку для этого необходимо знать значения $x_2(0)$, которое, вообще говоря, и есть искомой величиной. Чтобы использовать формулу (5) для оценки $x_2(t)$ на любом решении системы (2), (3) требуется из множества функций $\Phi(x_1)$ выбрать такие, при которых тривиальное решение системы дифференциальных уравнений для отклонений (9) обладало бы свойством глобальной асимптотической устойчивости.

4. Экспоненциальное затухание отклонений.

Воспользуемся имеющейся свободой в выборе функции $\Phi(x_1)$, чтобы выполнить свойство Б, а именно – обеспечить асимптотическое стремление к нулю отклонения $\varepsilon(t)$. Уравнение (9) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, его общее решение имеет вид

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left\{\int_0^t [F(x_1(\tau)) - \Phi'(x_1(\tau))]d\tau\right\}.$$

Отсюда следует, что для решения исходной задачи достаточно выбрать функцию $\Phi(x_1)$ из условий отрицательности и расходимости несобственного интеграла

$$\int_0^{\infty}[F(x_1(\tau)) - \Phi'(x_1(\tau))]d\tau.$$

Сузим семейство таких функций, потребовав для любого $t > 0$ выполнения равенства

$$F(x_1(t)) - \Phi'(x_1(t)) = \lambda, \tag{10}$$

где λ – некоторая отрицательная постоянная. В этом случае общее решение уравнения в отклонениях имеет вид

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp \lambda t,$$

следовательно функции $\Phi(x_1)$, удовлетворяющие условию (10), обеспечивают экспоненциальную оценку неизвестной $x_2(t)$.

Условие (10) формирует дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi(x_1)$. Его общее решение имеет вид

$$\Phi(x_1) = \int [F(x_1) + \lambda]dx_1 = P(x_1) + \lambda x_1 + C, \tag{11}$$

где $P(x_1)$ – первообразная функции $F(x_1)$, C - произвольная постоянная. Зная функцию $\Phi(x_1)$, определяем по формуле (8) правую часть дифференциального уравнения (3). В итоге, подставляя полученные результаты в (5), получаем окончательное уравнения наблюдателя

$$\begin{aligned} &x_2 = \xi + P(x_1) + \lambda x_1 + C + O(\exp \lambda t), \\ &\dot{\xi}(t) = \lambda[\Phi(x_1) + \xi] - G(x_1), \ \xi_0 \in R. \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнения (12) определяют семейство наблюдателей, параметризованное постоянными $\lambda < 0, \xi_0, C$. При этом каждый из них обеспечивает экспоненциальное оценивание переменной $x_2(t)$ с показателем затухания, равным $|\lambda|$.

5. Система связанных осцилляторов.

Рассмотрим теперь механическую модель системы, составленную из n осцилляторов, связанных между собой. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x_{i1}} = x_{i2}, \\ &\dot{x_{i2}} = F_i(x_{i1})x_{i2} - G_i(x_{i1}) + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}), \\ &y_i = x_{i1}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{13}$$

Предполагается, что осцилляторы соединены между собой упругими связями с линейными жесткостями $k_{ij}, \ i, j = \overline{1, n}$, а положение каждого из них доступно измерению: $y_i(t) = x_{1i}(t)$. Системы такого рода используются для моделирования сложных колебательных процессов. Например, частный случай уравнения Льенара – уравнение Ван дер Поля широко применяются в медико-биологических исследованиях паттернов человеческого организма. Так одна из моделей сердечной деятельности представлена в виде $n = 2$ связанных осцилляторов, случай $n = 3$ используется для моделировании ходьбы человека [2]. Рассмотрим задачу определения скорости колебаний осцилляторов по известной информации об их положении.

Задача 2. Найти асимптотически точные оценки переменных $x_{i2}(t)$ системы (13) по известным значениям выхода $x_{i1}(t),\ i = \overline{1,n}$.

Решение задачи 2 проведем по описанной выше схеме. Представим неизвестные в виде суммы неопределенных величин

$$x_{i2}(t) = \xi_{i1}(t) + \Phi_i(x_{i1}(t)) + \varepsilon_i(t)\ i = \overline{1,n}, \tag{14}$$

где $\varepsilon_i(t)$ – отклонения, $\xi_i(t)$ – решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi_i} = U_i(\xi_i, x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1}),\ \xi_i(0) = \xi_{i0} \in R,\ i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Правые части системы (15) должны зависеть только лишь от известных величин. В качестве управлений $U_i(\xi_i, x_{11}, x_{21}, ..., x_{n1})$ возьмем функции

$$U_i = [(F_i(x_{i1}) - \Phi_i'(x_{i1})][\Phi_i(x_{i1}) + \xi_i] - G_i(x_{i1}) + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}),\ i = \overline{1,n}. \tag{16}$$

В результате получаем для отклонений n однотипных дифференциальных уравнений вида (9)

$$\dot{\varepsilon_i} = [F_i(x_{i1}) - \Phi_i'(x_{i1})]\varepsilon_i,\ \varepsilon_i(0) = \varepsilon_{i0},\ i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Полагая в правой части (17) коэффициенты при отклонениях равными некоторой отрицательной постоянной λ, получаем аналогичные (10) уравнения для функций $\Phi_i(x_{i1}(t)),\ i = \overline{1,n}$. Используя найденные ранее решения (11), запишем уравнения наблюдателя скоростей системы n связанных осцилляторов

$$\begin{aligned} &x_{i2} = \xi_i + P_i(x_{i1}) + \lambda x_{i1} + C_i + O(\exp\lambda t),\\ &\dot{\xi}(t) = [(F_i(x_{i1}) - \Phi_i'(x_{i1})][\Phi_i(x_{i1}) + \xi_i] - G_i(x_{i1}) + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x_{j1} - x_{i1}), i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения (18) определяют семейство наблюдателей, параметризованное постоянными $\lambda < 0, \xi_0, C$. При этом каждый из них обеспечивает экспоненциальное оценивание переменной $x_2(t)$ с показателем затухания, равным $|\lambda|$. Полученные соотношения предполагается использовать далее в задаче синхронизации колебаний компонент осцилляторной сети по неполной информации, которая актуальна, в частности, для алгоритмов управления рядом медицинских устройств [3].

Цитированная литература

1. *Рейссиг Р., Сан-соне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М. : Наука, 1974. – 319 с.
2. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3–42.
3. *Grudzinski K., Zebrowski J.J.* Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A 336. – 2003. – P. 153–162.
4. *Булдаков Н.С., Самочетова Н.С., Ситников А.В., Суятинов С.И.* Моделирование связей в системе «сердце-сосуды» // Nauka i obrazovaniye, Elektronnyy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal. – 2013. – С. 123.
5. *Справочник по теории автоматического управления*/ Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
6. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. — 1974. -– Вып. 6.
7. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69–76.

References

1. Reyssig, R., San-sone G., Konti R. (1974). *Kachestvennaya teoriya nelineynih differentsial'nyh uravnenij.* Moscow: Nauka (in Russian).
2. Kuznetsov, A.P., Seliverstova, Ye.S., Trubetskov, D.I., Tyuryukina, L.V. (2014). Fenomen uravneniya van der Polya. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dynamika. 22*(4), 3-42 (in Russian).
3. Grudzinski, K., Grudzinski, K., Zebrowski, J.J. (2003). Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. *Physica A 336*(1-2), 153-162.
4. Buldakov, N.S., Samochetova, N.S., Sitnikov, A.V., Suyatinov, S.I. (2013). Modelirovaniye svyazej v serdechno-sosudistoy systeme. *Nauka i obrazovaniye, Elektronnyj nauchno-tekhnicheskiy zhurnal, 123* (in Russian).
5. Ed. Krasovsky, A.A. (1987) *Spravochnik po teoriy avtomatychnoho upravlinnya.* Moscow: Nauka (in Russian).
6. Kharlamov, P.V. (1974). Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mehanika tverdogo tela, 6*, 15-24 (in Russian).
7. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitel'nykh trebovaniy v zadachakh upravleniya. *Trudy IPMM NAN Ukrainy, 29*, 69-76 (in Russian).

V.F. Shcherbak, I.S. Dmytryshyn

Estimation of oscillation velocities of oscillator network.

The study of the collective behavior of multiscale dynamic processes is currently one of the most urgent problems of nonlinear dynamics. Such systems arise on modelling of many cyclical biological or physical processes. It is of fundamental importance for understanding the basic laws of synchronous dynamics of distributed active subsystems with oscillations, such as neural ensembles, biomechanical models of cardiac or locomotor activity, models of turbulent media, etc. Since the nonlinear oscillations that are observed in such systems have a stable limit cycle , which does not depend on the initial conditions, then a system of interconnected nonlinear oscillators is usually used as a model of multiscale processes. The equations of Lienar type are often used as the main dynamic model of each of these oscillators. In a number of practical control problems of such interconnected oscillators it is necessary to determine the oscillation velocities by known data. This problem is considered as observation problem for nonlinear dynamical system. A new method – a synthesis of invariant relations is used to design a nonlinear observer. The method allows us to represent unknowns as a function of known quantities. The scheme of the construction of invariant relations consists in the expansion of the original dynamical system by equations of some controlled subsystem (integrator). Control in the additional system is used for the synthesis of some relations that are invariant for the extended system and have the attraction property for all of its trajectories. Such relations are considered in observation problems as additional equations for unknown state vector of initial oscillators ensemble. To design the observer, first we introduce a observer for unique oscillator of Lienar type and prove its exponential convergence. This observer is then extended on several coupled Lienar type oscillators. The performance of the proposed method is investigated by numerical simulations.

Keywords: *nonlinear observer, invariant relations, nonlinear oscillators.*

В.Ф. Щербак, І.С. Дмитришин

Оцінка швидкості коливань осциляторних мереж.

Розглянуто задачу спостереження для системи взаємопов'язаних осциляторів. В якості математичних моделей кожного осцилятора мережі використовуються рівняння Льєнара – загальна модель нелінійних коливань матеріальної точки. Відповідні системи виникають при моделюванні багатьох біологічних, фізичних процесів, що мають циклічний характер. Запропоновано схему рішення задачі спостереження, що забезпечує отримання експоненційних оцінок швидкості кожного з осциляторів за інформацією про їхній стан. Для побудови відповідного нелінійного спостерігача використаний метод синтезу інваріантних співвідношень, що виражає невідомі як функції від відомих величин.

Ключові слова: *нелінійний спостерігач, інваріантні співвідношення, нелінійні осцилятори.*

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
`dmitrishin.ira@gmail.com`

Получено 18.09.18