

Наукове видання



ISSN 1683 - 4720

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
НАУК УКРАЇНИ

ПРАЦІ
ІНСТИТУТУ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
І МЕХАНІКИ НАН УКРАЇНИ

Том 33

Том 33, 2019

Том 33
2019

Підписано до друку 28.12.2019

Інститут прикладної математики і механіки
НАН України

84100, м. Слов'янск, вул. Добровольського, 1;
тел.: (0626) 66 55 00

Формат 60 x 84 1/8. Ум. адрук. арк. 10.
Друк лазерний. Зам № 5540. Тираж 100 прим.

Надруковано в ТОВ "ТехПринтЦентр"
Адреса: м. Слов'янск, вул. Батюка, 19,
тел.: +38 06262 3 20 99

Праці ІПММ НАН України,

ПРАЦІ
ІНСТИТУТУ
ПРИКЛАДНОЇ
МАТЕМАТИКИ І
МЕХАНІКИ
НАН УКРАЇНИ

Науковий збірник "Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України" публікує оригінальні статті в галузі фундаментальної та прикладної математики. Всі статті проходять рецензування міжнародною редакційною колегією.

Обсяг: 10 друк. арк.

Згідно Наказу Міністерства освіти і науки України від 04.04.2018 року № 326 збірник включено до Переліку наукових фахових видань України.

Головний редактор: Скрипнік І.І. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)

МІЖНАРОДНА РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Апанасов Б.М. (Університет Оклахоми, США)
Бракалова М.А. (Фордемський університет, США)
Бахтін О.К. (Інститут математики НАН України, Україна)
Бойчук О.А. (Інститут математики НАН України, Україна)
Водопьянов С.К. (Інститут математики ім. С.Л. Соболева СО РАН, Росія)
Гольберг А. (Технологічний інститут Холона, Ізраїль)
Гутлянський В. Я. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)
Діаконов К.М. (Університет Барселони, Іспанія)
Діблік Й. (Технічний університет Брно, Чеська Республіка)
Слізаров О.М. (Інститут математики і механіки ім. М.І. Лобачевського, Росія)
Зуєв О.Л. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)
Каранджулов Л.І. (Технічний університет - Софія, Болгарія)
Кісляков С.В. (Санкт-Петербурзьке відділення Математичного інституту ім. В.А. Стеклова РАН, Росія)
Кононов Ю.М. (Донецький національний університет ім. В.Стуса, Україна)
Кореновський А.О. (Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Україна)
Крушкаль С.Л. (Університет ім. Бар-Ілана, Ізраїль)
Ліфланд Е. (Університет ім. Бар-Ілана, Ізраїль)
Маркіна І. (Бергенський університет, Норвегія)
Моторний В.П. (Дніпровський національний університет ім. О. Гончара, Україна)
Насиров С.Р. (Інститут математики і механіки ім. М.І. Лобачевського, Росія)
Несмелова О.В. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна) – **відповідальний секретар**
Плакса С.А. (Інститут математики НАН України, Україна)
Покровський А.В. (Інститут математики НАН України, Україна)
Прохоров Д.В. (Саратовський державний університет, Росія)
Рязанов В.І. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)
Севостьянов Є.О. (Житомирський державний університет ім. І. Франка, Україна)
Скляр Г. М. (Інститут математики Щецинського університету, Польща)
Чайченко С.О. (Донбаський державний педагогічний університет, Україна)
Чуйко С.М. (Донбаський державний педагогічний університет, Україна)
Шевченко В.П. (Донецький національний університет ім. В.Стуса, Україна)
Шишков А.Є. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна)
Щербак В.Ф. (Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Україна) – **заступник головного редактора**
Щербаков В.О. (Інститут математики і інформатики АНМ, Молдова)
Якубчик Б. (Інститут математики ПАН, Польща)

Адреса редколегії: 84100 Слов’янск, вул. Добровольського, 1
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Тел. (0626) 66 55 00

Затверджено до друку Вченою радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України
27.12.2019 протокол № 12

Свідectво про реєстрацію: серія KB № 22887-12787 ПР від 03.07.2017 р.

© Інститут прикладної математики і механіки НАН України, 2019

The journal "Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine" is devoted to the publication of original papers in pure and applied mathematics, and is reviewed and edited by an international editorial board.

Volume: 10 prints. the arch.

According to the Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated 04.04.2018 No. 326 the journal is included in the List of scientific professional editions of Ukraine

Editor-in-Chief: Skrypnik I. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)

INTERNATIONAL EDITORIAL BOARD

Apanasov B. (The University of Oklahoma, USA)
Brakalova M. (Fordham University, USA)
Bakhtin A. (Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Boichuk O. (Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Vodopyanov S. (Sobolev Institute of Mathematics SB of the RAS, Russia)
Golberg A. (HIT-Holon Institute of Technology, Israel)
Gutlyanskii V. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Dyakonov K. (University of Barcelona, Spain)
Diblik J. (Brno University of Technology, Czech Republic)
Elizarov A. (N.I. Lobocevskii Institute of Mathematics and Mechanics, Russia)
Zuyev O. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Karandzhulov L. (The Technical University of Sofia, Bulgaria)
Kislyakov S. (St. Petersburg Department of Steklov Mathematics Institute of the RAS, Russia)
Kononov Yu. (Vasyl' Stus Donetsk National University, Ukraine)
Korenovskiy A. (Odessa I.I. Mechnikov National University, Ukraine)
Krushkal S. (Bar-Ilan University, Israel)
Liflyand E. (Bar-Ilan University, Israel)
Markina I. (The University of Bergen, Norway)
Motornyi V. (Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine)
Nasyrov S. (N.I. Lobocevskii Institute of Mathematics and Mechanics, Russia)
Nesmelova O. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine) – **Executive Secretary**
Plaksa S. (Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Pokrovskii A. (Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Prokhorov D. (Saratov State University, Russia)
Ryazanov V. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Sevost'yanov E. (Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine)
Sklyar G. (The Institute of Mathematics University of Szczecin, Poland)
Chaichenko S. (Donbas State Pedagogical University, Ukraine)
Chuiiko S. (Donbas State Pedagogical University, Ukraine)
Shevchenko V. (Vasyl' Stus Donetsk National University, Ukraine)
Shishkov A. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine)
Shcherbak V. (Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Ukraine) –**Deputy Editor-in-Chief**
Shcherbacov V. (Institute of Mathematics and Computer Science of the ASM, Moldova)
Jakubczyk B. (Institute of Mathematics of the PAS, Poland)

Editorial Address: 84100 Slovyansk, Dobrovolsky str., 1
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine
Tel. (0626) 66 55 00

Approved for publication by the Academic Council of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, December 27, 2019 protocol 12
Certificate of registration: series KB No. 22887-12787 IIP from 07.03.2017.

© Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, 2019

Том 33

Слов'янськ, 2019

Заснований у 1997 р.

ПРАЦІ
ІНСТИТУТУ
ПРИКЛАДНОЇ
МАТЕМАТИКИ
І МЕХАНІКИ
НАН УКРАЇНИ

З М І С Т

<i>Георгій Дмитрович Суворов (до сторіччя від дня народження) .</i>	3
<i>Пам'яті Сергія Яковича Мазна (1949–2018)</i>	10
<i>V.P. Baksa, A.I. Bandura, O.B. Skaskiv</i> Analogs of Fricke's theorems for analytic vector-valued functions in the unit ball havin bounded L -index in joint variables	16
<i>О.К. Бахтін, Я.В. Заболотний</i> Задача про добуток внутрішніх радіусів чотирьох неперетинних областей, деякі з яких симетричні відносно одиночного кола	27
<i>М.В. Войтович</i> Неперервність слабких розв'язків нелінійних рів- нянь четвертого порядку з підсиленою еліптичністю через потен- ціали Вольфа	33
<i>С.В. Волков, В.І. Рязанов</i> Про відображення скінченного спотво- рення довжини на риманових поверхнях	50
<i>V. Gutlyanskii, O. Nesmelova, V. Ryazanov, A. Yefimushkin</i> Boundary value problems for the generalized analytic and harmonic functions	66

<i>I.B. Денег</i> Оцінка добутків внутрішніх радіусів областей з додатковою умовою симетрії	83
<i>Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак</i> Асимптотичне оцінювання стану та жорсткості осцилятора ван дер Поля	91
<i>I.C. Канарська</i> Алгоритми, що реалізують теоретико-множинні операції на таблицях та мультитаблицях	100
<i>Н.Д. Кахута, О.С. Сенченко</i> Використання повного образу та обмеження в дослідженні властивостей деяких сигнатурних операцій табличних алгебр	112
<i>Ю. М. Кононов, В.Ю. Василенко</i> Про стійкість обертання під дією постійного моменту дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі, що чинить опір	122
<i>Ю.М. Кононов, Я.І. Святенко</i> Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа	132
<i>М.В. Краснощок</i> Задача оптимального керування для рівняння фільтрації з пам'яттю	142
<i>A. Pogorui, T. Kolomiets</i> Some algebraic properties of complex Segre quaternions	158
<i>S.V. Sapunov</i> Collectives of automata on infinite grid graph with deterministic vertex labeling	170
<i>Є.О. Севостьянов, С.О. Скворцов, Н.С. Ількевич</i> Про поведінку обернених гомеоморфізмів в термінах простих кінців	188
<i>С.М. Чуйко, Я.В. Калініченко, Н.В. Попов</i> Про розв'язність виродженої нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі	204
<i>С.М. Чуйко, О.В. Несмелова</i> Про положення рівноваги матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі	218

Георгій Дмитрович Суворов
(до сторіччя від дня народження)



Г.Д. Суворов

17 травня 2019 року виповнилося 100 років від дня народження видатного математика, члена-кореспондента Академії наук України, Суворова Георгія Дмитровича.

Г.Д. Суворов (1919–1984) був засновником відділу теорії функцій ІПММ НАН України та, практично одночасно, з 1966 року організатором і першим завідувачем кафедри математичного аналізу і теорії функцій Донецького державного університету.

Під його безпосереднім керівництвом виник і регулярно (раз у два роки) проходив Донецький Колоквіум з теорії квазіконформних відображень та їх узагальнень, який мав широку популярність в колишньому Союзі. Праці Колоквіуму акумулювали в собі найновіші досягнення з теорії відображень в СРСР. Вони мали найвищий світовий рівень.

Г.Д. Суворов народився 17.05.1919 у м. Саратові в сім'ї робітника. Закінчив фізико-математичний факультет Томського державного університету в червні 1941 року. Відразу після цього пішов на фронт, учасник Великої вітчизняної війни. У 1941–1946 роках служив в інженерних військах. За військову службу був нагороджений трьома медалями. Демобілізувався в травні 1946 року.

Потім, з жовтня 1946, він навчався в аспірантурі Томського державного університету під керівництвом відомого фахівця з теорії функцій комплексної змінної П.П. Куфарєва. Результатом даного періоду наукової роботи Г.Д. Суворова стала кандидатська дисертація, присвячена теорії простих кінців послідовності областей, що сходяться до ядра, яка була захищена ним у 1951 році.

У наступних своїх дослідженнях Г.Д. Суворов встановив деякі метричні і топологічні властивості, загальні для конформних, квазіконформних, гармонійних та інших відображень. Результати лягли в основу його докторської дисертації “Основні властивості деяких класів топологічних відображень плоских областей із змінними межами”, яка була захищена ним в Інституті математики СБ АН СРСР в березні 1961 року. В 1951–1966 роках Г.Д. Суворов пройшов шлях від асистента до професора, а потім і завідувача кафедрою теорії функцій Томського державного університету.

Таким чином, ставши провідним фахівцем в області теорії відображень, у 1965 році Г.Д. Суворов за рекомендацією віце-президента (1957–1976) АН СРСР академіка М.А. Лаврентьєва, який сам був одним із найбільших фахівців в області теорії функцій комплексної змінної зі світовим ім'ям, був обраний членом-кореспондентом Академії наук України та переїхав до Донецька. Разом з ним в Донецьк переїжджають к.ф.-м.н. І.С. Овчинніков, аспірант В.Ф. Луференко, а також студенти 3-го курсу В.М. Міклюков, Л.М. Карташов і В.І. Кругліков.

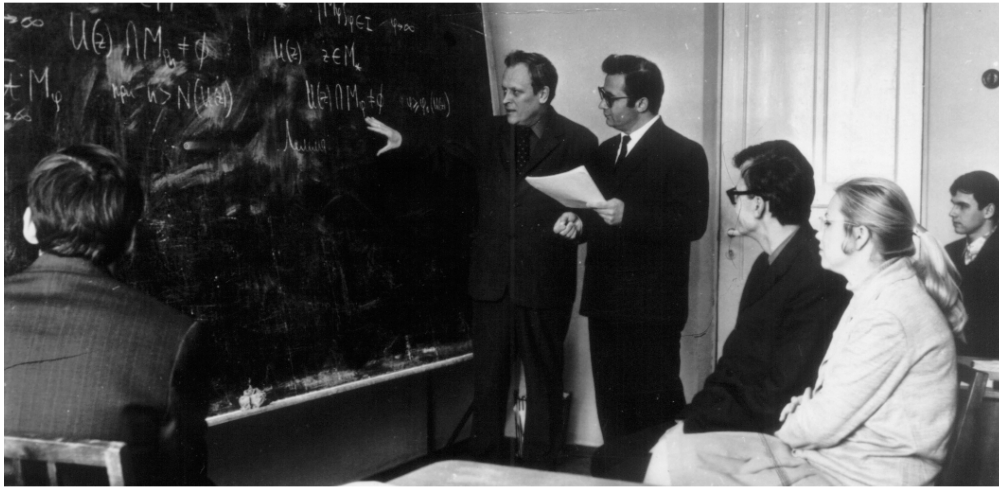
Роботи Г.Д. Суворова, його учнів В.Ф. Галло, О.В. Іванова, Б.П. Куфарєва, В.Ф. Луференко, В.М. Міклюкова, І.С. Овчиннікова, Ю.В. Помельнікова та інших були присвячені дослідженню відображень, які є прямими узагальненнями квазіконформних відображень. Серед учнів Г.Д. Суворова – 14 кандидатів, з них – три доктори наук (Б.П. Куфарєв, В.М. Міклюков, І.С. Овчинніков). Г.Д. Суворов є автором близько 80 робіт і 6 монографій. Роботи Г.Д. Суворова лягли в основу нового наукового напрямку, присвяченого вивченню плоских і просторових відображень з обмеженим інтегралом Діріхле та їх узагальнень, де йому належить новий метод “принцип довжини – площі”.

Ним було розвинено теорію простих кінців послідовності плоских областей із змінними межами, що сходяться до невинроджені ядру, яка аналогічна теорії Каратеодорі, отримані двосторонні оцінки спотворення відносних відстаней та встановлено геометричні умови рівномірної збіжності послідовності топологічних відображень у замкнутих областях, доведено також теореми про спотворення ліній рівня, граничних дуг, площ приграничних кілець, теореми типу покриття.

Г.Д. Суворов (спільно з його учнем О.В. Івановим) був творцем ще одного напрямку, що лежить на стику теорії аналітичних функцій і теоретико-множинної топології та пов'язаного з топологічними аспектами граничної відповідності при конформних відображеннях. Зокрема, він довів, що безліч метризованих конформно-інваріантних бікомпактних розширень будь-якої області нескінченно.

Г.Д. Суворов вважав, що “сьогодні ідеалом (та метою!) в теорії функцій можна вважати досягнення такої ситуації, коли ми будемо мати у своєму розпорядженні велику кількість різних класів функцій та для кожного класу мати розроблений

каталог властивостей (метричних і топологічних)”, і його наукова школа в значній мірі досягла успіху при вирішенні цього надзавдання.



Г.Д. Суворов з В.Ф. Галло під час наукового семінару

Г.Д. Суворов дивним чином поєднував наукову і педагогічну діяльність. Особливо яскраво це проявлялося в його курсі “Основи наукових досліджень”, який він читав студентам Донецького університету, вміло розкриваючи творчі секрети “винаходи в математиці”. На основі цього курсу, вже після його смерті, була підготовлена монографія “Про мистецтво математичного дослідження”, яка вдало поєднувала як його особистий досвід, так і досвід провідних учених усього світу в математичній творчості.

Крім інтересу до математики, Г.Д. Суворов захоплювався нумізматиною, лижними та велосипедними прогулянками, зібрав велику колекцію медалей та книг.

СПИСОК ПРАЦЬ Георгія Дмитровича Суворова

1. *Суворов Г.Д.* О семействах вложенных друг в друга областей // Труды Сиб. физ.-техн. ин-та при ун-те. – 1948. – Т. 27. – С. 61–62.
2. *Суворов Г.Д.* Простые концы последовательности плоских областей, сходящейся к ядру // Матем. сб. – 1953. – Т. 33 (75). – С. 73–100.
3. *Суворов Г.Д.* On the Prime Ends of a Sequence of Plane Regions Converging to a Nucleus // Trans. Amer. Math. Soc. – 1955. – Vol. 1, No. 2. – С. 67–93.
4. *Суворов Г.Д.* Замечание к одной теореме М.А. Лаврентьева // Учен. зап. ун-та, Томск. – 1955. – Т. 25. – С. 3–8.
5. *Суворов Г.Д.* О непрерывности в замкнутом круге функций регулярных в открытом круге // Успехи матем. наук. – 1956. – Т. 11, No. 3(69). – С. 177–179.
6. *Суворов Г.Д.* О порядке равномерной непрерывности одного класса однолистных отображений в замкнутых областях // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 107. – С. 2–23.

7. Суворов Г.Д. О непрерывности однолистных отображений произвольных замкнутых областей // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 108. – С. 777–779.
8. Суворов Г.Д. О непрерывности однолистных отображений произвольных замкнутых областей // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, М. – 1956. – Т. 1. – С. 103–104.
9. Суворов Г.Д. Теорема в областях с разрезами // Доклады VII научн. конф. ун-та, посвящ. 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции, Томск. – 1957. – No. 2. – С. 14–15.
10. Суворов Г.Д., Прилепко А.И. Теорема о сходящихся последовательностях аналитических функций // Доклады VII научн. конф. ун-та, посвящ. 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции, Томск. – 1957. – No. 2. – С. 17.
11. Суворов Г.Д. Об искажении расстояний при однолистных отображениях замкнутых областей // Матем. сб. – 1958. – Т. 45, No.2. – С. 159–180; 1959. – Т. 48, No. 2. – С. 251–252.
12. Суворов Г.Д. К теории простых концов последовательности плоских областей, сходящейся к ядру // Труды Томского ун-та. – 1959. – Т. 144. – С. 22–26.
13. Суворов Г.Д., Ионин В.К. О компонентах множеств уровня функции-расстояния до плоского континуума // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 129, No. 3. – С. 496–498.
14. Суворов Г.Д., Прилепко А.И. Одна теорема существования для сходящихся последовательностей аналитических функций // Успехи матем. наук. – 1959. – Т. 14, No. 1. – С. 215–218.
15. Суворов Г.Д. Соответствие границ при топологических отображениях плоских областей с переменными границами // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 124, No. 4. – С. 722–746.
16. Суворов Г.Д. Павел Парфентьевич Куфарев (к 50-летию со дня рождения) // Труды Томского ун-та. – 1959. – С. 144.
17. Суворов Г.Д. Исправление к статье “Об искажении расстояний при однолистных отображениях, замкнутых односвязных областей” // Матем. сб. – 1959. – Т. 48 (90), No. 2.
18. Суворов Г.Д. Искажение расстояний при однолистных Q -квазиконформных отображениях плоских областей // Сиб. матем. журнал. – 1960. – Т. 1, No. 3. – С. 492–522.
19. Суворов Г.Д. К вопросу о геометрических условиях, обеспечивающих равномерную сходимость последовательности топологических отображений в плоской области // Докл. научн. конф. по теорет. и прикл. вопр. матем. и мех., Томск. – 1960. – С. 40–41.
20. Суворов Г.Д. Основная теорема о соответствии границ при топологических отображениях класса $\tilde{B}L_k$ плоских областей с переменными границами // Докл. научн. конф. по теорет. и прикл. вопр. матем. и мех., Томск. – 1960. – С. 39–40.
21. Суворов Г.Д. Некоторые топологические свойства областей, граница которых содержит простую дугу Жордана // Труды Томского ун-та. – 1961. – Т. 155. – С. 36–41.
22. Суворов Г.Д. Принцип длины и площади для Q -квазиконформных отображений // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 140, No. 6. – С. 1267–1269.
23. Суворов Г.Д. Основные свойства некоторых общих классов топологических отображений плоских областей с переменными границами // Успехи матем. наук. – 1962. – Т. 17, No. 3. – С. 221–226.
24. Суворов Г.Д., Кузик Г.А. Элементарные “конформные” отображения, осуществляемые решениями простейших систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Докл. 3-й Сиб. конф. по матем. и мех., Томск. – 1962. – С. 32.
25. Суворов Г.Д. Topological mappings of plane regions with variable boundaries. Abstracts of short communications // Intern. Congress Math., Stockholm. – 1962.
26. Суворов Г.Д. Однолистные отображения плоских областей и множества простых концов области обобщенной меры нуль // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 152, No. 2. – С. 296–298.
27. Суворов Г.Д. Принцип длины и площади для внутренних Q -квазиконформных отображений // Труды Томского ун-та. – 1963. – Т. 169. – С. 18–23.
28. Суворов Г.Д. Общие свойства плоских топологических отображений областей с переменными границами // Сборник тезисов докладов I научной сессии вузов, объединенных западносибирским советом по координации научно-исследовательской работы, Томск, 1963.
29. Суворов Г.Д. О роли разных форм обучения и стимулирования студенческого научного творчества // Вопросы воспитания и преподавания в университете: Сборник статей. – Л., 1964.

30. Суворов Г.Д. Метрические свойства плоских и пространственных отображений в замкнутых областях // Докл. 3-й Сиб. конф. по матем. и мех., Томск. – 1964. – С. 15–18.
31. Суворов Г.Д. Метрические свойства плоских однолистных отображений замкнутых областей // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 157, No. 4. – С. 802–805.
32. Суворов Г.Д., Бакланов М.В. О замкнутости некоторых классов отображений относительно равномерной сходимости // Докл. 3-й Сиб. конф. по матем. и мех., Томск. – 1964. – С. 34–35.
33. Суворов Г.Д. О непрерывной сходимости в замкнутом ядре последовательности отображений класса $\tilde{BL}_k$ // Труды Томского ун-та. – 1964. – Т. 175. – С. 23–28.
34. Суворов Г.Д. О равномерной сходимости последовательности плоских топологических отображений класса $\tilde{BL}_k$ // Труды Томского ун-та. – 1964. – Т. 175. – С. 12–22.
35. Суворов Г.Д. Основная теорема о соответствии границ для последовательности топологических отображений класса BL_k плоских областей // Сиб. матем. журнал. – 1964. – Т. 5, No. 5. – С. 1152–1162.
36. Суворов Г.Д., Овчинников И.С. Преобразования интеграла Дирихле и пространственные отображения // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 154, No. 3. – С. 523–526.
37. Суворов Г.Д. О роли разных форм обучения в стимулировании студенческого научного творчества // Вопросы воспитания и преподавания в университете. Сборник статей. – Л., 1964.
38. Суворов Г.Д. Семейства плоских топологических отображений. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1965.
39. Суворов Г.Д., Бакланов М.В. Искажение относительных расстояний в замкнутых областях при топологических отображениях класса $BL(\lambda)$ в конформно-инвариантной метрике // Труды Томского ун-та. – 1965. – Т. 182. – С. 15–26.
40. Суворов Г.Д. Метрические свойства плоских и пространственных отображений в замкнутых областях // Тезисы докл. Междунар. конф. по теории аналит. функции, Ереван. – 1965. – С. 59.
41. Суворов Г.Д. Метрические свойства плоских однолистных отображений замкнутых областей // Труды Томского ун-та. – 1965. – Т. 182. – С. 46–58.
42. Суворов Г.Д., Бакланов М.В. О замкнутости некоторых классов отображений относительно равномерной сходимости // Труды Томского ун-та. – 1965. – Т. 182. – С. 3–14.
43. Суворов Г.Д., Овчинников И.С. Преобразования интеграла Дирихле и пространственные отображения // Сиб. матем. журнал. – 1965. – Т. 6, No. 6. – С. 1292–1314.
44. Суворов Г.Д., Кузик Г.А. Расширенное понятие квазиконформности плоского отображения и линейные системы дифференциальных уравнений смешанного типа // Тезисы докл. Междунар. конф. по теории аналит. функций, Ереван. – 1965. – С. 33–34.
45. Суворов Г.Д., Кузик Г.А. Расширенное понятие квазиконформности плоского отображения и линейные системы дифференциальных уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР. – 1966. – Т. 168, No. 2. – С. 280–283.
46. Суворов Г.Д., Кузик Г.А. Расширенное понятие квазиконформности плоского отображения и линейные системы дифференциальных уравнений смешанного типа // Тезисы тр. науч. сообщений Междунар. конгресса математиков, Секция 4, М. – 1966. – С. 60–61.
47. Суворов Г.Д. Метрические свойства плоских и пространственных отображений // Тезисы докл. Секции матем. и мех. науч. сессии Донецкого научного центра АН УССР, Донецк, 1967.
48. Суворов Г.Д., Галло В.Ф. Множество моногенности кольцевых отображений // Тезисы докл. секции матем. и мех. науч. сессии Донецкого научного центра АН УССР, Донецк, 1967.
49. Суворов Г.Д. Метрические свойства отображений с ограниченным интегралом Дирихле. “Итоги исследований по математике и механике за 50 лет, 1917–1967”. – В кн.: Труды межвузовской научной конференции, посвященной 50-летию Великой Октябрьской социалистической революции, Томск, 1967.
50. Суворов Г.Д. Равнотепенная устойчивость конформных отображений замкнутых областей // Укр. матем. журн. – 1968. – Т. 20, No. 1.
51. Суворов Г.Д. Множини моногенності диференційованих плоских кільцевих відображень // Доповіді АН УРСР, Сер. А. – 1968. – No. 2.

52. Суворов Г.Д., Кузик Г.А. Расширенное понятие квазиконформности и системы дифференциальных уравнений смешанного типа // Труды Томск. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1968. – С. 200.
53. Суворов Г.Д. Первый Донецкий коллоквиум по теории квазиконформных отображений и ее обобщениям // Успехи матем. наук. – 1969. – Т. 24, No. 3 (147). – С. 241–242.
54. Суворов Г.Д. Расширения топологических структур и метрические свойства отображений // Proceedings of the J. International Symposium on Extension Theory of Topological Structures and its Applications. VEW Dentsakes Verlag des Wis-senschatlen. Berlin. – 1969. – P. 257–273.
55. Суворов Г.Д. Общность функций искусства и науки в процессе образования и воспитания детей и юношества (роттапринт). – М., Знание, 1970. – С. 1–18.
56. Суворов Г.Д. Теория квазиконформных отображений и примыкающие к ней вопросы // История отечественной математики в четырех томах, Т. 4, кн. 1 (1917–1967). – К.: Наукова думка, 1970. – С. 311–353.
57. Суворов Г.Д., Луференко В.П. Семейства гомеоморфизмов, равностепенно равномерно непрерывных по относительным метрикам // Доклады АН СССР. – 1970. – Т. 162, No. 1. – С. 30–33.
58. Суворов Г.Д. Второй Донецкий коллоквиум по теории квазиконформных отображений и ее обобщениям, посвященный 70-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева // Успехи матем. наук. – 1971. – Т. 24, No. 3(159). – С. 231–232.
59. Суворов Г.Д., Луференко В.П. Про понятія тіла простого кінця в теорії Каратеодорі // Доповіді АН УРСР, Сер. А. – 1971. – No. 2. – С. 106–108.
60. Суворов Г.Д., Луференко В.П. О понятии тела простого конца в теории Каратеодори // Метрические вопросы теории функций и отображений, в. III. – К., Наукова думка, 1971. – С. 71–80.
61. Суворов Г.Д., Луференко В.П. Семейства гомеоморфизмов, относительные метрики и теорема Каратеодори // Сиб. матем. журнал. – 1972. – Т. 13, No. 2. – С. 368–383.
62. Суворов Г.Д. Проблеми підготовки математиків-дослідників // Вісник АН УРСР. – 1972. – No. 11. – С. 62–71.
63. Суворов Г.Д., Миклюков В.М. О существовании и единственности квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками // Дослідження з теорії функцій комплексної змінної та її застосувань (роттапринт). – К., 1972. – С. 45–53.
64. Суворов Г.Д. Бикомпактные расширения топологических пространств и метрическая теория отображений // VI Всесоюзная топологическая конференция, Тбилиси, 2–7 октября 1972 г., Тезисы. – Тбилиси, Мецниереба, 1972. – С. 113.
65. Суворов Г.Д., Цекановский Э.Р. Третий Донецкий коллоквиум по теории квазиконформных отображений и ее обобщениям // Успехи матем. наук. – 1973. – Т. 28, No. 1 (169). – С. 264–266.
66. Суворов Г.Д., Мышкис А.Д. О конформно-инвариантных бикомпактных расширениях плоской односвязной области // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 212, No. 4. – С. 822–82.
67. Суворов Г.Д., Гольдшмидт А.И. Теорема о предельных множествах и неметризуемая бикомпактификация области, инвариантная при конформных отображениях // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 213, No. 5. – С. 1018–1020.
68. Суворов Г.Д. Общность функций искусства и науки в процессе образования и воспитания детей и юношества. Музыкальное воспитание в современном мире // Материалы IX конференции международного общества по музыкальному воспитанию (ИСМЕ). – М., Советский композитор, 1973. – С. 112–125.
69. Суворов Г.Д. Метрична теорія простих кінців плоскої області // Доповіді АН УРСР, Сер. А. – 1974. – No. 7. – С. 608–610.
70. Суворов Г.Д. Донецкі коллоквиум з теорії квазиконформних відображень та її узагальнень // Вісник АН УРСР. – 1974. – No. 3. – С. 89–90.
71. Суворов Г.Д., Луференко В.П. Четвертый Донецкий коллоквиум по теории квазиконформных отображений и ее обобщениям // Успехи матем. наук. – 1975. – Т. 30, No. 3 (183). – С. 207–208.
72. Суворов Г.Д., Галло В.Ф. Множества моногенности плоских непрерывных кольцевых отображений // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 222, No. 3. – С. 523–526.
73. Суворов Г.Д. Относительная метрика и простые концы односвязной области // Метрические вопросы теории функций и отображений, в. VI. – К., Наукова думка, 1975. – С. 116–125.
74. Суворов Г.Д., Гольдшмидт А.И. Предельные множества отображений и неметризуемая би-

- компактификация метрических пространств // Сиб. матем. журнал. – 1976. – Т. 17, No. 1. – С. 58–74.
75. Суворов Г.Д., Помельников Ю.В. Новое семейство конформно-инвариантных метризуемых бикомпактных расширений плоской области // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 235, No. 5. – С. 1017–1019.
 76. Суворов Г.Д., Помельников Ю.В. Бикомпактные расширения плоской односвязной области, инвариантные при конформных расширениях: Тезисы // VII Всесоюзная топологическая конференция, Минск, 1977. – С. 153–154.
 77. Суворов Г.Д. Пятый Донецкий коллоквиум по теории квазиконформных отображений и ее обобщениям // Успехи матем. наук. – 1977. – Т. 32, No. 4 (196). – С. 277–278.
 78. Суворов Г.Д., Иванов О.В., Помельников Ю.В. Конформно-инвариантные бикомпактные расширения односвязной области // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 240, No. 6. – С. 1281–1284.
 79. Суворов Г.Д., Помельников Ю.В. Новое семейство конформно-инвариантных метризуемых бикомпактных расширений плоской области // Сиб. матем. журнал. – 1980. – Т. 24, No. 2. – С. 301–329.
 80. Суворов Г.Д., Иванов О.В., Помельников Ю.В. Полные решетки конформно-инвариантных бикомпактных расширений // Сиб. матем. журнал. – 1981. – Т. 22, No. 6. – С. 1250–1265.
 81. Суворов Г.Д. Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле. – К.: Наукова Думка, 1981.
 82. Суворов Г.Д., Иванов О.В. Задача Дирихле на некоторых конформно-инвариантных бикомпактных расширениях плоской области // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1982. – No. 1. – С. 16–19.
 83. Суворов Г.Д., Иванов О.В. Устойчивые конформно-инвариантные бикомпактные расширения // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1982. – No. 2. – С. 11–14.
 84. Суворов Г.Д., Иванов О.И. Полные решетки конформно-инвариантных компактификаций области. – К.: Наукова Думка, 1982.
 85. Суворов Г.Д. “Обобщенный принцип длины и площади” в теории отображений. – К.: Наукова Думка, 1985.
 86. Суворов Г.Д. Простые концы и последовательности плоских отображений. – К.: Наукова Думка, 1986.
 87. Суворов Г.Д. Об искусстве математического исследования. – Донецк: Изд-во ТЕАН, 1999.

Пам'яті Сергія Яковича Махна (1949–2018)

2 грудня 2019 року виповнюється 70 років від дня народження видатного математика, відомого як в Україні, так і далеко за її межами вченого, доктора фізико-математичних наук, гідного представника України на всіх міжнародних математичних форумах Сергія Яковича Махна.

Сергій Якович Махно народився у 1949 році у м. Сталіно (пізніше – Донецьк) в родині вчителів. Його батько, Яків Данилович Махно, викладав математику в середній школі, мати, Олександра Єпіфанівна – російську мову та літературу.

У 1956 році Сергій пішов у перший клас школи № 30 м. Сталіно, а у п'ятому класі перейшов у СШ № 31. У школі навчався легко. Любив грати в усі спортивні ігри, віддаючи перевагу футболу, взимку пропадав на ковзанці. За власним бажанням у віці 10 років він вступив до музичної школи і навчався грі на фортепіано.

Через півтора року Сергій перейшов до духового оркестру обласного Палацу піонерів та школярів. Там за короткий час не тільки навчився грати на трубі, але й потрапив до основного складу оркестру. Під керівництвом музичного керівника М.П. Денисова оркестр Палацу піонерів був одним з найкращих у Донецьку, успішно брав участь у багатьох конкурсах, а літо проводив у кращих піонерських таборах країни: у “Молодій гвардії” в Одесі, в “Артеці” в Криму та Анапі. Оркестранти грали на всіх заходах у таборі. В “Артеці” пам'ятними були зустрічі і робота оркестру з відомим композитором Д. Б. Кабалевським.

Один з друзів та колег С. Я. Махна, Володимир Деркач, згадує, що він у 1964 році закінчив восьмий клас школи № 27 і перейшов у СШ № 31 м. Донецька. Його сестра вже навчалася у СШ № 31 в одному класі з Сергієм.

Сергій чудово грав на трубі й керував шкільним оркестром. Він (Володимир) до оркестру не мав відношення, тому у школі вони з Сергієм майже не перетиналися, лише на олімпіадах з математики.

“Коли ми закінчували школу у 1966 році, – згадує В. Деркач – був подвійний випуск десятих і одинадцятих класів одночасно, тому вступити до університету було дуже важко. На математичний факультет був конкурс 5 чоловік на місце.



Усний вступний іспит з математики ми складали з Сергієм в один день. Мене вразив його абсолютний спокій. Я теж добре знав математику, але саме слово “іспит” завжди викликало в мене панічний жах. Сергій, мабуть, відчувши моє хвилювання, запитав: – Теорему синусів знаєш? – Знаю. – Теорему косинусів знаєш? – Знаю. – Тоді складеш.”

У підсумку, обидва учасника цього діалогу восени стали студентами механіко-математичного факультету Донецького державного університету (нині – ДонНУ імені Василя Стуса).

В. О. Деркач розповідав, що у вересні вони працювали у колгоспі, а заняття в університеті почалися у жовтні. “В університеті було три групи “чистих” математиків. Ми з Сергієм працювали в парі. Сиділи за однією партою, разом їздили у транспорті, разом ходили в кіно. Нас об’єднувала любов до математики, ми економили гроші на їжі, щоб купити книги з математики. Нас знали усі продавці книжкових крамниць. До речі, бажаючих купувати книги було багато, усім не вистачало, тому ми заздалегідь вивчали тематичні плани друкарень й робили замовлення на рік вперед”.

Кмітливий та активний студент Сергій Махно не розлучався у вузі і з музикою. Грав в основному складі університетського естрадного оркестру.

Але не лише математикою і музикою цікавився Сергій Махно в студентські роки – любив мандрувати, з задоволенням грав у командні види спорту, та не без успіху – навіть залучався до збірної команди університету з футболу. Цікавість до футболу збереглася у Сергія Яковича і в подальшому житті: як глядач він відвідав всі матчі, які відбулися в Донецьку, історичного Чемпіонату Європи з футболу Євро-2012, що проводився у Польщі та Україні. Цікавився історією. Напевно, саме гучне історичне прізвище було тому причиною. Як згадував сам Сергій Якович, ще в студентські роки його цікавила біографія відомого однофамільця, політичного та військового діяча часів Визвольних Змагань Нестора Івановича Махна.

“Ми отримали гарну освіту, – пише Володимир Деркач, – тому що аналіз нам читав Й. І. Гіхман. Лекції були чудові, що сприяло вибору Сергія. В подальшому Й. І. Гіхман став його науковим керівником”.



Перші наукові результати в математиці були отримані С. Я. Махном ще під час навчання в університеті під керівництвом професора Й. І. Гіхмана. Ця наукова співпраця визначила і подальшу професійну діяльність Сергія Яковича.

Після закінчення у 1971 році Донецького державного університету та служби в армії він став аспірантом у Донецькому ІПММ АН УРСР (науковий керівник Й. І. Гіхман) і, водночас, інженером відділу теорії ймовірностей та математичної статистики. Завідувачем відділу був вже на той час видатний вчений Й. І. Гіхман.

З 1973 року і до кінця свого життя, незважаючи на різноманітні непередбачувані зміни, Сергій Якович Махно працював у Донецькому ІПММ НАН України, де він пройшов шлях від аспіранта до завідувача відділу.



За роки наполегливої плідної праці Сергій Якович став відомим фахівцем в галузі теорії ймовірностей і математичної статистики. Його наукові інтереси лежали в області звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь в частинних похідних та стохастичних диференціальних рівнянь, теорії випадкових процесів. Ним було розроблено асимптотичні методи дослідження розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, як у випадку нескінченно зростаючого часу, так і у випадку наявності малого параметру. На відміну від класичних результатів, Сергій Якович розглядав значно ширший клас рівнянь: коефіцієнти таких рівнянь можуть вести себе вкрай нерегулярно – для них можуть не існувати поточкові границі, вони можуть необмежено зростати, для них може не виконуватися умова Ліпшиця.

До основних наукових результатів Сергія Яковича належать результати щодо граничної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь; формули,

що пов'язують стохастичні рівняння Іто зі стохастичними рівняннями з локальним часом; умови існування та єдиності сильних та слабких розв'язків як стохастичних рівнянь Іто, так і стохастичних рівнянь з локальним часом; умови існування та єдиності розв'язків рівнянь в частинних похідних та багато інших.

Результати його наукових досліджень містяться у кандидатській (1975 р.) та докторській (1993 р.) дисертаціях та опубліковані більш ніж у 100 роботах у фахових виданнях як в Україні, так і в інших країнах світу. У 2012 році в серії Академії Наук України “Задачі і методи: математика, механіка, кібернетика” була опублікована монографія Сергія Яковича “Стохастичні рівняння. Граничні теореми”. У 2013 році ним був отриманий диплом на відкриття “Закономірний зв'язок між характером техногенних процесів і сумішшю газів у підземних гірничих виробках” – як результат співпраці з науковцями інших галузей в пошуку шляхів подолання важливої проблеми шахтарського Донбасу – загазованості гірничих виробок.

Не забував Сергій Якович і свою alma mater – Донецький державний університет (пізніше – Донецький національний університет). Він викладав там не одну дисципліну (на рідному математичному, та на інших факультетах), відвідував наукові конференції та семінари, брав участь в редагуванні наукових видань університету, був керівником курсових, дипломних та магістерських робіт студентів ДонДУ, допомагав аспірантам та молодим науковцям ДонДУ. Працював Сергій Якович також в інших університетах Донецька, а наукові зв'язки підтримував, без перебільшення, з усіма спеціалістами в галузі теорії ймовірностей та математичної статистики не тільки міста, а й усього світу.

Авторитет і повагу серед колег та співробітників ІПММ йому принесли такі риси характеру як доброзичливість, небайдужість та зацікавленість до всього оточуючого, його науково-організаційна діяльність.

“З Сергієм ми були знайомі зі студентських років, – пише у спогадах Михайло Карабаш, – і завжди зверталися між собою тільки за ім'ям. Потік 1966 року набору (на 1 рік старший мого), був надзвичайно сильним. Але Сергій виділявся серед однокурсників.

По-справжньому ми познайомилися на семінарах Й. І. Гіхмана. Сергій залишився у моїй пам'яті найактивнішим учасником цих семінарів. Тематика доповідей була вкрай різноманітною, але інтуїція Сергія допомагала йому виділяти ключові моменти і “підводні каміння” проблеми, яка обговорювалася. В наукових дискусіях він був по-доброму задиристий. Від нього надходила не тільки критика, але й конструктивні, часом дуже корисні ідеї.

Для мене це було важливо, тому що я прийшов з функціонального аналізу. Стохастичні парадигми були для мене чимось формальним. Моє ймовірнісне мислення склалося, здебільшого, під впливом цих гострих дискусій, за що я дуже вдячний Сергієві”.

Протягом багатьох років Сергій Якович входив до складу Вченої ради ІПММ НАН України, спеціалізованої ради із захисту дисертацій, з 2003 року очолював відділ теорії ймовірностей та математичної статистики інституту. Упродовж тривалого часу працював членом експертної ради ВАК України.

Свій багатий досвід він передавав аспірантам і студентам провідних вузів Донецька. Студенти з вдячністю згадують свого викладача. Один зі студентів С. Я. Махна – Ілля Карабаш – пише: “Сергій Якович Махно читав спецкурс з додаткових розділів теорії ймовірностей у тій групі статистиків, де я спеціалізувався. Це був, мабуть, 1998 рік. Частина лекцій проходила в ІІММ. Там ми ближче впізнали, що таке дослідницький інститут.

Сергій Якович був життєрадісним, завжди усміхненим викладачем. Студенти дуже поважали його та побоювалися його екзамену. Сергій Якович охоче відповідав на наші питання і мотивував нас їх задавати. Якщо нам вдавалося знайти огріхи в лекції, то Сергій Якович навіть радів: так, отже студенти ще не зовсім заснули.

Сергій Якович був принциповою людиною. Його участь у захисті кандидатських дисертацій виключала формальне відношення до процесу захисту. Він міг задати будь-яке незручне питання. Цікаво було спілкуватися і з учнями Сергія Яковича. Їм, мабуть, передавався його настрій. За п’ять хвилин випадкової розмови в інституті можна було значно поширити свої знання сучасної теорії випадкових процесів”.

Під керівництвом С. Я. Махна були захищені декілька кандидатських і докторських дисертацій, плідно працювала всесвітньо відома школа теорії ймовірностей і математичної статистики, створена в Інституті членом-кореспондентом НАН УРСР Й. І. Гіхманом і яка на 2014 рік нараховувала 5 докторів і понад 50 кандидатів фізико-математичних наук, які проживали та несли світло математичного знання в десяти країнах світу.



Останнім часом увагу С. Я. Махна привертала дослідження актуальних проблем теорії обернених стохастичних рівнянь, стохастичних рівнянь з локальним

часом, принцип великих відхилень для розв'язків різноманітних стохастичних рівнянь.

Наукова діяльність С. Я. Махна продовжувалась і буде продовжена в майбутньому роботою його учнів, одним з яких є автор цих рядків І. Г. Крикун : “Хоча російська агресія 2014 –... років змусила нас покинути рідний Донецьк, навіть розкидала нас по різних країнам, ми намагаємося підтримувати зв'язки. Доля зводила нас з багатьма науковцями, математиками, але, думаю, саме Сергій Якович запам'ятається як фахівець найвищого рівня, людина, що віддана математиці, принципова, яка, при цьому залишалася людиною і доброзичливою – і до колег, і до підлеглих, і до студентів, аспірантів (навіть “чужих” та не дуже старанних). “Треба думати”, “Простих задач вже не залишилося”, “А в кого мені запитати?” – це фрази Сергія Яковича, які зараз я сам іноді використовую при спілкуванні зі студентами. І кожна з них – як фотографія, міні історія, що не потребує роз'яснення і є зрозумілою для кожного викладача...”

Протягом свого життя Сергій Якович допомагав усім, хто до нього звертався. Згадується епізод з розповіді В. О. Деркача. “Після закінчення університету зустрічалися ми рідко й випадково. Виросли наші діти. Моя дочка з чоловіком поїхала до Ізраїлю, де підтвердила першу ступінь у Техніоні і почала писати магістерську дисертацію зі статистики під керівництвом професора Мандельбаума. У 2006 році вона приїхала в Донецьк. У нас було багато часу зайнятися її дисертацією. Коли робота підходила до кінця, я попросив Сергія прочитати її, всього біля 50 сторінок. Сергій не тільки прочитав, але й знайшов в ній помилки, що допомогло суттєво покращити роботу. Я дуже вдячний Сергієві за цю допомогу. Дочка успішно захистила спочатку кандидатську, а потім докторську дисертацію, що дало їй можливість отримати роботу в Гарварді”.

Останні статті Сергія Яковича – це спогади, написані ним у 2018 році незадовго до смерті та присвячені 100-річчю від дня народження його вчителя, видатного математика Й. І. Гіхмана (1918–1985). Ці статті стали нібито подякою вчителю, який розкрив науковий потенціал свого учня.

Видатний вчений, С. Я. Махно був людиною, що віддана своїй Батьківщині, своїй науці, друзям і колегам, а ще люблячим чоловіком і турботливим батьком. Світла пам'ять про Сергія Яковича назавжди залишиться у серцях його рідних, близьких та друзів, учнів та колег, всіх, хто близько знав С. Я. Махна...

Підготував за спогадами учнів та колег І.Г. Крикун

UDC: 517.55

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-1

©2019. V.P. Baksa, A.I. Bandura, O.B. Skaskiv

ANALOGS OF FRICKE'S THEOREMS FOR ANALYTIC VECTOR-VALUED FUNCTIONS IN THE UNIT BALL HAVING BOUNDED $\mathbf{L}$ -INDEX IN JOINT VARIABLES

In this paper, we present necessary and sufficient conditions of boundedness of $\mathbf{L}$ -index in joint variables for vector-functions analytic in the unit ball, where $\mathbf{L} = (l_1, l_2) : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ is a positive continuous vector-function, $\mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} \leq 1\}$. Particularly, we deduce analog of Fricke's theorems for this function class, give estimate of maximum modulus on the skeleton of bidisc. The first theorem concerns sufficient conditions. In this theorem we assume existence of some radii, for which the maximum of norm of vector-function on the skeleton of bidisc with larger radius does not exceed maximum of norm of vector-function on the skeleton of bidisc with lesser radius multiplied by some constant depending only on these radii. In the second theorem we show that boundedness of $\mathbf{L}$ -index in joint variables implies validity of the mentioned estimate for all radii.

MSC: 32A10, 32A17, 32A37, 30H99, 30A05.

Keywords: bounded index, bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables, analytic function, unit ball, local behavior, maximum modulus.

1. Introduction.

This paper is addendum to [1]. There was proposed the definition of $\mathbf{L}$ -index boundedness in joint variables obtained some criteria of $\mathbf{L}$ -index boundedness in joint variables for vector-valued analytic functions in the unit ball. Here we pose the following goal: *to obtain and to prove criteria admitting easy application to system of partial differential equations*. Particularly, we should like to deduce analogs of Fricke's theorem and Hayman's theorem for this function class. The first theorem describes estimate of maximum modulus of entire function having bounded index. It plays important role in the proof of the second theorem. And the second theorem allows to estimate modulus of derivative of some order by moduli of derivatives of lesser order. For vector-valued function we will replace the modulus of the function by the sup-norm. Analog of Hayman's theorem for various classes of analytic functions have many applications in analytic theory of differential equations: entire functions of bounded L -index in direction [2], entire functions of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables [3], analytic functions in the unit ball having bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables [4], entire bivariate vector-valued function of bounded index [5].

2. Notations, definitions and auxiliary propositions.

Here we use notations from [1, 4, 6]. We need some standard notations. Let $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}_+^2$, $\mathbf{1} = (1, 1) \in \mathbb{R}_+^2$, $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$, $|(z, \omega)| = \sqrt{|z|^2 + |\omega|^2}$. For $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, we will use formal notations without violation of the existence of these expressions: $AB = (a_1b_1, a_2b_2)$, $A/B = (a_1/b_1, a_2/b_2)$,

$A^B = (a_1^{b_1}, a_2^{b_2})$, and the notation $A < B$ means that $a_j < b_j$, $j \in \{1, 2\}$; the relation $A \leq B$ is defined in the similar way. For $K = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ let us denote $K! = k_1! \cdot k_2!$. Addition, multiplication by scalar and conjugation in $\mathbb{C}^2$ is defined componentwise. For $z \in \mathbb{C}^2$, $w \in \mathbb{C}^2$ we define $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2$, where $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ is the complex conjugate of w_1, w_2 .

The polydisc $\{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : |z - z_0| < r_1, |\omega - \omega_0| < r_2\}$ is denoted by $\mathbb{D}^2((z_0, \omega_0), R)$, its skeleton $\{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : |z - z_0| = r_1, |\omega - \omega_0| = r_2\}$ is denoted by $\mathbb{T}^2((z_0, \omega_0), R)$, the closed polydisc $\{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : |z - z_0| \leq r_1, |\omega - \omega_0| \leq r_2\}$ is denoted by $\mathbb{D}^2[(z_0, \omega_0), R]$, $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D}^2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. The open ball $\{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : \sqrt{|z - z_0|^2 + |\omega - \omega_0|^2} < r\}$ is denoted by $\mathbb{B}^2((z_0, \omega_0), r)$, the sphere $\{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : \sqrt{|z - z_0|^2 + |\omega - \omega_0|^2} = r\}$ is denoted by $\mathbb{S}^2((z_0, \omega_0), r)$, and the closed ball $\{z \in \mathbb{C}^2 : \sqrt{|z - z_0|^2 + |\omega - \omega_0|^2} \leq r\}$ is denoted by $\mathbb{B}^2[(z_0, \omega_0), r]$, $\mathbb{B}^2 = \mathbb{B}^2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\mathbb{D} = \mathbb{B}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Let $F(z, \omega) = (f_1(z, \omega), f_2(z, \omega))$ be an analytic vector-function in $\mathbb{B}^2$. Then at a point $(a, b) \in \mathbb{B}^2$ the function $F(z, \omega)$ has a bivariate Taylor expansion:

$$F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{kl}(z - a)^k (\omega - b)^m,$$

where $C_{km} = \frac{1}{k!m!} \left(\frac{\partial^{k+m} f_1(z, \omega)}{\partial z^k \partial \omega^m}, \frac{\partial^{k+m} f_2(z, \omega)}{\partial z^k \partial \omega^m} \right) \Big|_{z=a, \omega=b} = \frac{1}{k!m!} F^{(k, m)}(a, b)$.

Let $\mathbf{L}(z, \omega) = (l_1(z, \omega), l_2(z, \omega))$, where $l_j(z, \omega) : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ is a positive continuous function such that

$$\forall (z, \omega) \in \mathbb{B}^2 : l_j(z, \omega) > \frac{\beta}{1 - \sqrt{|z|^2 + |\omega|^2}}, \quad (1)$$

$j \in \{1, 2\}$, where $\beta > \sqrt{2}$ is a some constant.

The norm for the vector-function $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ is defined as the sup-norm:

$$\|F(z, \omega)\| = \max_{1 \leq j \leq 2} \{|f_j(z, \omega)|\}.$$

We write

$$F^{(i, j)}(z, \omega) = \frac{\partial^{i+j} F(z, \omega)}{\partial z^i \partial \omega^j} = \left(\frac{\partial^{i+j} f_1(z, \omega)}{\partial z^i \partial \omega^j}, \frac{\partial^{i+j} f_2(z, \omega)}{\partial z^i \partial \omega^j} \right).$$

An analytic vector-function $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ is said to be of bounded $\mathbf{L}$ -index (in joint variables), if there exists $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ such that

$$\forall (z, \omega) \in \mathbb{B}^2 \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}_+^2 :$$

$$\frac{\|F^{(i, j)}(z, \omega)\|}{i!j!l_1^i(z, \omega)l_2^j(z, \omega)} \leq \max \left\{ \frac{\|F^{(k, m)}(z, \omega)\|}{k!m!l_1^k(z, \omega)l_2^m(z, \omega)} : k, m \in \mathbb{Z}_+, k + m \leq n_0 \right\}. \quad (2)$$

The least such integer n_0 is called the **L**-index in joint variables of the vector-function F and is denoted by $N(F, \mathbf{L}, \mathbb{B}^2)$. The concept of boundedness of **L**-index in joint variables were considered for other classes of analytic functions. They are differed domains of analyticity: the unit ball [4, 6–8], the polydisc [9, 10], the Cartesian product of the unit disc and complex plane [11], n -dimensional complex space [12, 13]. Vector-valued functions of one and several complex variables having bounded index were considered in [14–18].

The function class $Q(\mathbb{B}^2)$ is defined as following: $\forall R \in \mathbb{R}_+^2, |R| \leq \beta, j \in \{1, 2\}$:

$$0 < \lambda_{1,j}(R) \leq \lambda_{2,j}(R) < \infty$$

where

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2} \inf \left\{ \frac{l_j(z, \omega)}{l_j(z_0, \omega_0)} : (z, \omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0, \omega_0), R/\mathbf{L}(z_0, \omega_0)] \right\}, \quad (3)$$

$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2} \sup \left\{ \frac{l_j(z, \omega)}{l_j(z_0, \omega_0)} : (z, \omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0, \omega_0), R/\mathbf{L}(z_0, \omega_0)] \right\}. \quad (4)$$

We need the two following propositions from [1].

Theorem 1. ([1]) *Let $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. An analytic vector-function $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ has bounded **L**-index in joint variables if and only if for every $R \in \mathbb{R}^2, |R| \leq \beta$ there exist $n_0 \in \mathbb{Z}_+, p > 0$ such that for all $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ there exists 2-tuple $(k_0, m_0) \in \mathbb{Z}_+^2, k_0 + m_0 \leq n_0$, satisfying inequality*

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{\|F^{(k,m)}(z, \omega)\|}{k!m!l_1^k(z, \omega)l_2^m(z, \omega)} : k + m \leq n_0, (z, \omega) \in \mathbb{D}^2[(z_0, \omega_0), R/\mathbf{L}(z_0, \omega_0)] \right\} \leq \\ \leq p_0 \frac{\|F^{(k_0, m_0)}(z_0, \omega_0)\|}{k_0!m_0!l_1^{k_0}(z_0, \omega_0)l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Let $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \in Q(\mathbb{B}^2)$. We say that $\mathbf{L}_1 \asymp \mathbf{L}_2$ if there exist two constants $0 < C_1 < C_2 < +\infty$ such that

$$C_1 \mathbf{L}_1(z, w) \leq \mathbf{L}_2(z, w) \leq C_2 \mathbf{L}_1(z, w)$$

for every point $(z, w) \in \mathbb{B}^2$.

Lemma 2. ([1]) *Let $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2), \mathbf{L} \asymp \tilde{\mathbf{L}}, \beta > 1$. An analytic in $\mathbb{B}^2$ vector-function $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ has bounded $\tilde{\mathbf{L}}$ -index in joint variables if and only if, she has bounded **L**-index in joint variables.*

3. Estimate of maximum modulus on the skeleton of analytic vector-function in ball.

For an analytic vector-function $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ we put

$$M(R, (z_0, \omega_0), F) = \max \{ \|F(z, \omega)\| : (z, \omega) \in \mathbb{T}^2((z_0, \omega_0), R) \},$$

where $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$, $R \in \mathbb{R}_+^2$. Then

$$M(R, (z_0, \omega_0), F) = \max \{ \|F(z, \omega)\| : (z, \omega) \in \mathbb{D}^2((z_0, \omega_0), R) \},$$

because the maximum modulus of the analytic vector-function in a closed bidisc is attained on its skeleton.

In theory of functions having bounded index a very important role has Hayman's theorem. It was obtained by W. Hayman [19] for entire functions of one variable having bounded index. Later it was generalized for various classes of analytic functions [6, 9, 11, 20]. This theorem is applicable in analytic theory of partial differential equations [3, 4, 21]. It allows to deduce conditions by the coefficients of equation providing index boundedness of each analytic solution. Moreover, the idea of proof was used to obtain growth estimate for functions from this class. To prove an analogue of Hayman's theorem, we need the following theorem. The theorem gives sufficient conditions by the estimate of maximum modulus on the skeleton of bidisc.

Theorem 3. *Let $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$, $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ be an analytic vector-function. If there exist $R', R'' \in \mathbb{R}_+^2$, $R' < R''$, $|R''| < \beta$ and $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$ such that for each $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$*

$$M\left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)}, (z_0, \omega_0), F\right) \leq p_1 M\left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)}, (z_0, \omega_0), F\right) \quad (6)$$

then F has bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables.

Proof. The current proof is similar to proof for functions analytic in the unit ball in [6]. Suppose that $\mathbf{0} < R' < \mathbf{1} < R''$.

Let $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ be an arbitrary point. We expand the vector-function F in power series

$$F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{k,m} (z - z_0)^k (\omega - \omega_0)^m, \quad (7)$$

where $B_{k,m} = (b_{1,k,m}, b_{2,k,m}) = \left(\frac{f_1^{(k,m)}(z_0, \omega_0)}{k!m!}, \frac{f_2^{(k,m)}(z_0, \omega_0)}{k!m!} \right)$.

Let $\mu(R, (z_0, \omega_0), F) = \max\{\|B_{k,m}\| r_1^k r_2^m : k + m \geq 0\}$ be the maximal term of series (7) and $\nu(R) = \nu(R, (z_0, \omega_0), F) = (\nu_1(R), \nu_2(R))$ be a set of indices such that $\mu(R, (z_0, \omega_0), F) = \|B_{\nu(R)}\| r_1^{\nu_1(R)} r_2^{\nu_2(R)}$,

$$\nu_1(R) + \nu_2(R) = \max\{k + m : k + m \geq 0, \|B_{k,m}\| r_1^k r_2^m = \mu(R, (z_0, \omega_0), F)\}.$$

Then in view of inequality (7) we obtain that for every $|R| < 1 - \sqrt{|z_0|^2 + |\omega_0|^2}$:

$$\mu(R, (z_0, \omega_0), F) \leq M(R, (z_0, \omega_0), F).$$

Then for the given R' and R'' with $0 < |R'| < 1 < |R''| < \beta$ we deduce

$$\begin{aligned} M(R'R, (z_0, \omega_0), F) &\leq \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \|B_{k,m}\| (r'_1 r_1)^k (r'_2 r_2)^m \leq \\ &\leq \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \mu(R, (z_0, \omega_0), F) (r'_1)^k (r'_2)^m = \\ &= \mu(R, (z_0, \omega_0), F) \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} (r'_1)^k (r'_2)^m = \prod_{j=1}^2 \frac{1}{1 - r'_j} \mu(R, (z_0, \omega_0), F). \end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned} \ln \mu(R, (z_0, \omega_0), F) &= \ln \left\{ \|B_{\nu(R)}\| r_1^{\nu_1(R)} r_2^{\nu_2(R)} \right\} = \\ &= \ln \left\{ \|B_{\nu(R)}\| (r_1 r'_1)^{\nu_1(R)} (r_2 r'_2)^{\nu_2(R)} \frac{1}{(r''_1)^{\nu_1(R)} (r''_2)^{\nu_2(R)}} \right\} = \\ &= \ln \left\{ \|B_{\nu(R)}\| (r_1 r'_1)^{\nu_1(R)} (r_2 r'_2)^{\nu_2(R)} \right\} + \ln \left\{ \frac{1}{(r''_1)^{\nu_1(R)} (r''_2)^{\nu_2(R)}} \right\} \leq \\ &\leq \ln \mu(R''R, (z_0, \omega_0), F) - (\nu_1(R) + \nu_2(R)) \ln \min_{1 \leq j \leq 2} r''_j. \end{aligned}$$

Hence, we have

$$\begin{aligned} \nu_1(R) + \nu_2(R) &\leq \frac{1}{\ln \min_{1 \leq j \leq 2} r''_j} (\ln \mu(R''R, (z_0, \omega_0), F) - \ln \mu(R, (z_0, \omega_0), F)) \leq \\ &\leq \frac{(\ln M(R''R, (z_0, \omega_0), F) - \ln (\prod_{j=1}^2 (1 - r_j) \ln M(R'R, (z_0, \omega_0), F)))}{\ln \min_{1 \leq j \leq 2} r''_j} \leq \\ &\leq \frac{1}{\ln \min_{1 \leq j \leq 2} r''_j} (\ln M(R''R, (z_0, \omega_0), F) - \ln M(R'R, (z_0, \omega_0), F)) - \\ &- \frac{\sum_{j=1}^2 \ln(1 - r_j)}{\min_{1 \leq j \leq 2} r''_j} = \frac{1}{\min_{1 \leq j \leq 2} r''_j} \ln \frac{M(R''R, (z_0, \omega_0), F)}{M(R'R, (z_0, \omega_0), F)} - \frac{\sum_{j=1}^2 \ln(1 - r_j)}{\min_{1 \leq j \leq 2} r''_j}. \quad (8) \end{aligned}$$

Put $R = \frac{1}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)}$. Let $N(F, (z_0, \omega_0), \mathbf{L})$ be the $\mathbf{L}$ -index of vector-function F in joint variables at the point (z_0, ω_0) .

Therefore,

$$N(F, (z_0, \omega_0), \mathbf{L}) \leq \nu \left(\frac{1}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)}, (z_0, \omega_0), F \right) = \nu(R, (z_0, \omega_0), F). \quad (9)$$

But

$$M(R''/\mathbf{L}(z_0, \omega_0), (z_0, \omega_0), F) \leq p_1(R', R'') M(R'/\mathbf{L}(z_0, \omega_0), (z_0, \omega_0), F). \quad (10)$$

Thus, in view of (8), (9) and (10) we obtain $\forall (z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$

$$N(F, (z_0, \omega_0), \mathbf{L}) \leq \frac{-\sum_{j=1}^2 \ln(1 - r'_j)}{\ln \min\{r'_1, r'_2\}} + \frac{\ln p_1(R', R'')}{\ln \min\{r'_1, r'_2\}}.$$

Hence, we conclude that F has bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables with $\mathbf{0} < R' < R'' < \mathbf{1} < R'', |R''| < \beta$.

Let us prove the theorem for all $\mathbf{0} < R' < R'', |R''| < \beta$. From (6) one has

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \|F(z, \omega)\| : (z, \omega) \in \mathbb{T}^2 \left((z_0, \omega_0), \frac{2R''}{R' + R''} \frac{R' + R''}{2\mathbf{L}(z_0, \omega_0)} \right) \right\} \leq \\ & \leq p_1 \max \left\{ \|F(z, \omega)\| : (z, \omega) \in \mathbb{T}^2 \left((z_0, \omega_0), \frac{2R''}{R' + R''} \frac{R' + R''}{2\mathbf{L}(z_0, \omega_0)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Put $\tilde{\mathbf{L}}(z, \omega) = \frac{2\mathbf{L}(z, \omega)}{R' + R''}$. We obtain

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \|F(z, \omega)\| : (z, \omega) \in \mathbb{T}^2 \left((z_0, \omega_0), \frac{2R''}{(R' + R'')\tilde{\mathbf{L}}(z_0, \omega_0)} \right) \right\} \leq \\ & \leq p_1 \max \left\{ \|F(z, \omega)\| : (z, \omega) \in \mathbb{T}^2 \left((z_0, \omega_0), \frac{2R''}{(R' + R'')\tilde{\mathbf{L}}(z_0, \omega_0)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

where $\mathbf{0} < \frac{2R'}{R' + R''} < \mathbf{1} < \frac{2R''}{R' + R''}$.

Using the first part of the proof, we get that the vector-function F has bounded $\tilde{\mathbf{L}}$ -index in joint variables. Then by Lemma 2 the vector-function F is a function of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables. $\square$

Using the arguments of the proof of Theorem 3, one can prove the following theorem

Theorem 4. *Let $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^2)$. If analytic vector-function $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ has bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables then for all $R', R'' \in \mathbb{R}_+^2$, $R' < R''$, $|R''| \leq \beta$ there exists $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$ such that for every $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ inequality (6) holds.*

Proof. Let $N(F, \mathbf{L}) = N < +\infty$. Suppose that inequality (6) does not hold i.e. there exist $R' < R''$, $0 < |R'| < |R''| < \beta$, such that for each $p_* \geq 1$ and for some $z_0 = z_0(p_*)$, $\omega_0 = \omega_0(p_*)$

$$M \left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)}, (z_0, \omega_0), F \right) \geq p_* M \left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)}, (z_0, \omega_0), F \right). \quad (11)$$

By Theorem 1, there exists $p_0 = p_0(R'') \geq 1$ such that for every $(z_0, \omega_0) \in \mathbb{B}^2$ and some $(k_0, m_0) \in \mathbb{Z}_+^2$, $k_0 + m_0 \leq N$ (that is $n_0 = N$, see proof of Theorem 1) one has :

$$M \left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)(z_0, \omega_0)}, F^{(k_0, m_0)} \right) \leq p_0 \|F^{(k_0, m_0)}(z_0, \omega_0)\|. \quad (12)$$

We put

$$\begin{aligned} b_1 &= p_0 \lambda_{2,2}^N(R'') N! \left(\sum_{j=1}^2 \frac{(N-j)!}{(r_1'')^j} \right) \left(\frac{r_1'' r_2''}{r_1' r_2'} \right)^N, \\ b_2 &= p_0 \left(\sum_{j=1}^2 \frac{(N-j)!}{(r_2'')^j} \right) \left(\frac{r_2''}{r_2'} \right)^N \max \left\{ 1, \frac{1}{(r_1')^N} \right\}, \end{aligned}$$

and

$$p_* = (N!)^2 p_0 \left(\frac{r_1'' r_2''}{r_1' r_2'} \right)^N + \sum_{k=1}^2 b_k + 1.$$

Let $z_0 = z_0(p_*)$, $\omega_0 = \omega_0(p_*)$, (z_0, ω_0) be a point for which inequality (11) holds and (k_0, m_0) be such that (12) holds and

$$\begin{aligned} M \left(\frac{R'}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)}, (z_0, \omega_0), F \right) &= \|F(z^*, \omega^*)\|, \\ M \left(\frac{R''}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)}, (z_0, \omega_0), F^{(i,j)} \right) &= \|F^{(i,j)}(z_{i,j}^*, \omega_{i,j}^*)\| \end{aligned}$$

for every $(i, j) \in \mathbb{Z}_+^2$, $i + j \leq N$. We apply Cauchy's inequality

$$\|F^{(i,j)}(z_0, \omega_0)\| \leq i!j! \left(\frac{l_1(z_0, \omega_0)}{r_1'} \right)^i \left(\frac{l_2(z_0, \omega_0)}{r_2'} \right)^j \|F(z^*, \omega^*)\| \quad (13)$$

for estimate the difference

$$\begin{aligned} \|F^{(i,j)}(z_{i,j}^*, \omega_{i,j}^*) - F^{(i,j)}(z_1^0, \omega_{i,j}^*)\| &= \left\| \int_{z_1^0}^{z_{i,j}^*} \frac{\partial^{i+j+1} F}{\partial z^{i+1} \partial \omega^j}(\xi, \omega_{i,j}^*) d\xi \right\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{\partial^{i+j+1} F}{\partial z^{i+1} \partial \omega^j}(z_{i+1,j}^*, \omega_{i+1,j}^*) \right\| \frac{r_1''}{l_1(z_0, \omega_0)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Since $(z_1^0, \omega_{i,j}^*) \in \mathbb{D}^2 \left[(z_0, \omega_0), \frac{R''}{\mathbf{L}(z_0, \omega_0)} \right]$, and $|z_{i,j}^* - z_1^0| = \frac{r_1''}{l_1(z_0, \omega_0)}$, $l_1(z_1^0, z_{i,j}^*) \leq \lambda_{2,1}(R'')l_1(z_0, \omega_0)$, $|\omega_{i,j}^* - \omega_2^0| = \frac{r_2''}{l_2(z_0, \omega_0)}$, $l_2(\omega_2^0, \omega_{i,j}^*) \leq \lambda_{2,2}(R'')l_2(z_0, \omega_0)$, and inequality (13) holds with $i = k_0$, $j = m_0$ by Theorem 1 we have

$$\begin{aligned} \|F^{(i,j)}(z_1^0, \omega_{i,j}^*)\| &\leq \frac{i!j!l_1^i(z_1^0, \omega_{j,2}^*)l_2^j(z_1^0, \omega_{j,2}^*)}{k_0!m_0!l_1^{k_0}(z_0, \omega_0)l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)} p_0 \|F^{(k_0, m_0)}(z_0, \omega_0)\| \leq \\ &\leq \frac{i!j!l_1^i(z_0, \omega_0)l_2^j(z_0, \omega_0)\lambda_{2,1}^i(R'')\lambda_{2,2}^j(R'')}{k_0!m_0!l_1^{k_0}(z_0, \omega_0)l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)} p_0 k_0!m_0! \frac{l_1^{k_0}(z_0, \omega_0)l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)}{(r_1')^{k_0}(r_2')^{m_0}} \|F(z^*, \omega^*)\| = \\ &= \frac{i!j!l_1^i(z_0, \omega_0)l_2^j(z_0, \omega_0)\lambda_{2,1}^i(R'')\lambda_{2,2}^j(R'')}{(r_1')^{k_0}(r_2')^{m_0}} \|F(z^*, \omega^*)\|. \end{aligned} \quad (15)$$

From inequalities (14) and (15) it follows that

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{i+j+1} F}{\partial z^{i+1} \partial \omega^j}(z_{i+1,j}^*, \omega_{i+1,j}^*) \right\| &\geq \frac{l_1(z_0, \omega_0)}{r_1''} \{ \|F^{i,j}(z_{i,j}^*, \omega_{i,j}^*)\| - \|F^{i,j}(z_1^0, \omega_{i,j}^*)\| \} \geq \\ &\geq \frac{l_1(z_1^0, \omega_{i,j}^*)}{r_1''} \|F^{i,j}(z_1^0, \omega_{i,j}^*)\| - \frac{p_0 i!j!l_1^{i+1}(z_0, \omega_0)l_2^j(z_0, \omega_0)\lambda_{2,2}^j(R'')}{r_1''(r_1')^{k_0}(r_2')^{m_0}} \|F(z^*, \omega^*)\|. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
\|F^{(k_0, m_0)}(z_{k_0}^*, \omega_{m_0}^*)\| &\geq \frac{l_1(z_0, \omega_0)}{r_1''} \left\| \frac{\partial^{(k_0+m_0)-1} f}{\partial z^{k_0-1} \partial \omega^{m_0}}(z_{k_0-1}^*, \omega_{k_0, m_0}^*) \right\| - \\
&- \frac{p_0(k_0-1)! m_0! l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0) \lambda_{2,1}^{k_0}(R'') \lambda_{2,2}^{m_0}(R'')}{r_1''(r_1')^{k_0} (r_2')^{m_0}} \|F(z^*, \omega^*)\| \geq \\
&\geq \frac{l_1^2(z_0, \omega_0)}{(r_1'')^2} \left\| \frac{\partial^{(k_0+m_0)-2} f}{\partial z^{k_0-2} \partial \omega^{m_0}}(z_{k_0-2}^*, \omega_{k_0, m_0}^*) \right\| - \\
&- \frac{p_0(k_0-2)! m_0! l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0) \lambda_{2,1}^{k_0}(R'') \lambda_{2,2}^{m_0}(R'')}{(r_1'')^2 (r_1')^{k_0} (r_2')^{m_0}} \|F(z^*, \omega^*)\| - \\
&- \frac{p_0(k_0-1)! m_0! l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0) \lambda_{2,1}^{k_0}(R'') \lambda_{2,2}^{m_0}(R'')}{r_1''(r_1')^{k_0} (r_2')^{m_0}} \|F(z^*, \omega^*)\| \geq \\
&\geq \frac{l_1^{k_0}(z_0, \omega_0)}{(r_1'')^{k_0}} \left\| \frac{\partial^{m_0} f}{\partial \omega^{m_0}}(z_0^*, \omega_{m_0}^*) \right\| - \frac{p_0}{(R')^{k_0, m_0}} l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0) \times \\
&\quad \times \lambda_{2,2}^{m_0}(R'') m_0! \frac{(k_0-i)!}{(r_1'')^i} \|F(z^*, \omega^*)\| \geq \\
&\geq \frac{l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)}{(r_1'')^{k_0} (r_2'')^{m_0}} \|F(z_0^*, \omega_0^*) - F(z^*, \omega^*)\| (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2), \tag{16}
\end{aligned}$$

where in view of the inequalities $\lambda_{2,1}(R'') \geq 1$, $\lambda_{2,2}(R'') \geq 1$ and $R'' \geq R'$ we have

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_1 &= \frac{p_0}{(r_1')^{k_0} (r_2')^{m_0}} l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0) \lambda_{2,2}^{m_0}(R'') m_0! \frac{(k_0-1)!}{r_1''} = \\
&= \frac{l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)}{(r_1'')^{k_0} (r_2'')^{m_0}} \left(\frac{R''}{R'} \right)^{k_0, m_0} p_0 \lambda_{2,2}^{m_0}(R'') m_0! \frac{(k_0-1)!}{r_1''} \leq \frac{l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)}{(r_1'')^{k_0} (r_2'')^{m_0}} b_1, \\
\tilde{b}_2 &= \frac{p_0}{(R')^{k_0, m_0}} l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0) \frac{1}{(r_1'')^{k_0}} \frac{(m_0-1)!}{r_2''} \leq \frac{l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)}{(r_1'')^{k_0} (r_2'')^{m_0}} b_2.
\end{aligned}$$

Thus, (16) implies that:

$$\begin{aligned}
\|F^{(k_0, m_0)}(z_{k_0, m_0}^*, \omega_{k_0, m_0}^*)\| &\geq \frac{l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)}{(r_1'')^{k_0} (r_2'')^{m_0}} \|F(z^*, \omega^*)\| \times \\
&\times \left\{ \frac{\|F(z_0^*, \omega_0^*)\|}{\|F(z^*, \omega^*)\|} - (b_1 + b_2) \right\}.
\end{aligned}$$

But in view of (11) and a choice of p_* , we have $\frac{\|F(z_0^*, \omega_0^*)\|}{\|F(z^*, \omega^*)\|} \geq p_* > b_1 + b_2$. Thus, in view of (12) and (13) we obtain

$$\begin{aligned} \|F^{(k_0, m_0)}(z_{k_0, m_0}^*, \omega_{k_0, m_0}^*)\| &\geq \frac{l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)}{(r_1'')^{k_0} (r_2'')^{m_0}} \|F(z^*, \omega^*)\| \{p_* - (b_1 + b_2)\} \geq \\ &\geq \frac{l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)}{(r_1'')^{k_0} (r_2'')^{m_0}} \{p_* - (b_1 + b_2)\} \frac{\|F^{(k_0, m_0)}(z_0, \omega_0)\| (R')^{k_0, m_0}}{k_0! m_0! l_1^{k_0}(z_0, \omega_0) l_2^{m_0}(z_0, \omega_0)} \geq \\ &\geq \left(\frac{r_1' r_2'}{r_1'' r_2''} \right)^N \{p_* - (b_1 + b_2)\} \frac{\|F^{(k_0, m_0)}(z_{k_0, m_0}^*, \omega_{k_0, m_0}^*)\|}{p_0 (N!)^2}. \end{aligned}$$

Hence, we have $p_* \leq p_0 \left(\frac{r_1' r_2'}{r_1'' r_2''} \right)^N (N!)^2 + \sum_{j=1}^2 b_j$, but this contradicts the choice of p_* . $\square$

References

1. Baksa, V.P. (2019). Analytic vector-functions in the unit ball having bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables. *Carpathian Mathematical Publications*, 11(2), 213-227.
2. Bandura, A., Skaskiv, O. (2018). Boundedness of the L -index in a direction of entire solutions of second order partial differential equation. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.*, 22(2), 223-234.
3. Bandura, A., Skaskiv, O. (2019). Analog of Hayman's Theorem and its Application to Some System of Linear Partial Differential Equations. *J. Math. Phys., Anal., Geom.*, 15(2), 170-191.
4. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B. (2017). Analytic functions in the unit ball of bounded $\mathbf{L}$ -index: asymptotic and local properties. *Mat. Stud.*, 48(1), 37-73.
5. Nuray, F., Patterson, R.F. (2018). Vector-valued bivariate entire functions of bounded index satisfying a system of differential equations. *Mat. Stud.*, 49(1), 67-74.
6. Bandura, A., Skaskiv, O. (2018). Sufficient conditions of boundedness of $\mathbf{L}$ -index and analog of Hayman's Theorem for analytic functions in a ball. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 63(4), 483-501.
7. Bandura, A., Skaskiv, O. (2019). Analytic functions in the unit ball of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables and of bounded L -index in direction: a connection between these classes. *Demonstr. Math.*, 52(1), 82-87.
8. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B. (2018). Partial logarithmic derivatives and distribution of zeros of analytic functions in the unit ball of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables. *Ukr. Matem. Visn.*, 15(2), 177-193. Translation in (2019). *J. Math. Sci.*, 239(1), 17-29.
9. Bandura, A., Petrechko, N., Skaskiv, O. (2018). Maximum modulus in a bidisc of analytic functions of bounded $\mathbf{L}$ -index and an analogue of Hayman's theorem. *Mat. Bohemica*, 143(4), 339-354.
10. Bandura, A.I., Petrechko, N.V., Skaskiv, O.B. (2016). Analytic in a polydisc functions of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables. *Mat. Stud.*, 46(1), 72-80.
11. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B., Tsvigun, V.L. (2018). Some characteristic properties of analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables. *Bukovyn. Mat. Zh.*, 6(1-2), 21-31.
12. Bandura, A., Skaskiv, O. (2018). Asymptotic estimates of entire functions of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables. *Novi Sad J. Math.*, 48(1), 103-116.
13. Bandura, A.I., Skaskiv, O.B. (2019). Exhaustion by balls and entire functions of bounded $\mathbf{L}$ -index in joint variables. *Ufa Mat. Zh.*, 11(1), 99-112. Translation in (2019) *Ufa Math. J.*, 11(1), 100-113.
14. Bordulyak, M.T., Sheremeta, M.M. (2011). Boundedness of l -index of analytic curves. *Mat. Stud.*, 36(2), 152-161.
15. Heath, L.F. (1978). Vector-valued entire functions of bounded index satisfying a differential equation. *Journal of Research of NBS*, 83B(1), 75-79.

16. Roy, R., Shah, S.M. (1986). Growth properties of vector entire functions satisfying differential equations. *Indian J. Math.*, 28(1), 25-35.
17. Roy, R., Shah, S.M. (1986). Vector-valued entire functions satisfying a differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 116(2), 349-362.
18. Sheremeta, M. (2011). Boundedness of $l - M$ -index of analytic curves. *Visnyk Lviv Un-ty. Ser. Mech.-Math.*, 75, 226-231.
19. Hayman, W.K. (1973). Differential inequalities and local valency. *Pacific J. Math.*, 44(1), 117-137.
20. Sheremeta, M.N., Kuzyk, A.D. (1992). Logarithmic derivative and zeros of an entire function of bounded l -index. *Sib. Math. J.*, 33(2) 304-312.
21. Bordulyak, M.T. (2000). On the growth of entire solutions of linear differential equations. *Mat. Stud.*, 13(2), 219-223.
22. Sheremeta, M. (1999). *Analytic functions of bounded index*. Lviv: VNTL Publishers.

В.П. Бакса, А.І. Бандура, О.Б. Скасків

Аналоги теорем Фріке для аналітичних у кулі векторнозначних функцій обмеженого L -індексу за сукупністю змінних.

У цій статті нами отримано необхідні та достатні умови обмеженості L -індексу за сукупністю змінних для векторнозначних функцій, аналітичних в одиничній кулі, де $L = (l_1, l_2)$ — додатна неперервна векторнозначна функція, що визначена у внутрішності одиничній кулі з двовимірного комплексного простору і кожна компонента задовольняє деяку умову в цій кулі. Точніше, при підході до межі одиничної кулі кожна компонента зростає швидше, ніж $1/(1 - |z|)$, де $|z|$ — евклідова норма у двовимірному комплексному просторі. Зокрема, нами доведено аналоги теорем Фріке для цього класу функцій, які дають оцінку максимуму норми на кістяку бікруга. Перша теорема стосується достатніх умов. Згідно з цими умовами для обмеженості L -індексу за сукупністю змінних досить вимагати існування деяких радіусів, для яких максимум норми аналітичної векторнозначної функції на кістяку бікруга з більшим радіусом не перевищує максимуму норми векторнозначної функції на кістяку бікруга з меншим радіусом помноженого на деяку сталу, залежну лише від радіусів. Доведення першої теореми подібне до доведення відповідного твердження для аналітичних в одиничній кулі функцій та використовує властивості максимального члена, центрального індексу та коефіцієнтів степеневого розвинення в околі довільної точки з внутрішності двовимірної одиничної кулі. У другій теоремі стверджується, що з обмеженості L -індексу за сукупністю змінних для векторнозначної аналітичної в двовимірній одиничній кулі функції впливає справедливості згаданої оцінки для всіх радіусів. Доведення другої теореми базується на інтегральній формулі Коші та пов'язаній з нею нерівності Коші. Основою для такого доведення служить критерій обмеженості L -індексу за сукупністю змінних для векторнозначних функцій, аналітичних в одиничній кулі, який раніше був отриманий одним зі співавторів. Цей критерій описує локальне поведіння максимумів норм частинних похідних на кістяках бікруга. З одержаних нарізно достатніх умов та необхідних умов обмеженості L -індексу за сукупністю змінних для векторнозначних аналітичних в одиничній кулі функцій легко одержується критерій обмеженості L -індексу за сукупністю змінних, який полягає у можливості оцінки максимуму норми векторнозначної функції на кістяку бікруга з більшим радіусом через максимум норми векторнозначної функції на кістяку бікруга з меншим радіусом,

помножений на деяку сталу, залежну лише від радіусів і незалежну від центрів бікруга.

Ключові слова: обмежений індекс, обмежений L -індекс за сукупністю змінних, аналітична функція, одинична куля, локальне поводження, максимум модуля.

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas,
Ivano-Frankivsk
vitalinabaksa@gmail.com, andriykopanytsia@gmail.com,
olskask@gmail.com

Received 19.05.19

УДК 517.54

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-2

©2019. О.К. Бахтін, Я.В. Заболотний

ЗАДАЧА ПРО ДОБУТОК ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ ЧОТИРЬОХ НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ, ДЕЯКІ З ЯКИХ СИМЕТРИЧНІ ВІДНОСНО ОДИНИЧНОГО КОЛА

В роботі розглядається достатньо загальна проблема геометричної теорії функцій про екстремальне розбиття комплексної площини, а саме задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, симетричних відносно одиничного кола, і степеня γ внутрішнього радіуса області $\{B_0\}$, яка містить точку нуля. Дана задача розглядалася в роботах В.М. Дубініна, Л.В. Ковальова, Г.П. Бахтіної та інших, у 1994 році була виставлена В.М. Дубініним в списку нерозв'язаних проблем. В 2000 р. для $\gamma = 1$ і для всіх $n \geq 2$ цю проблему розв'язав Л.В. Ковальов. У даній роботі розглядається випадок трьох симетричних неперетинних областей, причому степінь внутрішнього радіуса області $\{B_0\}$ знаходиться в межах $0 < \gamma \leq 1.233$ і для даного випадку знайдено повний розв'язок без додаткових обмежень.

MSC: 30C75.

Ключові слова: внутрішній радіус області, неперетинні області, розділяюче перетворення, квадратичний диференціал.

Задачі про екстремальне розбиття комплексної площини складають відомий класичний напрям геометричної теорії функцій комплексної змінної. Ця тематика бере початок від статті М.О. Лаврентьева 1934 року [1] і потім розвивалася в роботах багатьох авторів [2–9].

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, і нехай $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. На розширеній комплексній площині розглянемо систему довільних неперетинних многов'язних областей $\{B_k\}_{k=0}^n$, причому n областей $\{B_k\}_{k=1}^n$ симетричні відносно одиничного кола і нехай $r(B, a)$ – внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$.

Розглянемо наступну екстремальну проблему.

Проблема 1. Знайти точну верхню оцінку для функціоналу

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k), \quad (1)$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, де $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $0 \leq i, j \leq n$ і $i \neq j$ – неперетинні області, і $B_1, \dots, B_n$ симетричні відносно одиничного кола.

Вперше в 1984 р. аналогічну задачу зі вільними полюсами для симетричних однозв'язних областей розглянула Г. Бахтіна в роботі [5]. В 1994 р. дану задачу поставив В. Дубінін в роботі [7] як нерозв'язану проблему. В 2000 р. для $\gamma = 1$

і для всіх $n \geq 2$ цю проблему розв'язав Л. Ковальов [8, 9]. Одному з частинних випадків даної проблеми і присвячена дана робота.

Нехай для конкретності

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2) \dots \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

Нехай $\alpha_0 = \max_k \alpha_k$, $k = \overline{1, n}$.

Правильна наступна теорема.

Теорема 1. Для довільного набору точок a_k , таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1, 3}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k , $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{C}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, 3}$, причому області B_k , $k = \overline{1, 3}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, і довільного дійсного γ , такого, що $0 < \gamma \leq 1.233$ правильна нерівність

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{(2\gamma)^{\frac{\gamma}{3}}}{27(9-2\gamma)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{2\gamma}}{3+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \quad (2)$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, якщо $a_k = a_k^{(0)}$, $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, 3}$, де $a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, 3}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2} dw^2. \quad (3)$$

Доведення. Зауважимо, що випадок $0 < \gamma < 1$ був розглянутий в роботі [10], випадок $\gamma = 1$ – в роботі [8], а випадок $\alpha_0 \leq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ – в роботі [11]. Таким чином, нам достатньо розглянути випадок $1 < \gamma < 1.233$ і $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$.

Доведення теореми ґрунтується на методах і ідеях робіт [4, 7, 8].

Покажемо, що при умові $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, значення функціонала (1) задовольняє співвідношення (2).

Нехай

$$P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$k = \overline{1, 3}$, $\arg a_4 = 2\pi$, $P_0 := P_3$, $P_4 := P_1$ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$.

При кожному $k = \overline{1, 3}$ позначимо через $z_k(w)$ ту вітку багатозначної аналітичної функції $z = -i(e^{-i \arg a_k w})^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $z_0 := z_3$, $z_4 := z_1$, яка конформно і однолисно відображає області P_k , $k = \overline{1, 3}$ на праву півплощину $\operatorname{Re} z > 0$.

Тоді для областей B_k , $k = \overline{1, 3}$, таких, як і в Задачі 1, позначимо через $D_k^{(1)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k(B_k \cap \overline{P_k})$, що містить точку $z_k(a_k)$ з її

відображенням відносно уявної осі, а через $D_k^{(1)}$ – об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}(B_k \cap \overline{P_{k-1}})$, що містить точку $z_{k-1}(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі, $D_0^{(2)} := D_2^{(2)}$. Сім'ю двох симетричних відносно уявної осі областей $\{D_k^{(1)}; D_{k-1}^{(2)}\}$, будемо називати результатом розділяючого перетворення області B_k . Для утворених областей, згідно з теоремою 2 роботи [6], правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^3 \alpha_k \cdot (r(D_{k+1}^{(i)}, i) r(D_k^{(2)}, -i))^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогічно проводиться розділяюче перетворення області B_0 і отримаємо нерівність

$$r(B_0, 0) \leq \prod_{k=1}^3 (r(D_0^{(k)}; 0))^{\frac{\alpha_k^2}{2}}.$$

Використовуючи результати робіт [6, 7] і властивості розділяючого перетворення, отримаємо

$$\begin{aligned} I_3^0(\gamma) &= r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}) = \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{(2\gamma)^{\frac{7}{3}}}{27(9-2\gamma)^{\frac{3}{2}+\frac{7}{3}}} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{2\gamma}}{3+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}, \end{aligned}$$

де $B_k^{(0)}, a_k^{(0)}, k = \overline{0, 3}, a_0^{(0)} = 0$, відповідно, кругові області і полюси квадратичного диференціала (3).

Правильна наступна лема.

Лема 1. Нехай $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, (n \geq 2)$ – попарно неперетинні області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0, |a_k| = 1, k = \overline{1, n}, (a_j \in B_j), j = \overline{0, n}$ і $q > 0, q \in \mathbb{R}, r(B_j, a_j)$ – внутрішній радіус області B_j в точці a_j і $0 < \gamma < n$. Тоді при умові, що

$$r(B_0, a_0) \geq q^{\frac{1}{\gamma-n}}$$

виконується нерівність:

$$r^\gamma(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq q.$$

Доведення. Нехай

$$r(B_0, a_0) = p \geq q^{\frac{1}{\gamma-n}}.$$

Застосуємо теорему Лаврентьєва [1] для областей B_0 і B_1 , отримаємо, що

$$r(B_0, 0) \cdot r(B_1, a_1) \leq |a_1| = 1.$$

Оскільки $r(B_0, 0) = p$, то

$$r(B_1, a_1) \leq \frac{1}{p}.$$

Аналогічно

$$r(B_k, a_k) \leq \frac{1}{p}$$

для

$$k = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$r^\gamma(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq p^\gamma \cdot \frac{1}{p^n} = p^{\gamma-n} \leq (q^{\frac{1}{\gamma-n}})^{\gamma-n} = q.$$

Лему доведено. $\square$

Взявши в Лемі 1 $q = I_n^0(\gamma)$, отримаємо, що для $r(B_0, a_0) \geq (I_n^0(\gamma))^{\frac{1}{\gamma-n}}$ правильна нерівність (2). Тому нам достатньо розглядати тільки випадок $r(B_0, a_0) < (I_n^0(\gamma))^{\frac{1}{\gamma-n}}$.

Зауважимо, що:

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) = \prod_{k=0}^3 r(B_k, a_k) r^{\gamma-1}(B_0, 0). \quad (4)$$

За теоремою 1 роботи [12], а також, враховуючи, що $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, правильна нерівність

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^3 r(B_k, a_k) &\leq \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} (|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|)^{\frac{2}{3}} < \\ &< \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \cdot \left(8 \sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Таким чином, в (4) отримаємо:

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^3 r(B_k, a_k) < \frac{9}{4^{\frac{5}{3}}} \cdot \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \right)^{\frac{2}{3}} (I_n^0(\gamma))^{\frac{\gamma-1}{\gamma-3}}. \quad (5)$$

Далі, нехай

$$J_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)}{r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})}.$$

Використовуючи (5), отримаємо наступну нерівність:

$$J_n(\gamma) \leq \frac{9}{4^{\frac{5}{3}}} \cdot \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \right) \right)^{\frac{2}{3}} (I_n^0(\gamma))^{\frac{2}{\gamma-3}}. \quad (6)$$

Зауважимо, що $J_n(1.233) < 1$, таким чином для $\gamma = 1.233$ і довільного набору областей B_k і точок a_k , $k = \overline{0, 3}$, які задовольняють умови Теорема 1, правильна нерівність $I_n(\gamma) < I_n^0(\gamma)$, а значить для даного випадку теорема доведена. Правильність теореми для $1 < \gamma < 1.233$ випливає з монотонного зростання по γ виразу, записаного в правій частині нерівності (6).

Теорема доведена. $\square$

Цитована література

1. Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – № 5. – С. 159–245.
2. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
4. Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту матем. НАН України. – 2008. – 308 с.
5. Бахтина Г.П. Конформные радиусы симметрических неналегающих областей // Проблемы дійсного і комплексного аналізу. – 1984. – 149. – С. 21–27.
6. Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48–66.
7. Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1 (295). – С. 3–76
8. Ковалев Л.В. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 6. – С. 82–87.
9. Ковалев Л.В. О трех непересекающихся областях // Дальневосточный матем. журнал. – 2000. – 1, № 1. – С. 3–7.
10. Заболотный Я.В., Выговская Л.В. О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей // Укр. матем. вісник. – 2017. – 14, № 3. – С. 440–451.
11. Бахтин А.К., Выговская Л.В., Денега И.В. Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Укр. матем. журнал. – 2018. – 70, № 9. – С. 1282–1288.
12. Кузьмина Г.В. Методы геометрической теории функций. II // Алгебра и анализ. – 1997. – 9, № 5. – С. 1–50.

References

1. Lavrent'ev, M.A (1934). On the theory of conformal mappings. *Travaux Inst. Physico-Math. Stekloff Acad. Sci. USSR*, 5, 159-245.
2. Goluzin, G.M. (1969). *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*. Translations of Mathematical Monographs, no. 26, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
3. Lebedev, N.A. (1975). *The area principle in the theory of univalent functions*. Moscow: Science (in Russian).
4. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Zelinskii, Yu.B. (2008). Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* (in Russian).
5. Bakhtina, G.P. (1984). Conformal radii of symmetric nonoverlapping domains, *Current problems in real and complex analysis*, 21-27, 149, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev (in Russian).
6. Dubinin, V.N. (1988). The separating transformation of domains and problems on the extremal partition. *Analytical theory of numbers and theory of functions. Part 9, Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 168, 48-46 (in Russian). Translation in (1991) *J. Soviet Math.*, 53(3), 252-263.
7. Dubinin, V.N. (1994). Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable.

- Uspekhi Mat. Nauk*, 49(1), 3-76 (in Russian). Translation in (1994) *Russian Math. Survey*, 49(1), 1-79.
8. Kovalev, L.V. (2000). On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 6, 80-81 (in Russian).
 9. Kovalev, L.V. (2000). On three disjoint domains. *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 1(1), 3-7 (in Russian).
 10. Zabolotnyi, Ya.V., Vygovskaya, L.V. (2017). On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains. *Ukr. mat. vestnik*, 14(3), 440-451 (in Russian).
 11. Bakhtin, A.K., Vygovskaya, L.V., Denega, I.V. (2018). Inequalities for inner radii of symmetric disjoint domains. *Ukrainian Mathem. Journal*, 70(9), 1477-1483.
 12. Kuz'mina, G.V. (1997). Methods of geometric function theory, II. *Algebra Anal.*, 9(5), 1-50 (in Russian).

A.K. Bakhtin, Ya.V. Zabolotnii

The problem of the product of inner radii of four nonoverlapping domains, some of there are symmetric about unit circle.

Considered in the paper is one quite general problem of geometric function theory on extremal decomposition of the complex plane, namely to determine the maximum of product of the inner radii of n non-overlapping domains $\{B_k\}_{k=1}^n$, symmetric with respect to the unit circle, and the power γ of the inner radius of a domain $\{B_0\}$, which contains the origin. Starting point of the theory of extremal problems on non-overlapping domains is the result of Lavrent'ev [1] who in 1934 solved the problem of a product of conformal radii of two mutually nonoverlapping simply connected domains. It was the first result of this direction. Goluzin [2] generalized this problem in the case of an arbitrary finite number of mutually disjoint domains and obtained an accurate evaluation for the case of three domains. Further, Kuzmina [12] showed that the problem of the evaluation for the case of four domains is reduced to the smallest capacity problems in a certain continuum family and received the exact inequality for $n = 4$. For $n \geq 5$ full solution of the problem is not obtained at this time. The problem, considered in this paper, stated in [7] by V.N. Dubinin and earlier in different form by G.P. Bakhtina [5]. Let $a_0 = 0$, $|a_1| = \dots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, where $B_0, \dots, B_n$ are disjoint domains, and $B_1, \dots, B_n$ are symmetric about the unit circle. Find the exact upper bound for $r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k)$, where $r(B_k, a_k)$ is the inner radius of B_k with respect to a_k . For $\gamma = 1$ and $n \geq 2$ this problem was solved by L.V. Kovalev [8, 9] and for $\gamma_n = 0, 38n^2$ and $n \geq 2$ under the additional assumption that the maximum α_0 of the angles between neighbouring line segments $[0, a_k]$ do not exceed $2\pi/\sqrt{2\gamma}$ it was solved in [11]. In the present paper this problem is solved for three non-overlapping symmetric domains and for $0 < \gamma \leq 1.233$ without additional restrictions, moreover, for the first time such $1 < \gamma$ are considered for this case. Was proved the lemma, by which it was obtained the estimate of the inner radius of a domain $\{B_0\}$, which contains the origin. Using this lemma and the result of paper [11], it was proved that for $\alpha_0 > 2\pi/\sqrt{2\gamma}$ consided product does not exceed some expression.

Keywords: inner radius of domain, non-overlapping domains, separating transformation, quadratic differential.

Інститут математики НАН України, Київ
 yaroslavzabolotnii@gmail.com

Отримано 31.10.2019

УДК 517.956.25

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-3

©2019. М.В. Войтович

НЕПЕРЕРВНІСТЬ СЛАБКІХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З ПІДСИЛЕНОЮ ЕЛІПТИЧНІСТЮ ЧЕРЕЗ ПОТЕНЦІАЛИ ВОЛЬФА

Розглядаються нелінійні дивергентні рівняння четвертого порядку з L^1 правими частинами і умовою підсиленої еліптичності на коефіцієнти. Основним результатом статті є теорема про оцінку коливання в кулі узагальнених розв'язків розглянутих рівнянь через потенціали Вольфа їх правих частин. Як наслідок одержано новий результат про внутрішню неперервність розв'язків рівнянь з правими частинами з класу Като, який характеризується рівномірною збіжністю до нуля відповідних потенціалів Вольфа. Розглянуто окремі важливі випадки виконання цієї умови: права частина рівняння належить до простору Морі з показником більше певного граничного значення, тоді розв'язки є локально неперервними за Гельдером; права частина належить до граничних класів Лоренца–Зігмунда, розв'язки є локально неперервними, але не Гельдер-неперервними, всередині області. У разі, коли сумовність правих частин розглянутих рівнянь характеризується показниками, меншими зазначених граничних значень, існують приклади необмежених розривних розв'язків. Встановлені факти є точними аналогами відповідних результатів в теорії еліптичних рівнянь другого порядку.

MSC: 31C15, 35B45, 35D30, 35J30, 35J62.

Ключові слова: нелінійні еліптичні рівняння, слабкі розв'язки, неперервність, потенціал Вольфа, клас Като.

1. Вступ.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, Ω – обмежена відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, і нехай $f \in L^1(\Omega)$. Розглядається нелінійне диференціальне рівняння з частинними похідними четвертого порядку у дивергентному вигляді:

$$\sum_{\alpha \in \Lambda_2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega. \quad (1)$$

Тут і надалі ми використовуємо такі позначення: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – n -вимірний мультиіндекс з невід'ємними цілими компонентами α_i , $i = 1, \dots, n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; Λ_2 – множина всіх n -вимірних мультиіндексів, таких, що $|\alpha| = 1$ або $|\alpha| = 2$; $\mathbb{R}^{n,2}$ – простір, який складається з усіх векторів $\xi = \{\xi_\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \in \Lambda_2\}$; $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ і $\nabla_2 u = \{D^\alpha u : |\alpha| = 1, 2\}$.

Стосовно коефіцієнтів $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda_2}$ рівняння (1) робимо такі припущення:

- (H1) Для будь-якого $\alpha \in \Lambda_2$, $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^{n,2} \rightarrow \mathbb{R}$ є функцією Каратеодорі, тобто для кожного $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ функція $A_\alpha(\cdot, \xi)$ є вимірною на Ω , і для майже всіх $x \in \Omega$ функція $A_\alpha(x, \cdot)$ є неперервною в $\mathbb{R}^{n,2}$.
- (H2) Нехай $1 < p < n/2$ і $2p < q \leq n$. Існують додатні сталі c_1, c_2 і невід'ємні функції $f_1, f_2 \in L^1(\Omega)$, такі, що для майже всіх $x \in \Omega$ і кожного $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$

виконуються нерівності:

$$\sum_{|\alpha|=1,2} A_\alpha(x, \xi) \xi_\alpha \geq c_1 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} - f_1(x), \quad (2)$$

$$\sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \xi)|^{q/(q-1)} + \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \xi)|^{p/(p-1)} \leq c_2 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + f_2(x). \quad (3)$$

Через $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ позначаємо банахів простір $W^{1,q}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ з нормою

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \quad u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega).$$

Тут $W^{1,q}(\Omega)$ і $W^{2,p}(\Omega)$ — класичні простори Соболева [11, гл. 7]. Замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ у просторах $W^{1,q}(\Omega)$ і $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ позначаємо через $W_0^{1,q}(\Omega)$ і $\dot{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ відповідно.

Означення. Слабким (або узагальненим) розв'язком рівняння (1) називається функція $u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, така, що для будь-якої функції $v \in \dot{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ з компактним носієм в Ω виконується інтегральна рівність

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_2} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha v \right\} dx = \int_\Omega f v dx. \quad (4)$$

Існування узагальнених розв'язків рівняння (1) можна довести методом монотонних операторів, якщо, додатково до припущень (Н1) і (Н2), коефіцієнти $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda_2}$ задовольняють умову монотонності, а права частина рівняння f має підвищену сумовність, так, що права частина рівності (4) є неперервним лінійним функціоналом, визначеним у просторі $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. З точки зору нелінійної теорії потенціалу, якої ми дотримуємося в цій статті, остання умова виконується, якщо

$$\int_\Omega |f(x)| \mathbf{W}_{1,q}^f(x; R) dx < +\infty$$

для деякого $R > 0$ (див. [12, Теорема 1]). Тут функцію f продовжено нулем на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, і

$$\mathbf{W}_{a,b}^f(y; R) = \int_0^R \left(\frac{1}{r^{n-ab}} \int_{B_r(y)} |f(x)| dx \right)^{1/(b-1)} \frac{dr}{r}, \quad b > 1, \quad n \geq ab$$

є різновид нелінійного потенціалу [25], так званий потенціал Вольфа [1, 12]. Запис $B_r(y)$, як завжди, позначає множину $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ — відкриту кулю з центром у точці $y \in \mathbb{R}^n$ і радіусом $r > 0$. У разі, коли функція f належить тільки до $L^1(\Omega)$ і не має кращої сумовності, ми посилаємося на [16, 20] для доведення розв'язності рівняння (1) в припущеннях (Н1) і (Н2).

Квазілінійні дивергентні рівняння високого порядку ($2m, m \geq 2$), зокрема четвертого, зі структурними умовами на коефіцієнти на зразок нерівностей (2), (3) вперше з'явилися в роботі І.В. Скрипника [34] в контексті проблеми регулярності розв'язків еліптичних рівнянь з частинними похідними у багатовимірних областях евклідового простору $\mathbb{R}^n$ (19-а проблема Гільберта). Для рівнянь другого порядку ($m = 1$) цю проблему спочатку розв'язали Е. Де Джорджі, Дж. Неш, Ю. Мозер для лінійних рівнянь, і згодом Дж. Серрін, О.А. Ладиженська і Н.М. Уральцева у загальному випадку квазілінійних рівнянь. В результаті цих досліджень, з якими можна ознайомитись, наприклад, за монографіями [7, 11, 22], сформувався природні (стандартні) припущення на коефіцієнти квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку, що забезпечили коректне означення, існування, а згодом, і регулярність їх слабких розв'язків з просторів Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, коли $n \geq p > 1$.

Для рівнянь вищих порядків аналогічні, стандартні для простору $W^{m,p}(\Omega)$, умови вже не гарантують регулярності розв'язків, якщо $n > mp$. Відповідні контр-прикладі необмежених, розривних розв'язків навели В.Г. Маз'я [24], Е. Де Джорджі [7], І.В. Скрипник [33, 34] та ін. Саме з метою уникнення розгляду таких прикладів в роботі [34] було виділено підклас дивергентних рівнянь порядку $2m, m \geq 2$, у яких всі узагальнені розв'язки локально неперервні за Гельдером і які характеризуються підсиленою умовою еліптичності (коерцитивності у просторі $W^{m,p}(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$, $n \geq q > mp$) і відповідною умовою зростання на коефіцієнти. У новій роботі [38] ми використовуємо термін " m -(p, q) умови" для позначення цього факту. Для $m = 2$ ці умови збігаються з нерівностями (2), (3), а при $m = 1$ перетворюються на так звані нестандартні (p, q)-умови зростання для коефіцієнтів рівнянь другого порядку (для більш докладної інформації дивись, наприклад, публікації [26, 36, 38] і посилання в них).

Структурні m -(p, q) умови наділяють рівняння високого порядку якісними властивостями, притаманними рівнянню q -Лапласа:

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{q-2} \nabla u) = f \text{ в } \Omega, \quad (5)$$

на зразок теорії Де Джорджі-Неша-Мозера (див. [4, 17–19, 29, 30, 34, 37]).

Особливо добре це видно на прикладі роботи [38], в якій на рівняння з m -(p, q) структурними умовами поширено знаменитий результат Т. Кіппелайнена і Я. Мали [15] про поточкові оцінки для розв'язків $u \in W^{1,q}(\Omega)$ рівняння (5), що мають вигляд:

$$|u(x_0)| \leq C \left(R^{-n} \int_{B_R(x_0)} |u|^{(q-1)(1+\lambda)} dx \right)^{\frac{1}{(q-1)(1+\lambda)}} + C \mathbf{W}_{1,q}^f(x_0; 2R), \quad (6)$$

$$C' \mathbf{W}_{1,q}^f(x_0; R) \leq u(x_0) \leq C'' \inf_{B_R(x_0)} u + C'' \mathbf{W}_{1,q}^f(x_0; 2R) \quad (u, f \geq 0 \text{ в } \Omega), \quad (7)$$

де $\lambda \in (0, \frac{q-1}{n-q+1})$, C, C', C'' – додатні сталі, залежні тільки від n, q і λ , $x_0 \in \Omega$ – довільна лебегова точка функції u і $B_{3R}(x_0) \subset \Omega$. Ці оцінки цікаві тим, що дозволяють вивчати локальні властивості розв'язків рівняння (5) (і більш загальних квазілінійних рівнянь), аналізуючи відповідні потенціали [15, 20, 21, 23]. Прообразом

такого підходу є класична теорія потенціалу Ньютона і рівняння Пуассона [5, 13]. Метод Кіпелайнена-Мали можна розглядати як узагальнення методу Де Джорджі, перед яким він має відомі переваги. Зокрема, він не вимагає стандартної для методу Де Джорджі умови $f \in L^\tau(\Omega)$ з $\tau > n/q$ на сумовність правої частини рівняння (5). Фактично для реалізації методу Кіпелайнена-Мали достатньо тільки припущення $f \in L^1(\Omega)$. З цієї точки зору він є універсальним, а завдяки наявності двобічних оцінок в (7) для значення $u(x_0)$, і оптимальним в певному розумінні. До того ж, використання методу Кіпелайнена-Мали в граничних точках області Ω вирішує питання про необхідну умову регулярності за Вінером цих точок для нелінійних рівнянь другого порядку [15, 23]. Для рівнянь порядку $2m$ ($m \geq 2$) з m -(p, q) структурними умовами ця проблема все ще є актуальною (про відповідну достатню умову див. [35]). Наразі її розв'язання стає цілком можливим завдяки цій роботі і [38].

Для довільного розв'язку $u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ рівняння (1) за умов (Н1) і (Н2) аналог оцінки (6) має вигляд (див. [38, Теорема 3.2])

$$|u(x_0)| \leq C_1 \left(R^{-n} \int_{B_R(x_0)} |u|^{(q-1)(1+\lambda)} dx \right)^{\frac{1}{(q-1)(1+\lambda)}} + C_1 \left(\mathbf{W}_{1,q}^f(x_0; 2R) + \mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(x_0; 2R) + R^{\frac{q-2p}{q-p}} \right), \quad (8)$$

де стала $C_1 > 0$ залежить тільки від n, p, q і сталих c_1 і c_2 в умовах (2), (3). З цієї оцінки випливає локальна обмеженість розв'язку u (див. [38, Теорема 3.6]): якщо $\mathcal{O}$ – відкрита підмножина Ω , яка компактно входить до Ω ($\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$),

$$0 < \varrho < \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \text{dist}(\overline{\mathcal{O}}, \partial\Omega) \right\} \quad \text{і} \quad \sup_{x' \in \mathcal{O}} \mathbf{W}_{1,q}^f(x'; 2\varrho) + \sup_{x' \in \mathcal{O}} \mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(x'; 2\varrho) < +\infty,$$

то $\text{ess sup}_{\overline{\mathcal{O}}} |u| < +\infty$.

Доведення внутрішньої неперервності розв'язку u в термінах потенціалів $\mathbf{W}_{1,q}^f$ і $\mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}$ вимагає додаткових досліджень, які призводять до умови

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\sup_{x \in \Omega} \mathbf{W}_{1,q}^f(x; \rho) + \sup_{x \in \Omega} \mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(x; \rho) \right) = 0. \quad (9)$$

Такі дослідження в роботі [38] відсутні, їм присвячено цю статтю.

Умову (9) можна подати в термінах так званих Като-класів функцій наступним чином:

$$f \in K_{1,q}(\Omega), \quad f_1, f_2 \in K_{\frac{q}{q+1}, q+1}(\Omega),$$

де за означенням $K_{a,b}(\Omega) = \{g \in L^1(\Omega) : \lim_{\rho \rightarrow 0} \sup_{x \in \Omega} \mathbf{W}_{a,b}^g(x; \rho) = 0\}$. Дослідження локальних властивостей розв'язків рівнянь другого порядку з коефіцієнтами з класів Като і бібліографію з цієї проблематики можна знайти в [20].

Ця стаття організована в такий спосіб. У наступному розділі наведено формулювання основних результатів. Головним з них є Теорема 1 про оцінку коливання розв'язку u у кулі $B_\rho(x_0) \subset \Omega$, для якого ми використовуємо таке позначення:

$$\text{osc}\{u; B_\rho(x_0)\} := \text{ess sup}_{B_\rho(x_0)} u - \text{ess inf}_{B_\rho(x_0)} u.$$

Безпосереднім наслідком цієї теореми є Теорема 2 про неперервність довільного розв'язку $u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ рівняння (1) в припущеннях (H1), (H2) і (9). Ми також розглядаємо окремі важливі випадки виконання умови (9) (див. Теореми 3-6). Доведенню Теореми 1 присвячено четвертий розділ. Воно спирається на потенціальні поточкові оцінки функцій із класів, які ми називаємо класами Кіппелайнена–Мали і позначаємо через $\text{KM}_{2,p,q,t,\lambda}^{f_1,f_2,f}(B_R(x_0); K_1, K_2, K_3)$. Точне означення цих класів і відповідні оцінки наведено в третьому розділі.

2. Основні результати.

Для будь-якого $\rho > 0$ покладемо

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{1,q}^f(\rho) &= \sup_{x \in \Omega} \mathbf{W}_{1,q}^f(x; \rho), \quad \mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(\rho) = \sup_{x \in \Omega} \mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(x; \rho), \\ \psi(\rho) &= \mathbf{W}_{1,q}^f(4\rho) + \mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(4\rho). \end{aligned} \quad (10)$$

Наступна теорема є головним результатом статті.

Теорема 1. *Нехай $u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ – слабкий розв'язок рівняння (1) за умови виконання припущень (H1), (H2), і нехай $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$, $R \leq 1$. Тоді для будь-яких $\rho \in (0, R]$ і $\theta \in (0, 1)$ виконується нерівність*

$$\text{osc}\{u; B_\rho(x_0)\} \leq C \left((\rho/R)^\vartheta \text{osc}\{u; B_R(x_0)\} + (\rho^\theta R^{1-\theta})^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho^\theta R^{1-\theta}) \right) \quad (11)$$

де $C = C(n, p, q, c_1, c_2)$ і $\vartheta = \vartheta(n, p, q, \theta, c_1, c_2)$ – деякі додатні сталі.

З оцінки (11) випливає, що в умовах Теореми 1 розв'язок u буде неперервним в Ω , якщо $\lim_{\rho \rightarrow 0} \psi(\rho) = 0$, тобто, якщо виконується умова (9). Отже, маємо такий результат.

Теорема 2. *Нехай $u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ – слабкий розв'язок рівняння (1) за умови виконання припущень (H1), (H2) і (9). Тоді розв'язок u є неперервним в Ω .*

Умова (9) є суттєвою для правильності Теореми 2 (див. [38, приклади 6.1, 6.2]). Розглянемо окремі важливі випадки, коли виконується ця умова. Нехай спочатку

$$f, f_1, f_2 \in M^\tau(\Omega) \quad \text{для деякого } \tau > n/q, \quad (12)$$

де запис $g \in M^\tau(\Omega)$, $\tau > 1$, означає (див. [11]) існування сталої $K > 0$, такої, що

$$\int_{\Omega \cap B_r} |g| dx \leq K r^{n(\tau-1)/\tau} \quad \text{для всіх куль } B_r \subset \mathbb{R}^n.$$

Найменша стала K , що задовольняє цю нерівність називається нормою функції $g \in M^\tau(\Omega)$ і позначається через $\|g\|_{M^\tau(\Omega)}$. З умови (12) випливає, що для будь-якого $\rho > 0$ виконуються очевидні нерівності

$$\mathbf{W}_{1,q}^f(\rho) \leq \frac{\tau(q-1)}{\tau q - n} \|f\|_{M^\tau(\Omega)}^{1/(q-1)} \rho^{\frac{\tau(q-1)}{\tau q - n}}, \quad \mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(\rho) \leq \frac{\tau q}{\tau q - n} \|f_1 + f_2\|_{M^\tau(\Omega)}^{1/q} \rho^{\frac{\tau q - n}{\tau q}},$$

які в комбінації з Теоремою 1 дають такий результат.

Теорема 3. *Нехай $u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ – слабкий розв’язок рівняння (1) за умов (Н1), (Н2) і (12). Тоді розв’язок u є локально неперервним за Гельдером в Ω .*

ЗАУВАЖЕННЯ 1. У випадку, коли $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ і $f \geq 0$, має місце результат, обернений до Теореми 3: з гельдерової неперервності розв’язку $0 \leq u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ рівняння (1) випливає, що $f \in M_{\text{loc}}^\tau(\Omega)$ для деякого $\tau > n/q$ [38, Теорема 3.14]. Про аналогічні результати для рівнянь другого порядку дивись [15, 31].

У граничному випадку, коли $f, f_1, f_2 \in M^{n/q}(\Omega)$, рівняння у вигляді (1)–(3) можуть мати необмежені розривні розв’язки [38, Приклад 6.1]. Теорія еліптичних рівнянь другого порядку [9] підказує уточнення останньої умови, яке гарантує неперервність розв’язків (але не гельдерову неперервність [2]):

$$f \in L^{n/q, 1/(q-1)}(\Omega), \quad f_1, f_2 \in L^{n/q, 1/q}(\Omega). \quad (13)$$

Нагадаємо, що за означенням (див., наприклад, [3, гл. 4]) *простір Лоренца* $L^{a,b}(\Omega)$ ($0 < a, b \leq +\infty$) складається з усіх вимірних і майже всюди скінчених функцій $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, для яких величина

$$\|g\|_{a,b} = \begin{cases} \left(\int_0^{|\Omega|} [s^{1/a} g^*(s)]^b \frac{ds}{s} \right)^{1/b}, & \text{якщо } 0 < b < +\infty, \\ \sup_{0 < t < |\Omega|} [s^{1/a} g^*(s)], & \text{якщо } b = +\infty, \end{cases}$$

є скінченою. Тут символ $|\Omega|$ позначає n -вимірну міру Лебега множини Ω , а запис $g^* : [0, |\Omega|) \rightarrow [0, +\infty)$ позначає *спадну перестановку* функції g , визначену як $g^*(s) = \sup\{t \geq 0 : |\{x \in \Omega : |g(x)| > t\}| > s\}$ для $0 \leq s < |\Omega|$.

З [8, Розділ 3.2] випливає, що умова (9) виконується, якщо виконано (13). Тому маємо такий результат.

Теорема 4. *Нехай $n > q$, і нехай $u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ – слабкий розв’язок рівняння (1) за умов (Н1), (Н2) і (13). Тоді розв’язок u є неперервним в Ω .*

Розглянемо ще один граничний випадок, коли $n = q$. У цьому випадку умова (9) виконується, якщо

$$\int_0^{|\Omega|} \left(\int_0^t f^*(s) ds \right)^{1/(n-1)} \frac{dt}{t} < +\infty, \quad (14)$$

$$\int_0^{|\Omega|} \left(\int_0^t [f_1^*(s) + f_2^*(s)] ds \right)^{1/n} \frac{dt}{t} < +\infty. \quad (15)$$

Цей факт випливає з відомої нерівності Харді–Літлвуда: якщо $g \in L^1(\Omega)$ і $E \subset \Omega$ – вимірна за Лебегом множина, то

$$\int_E |g(x)| dx \leq \int_0^{|E|} g^*(s) ds.$$

Як наслідок сказаного, а також Теореми 2, маємо такий результат (див. [14] для порівняння з випадком $m = 1$).

Теорема 5. Нехай $n = q$, і нехай $u \in W_{2,p}^{1,n}(\Omega)$ – слабкий розв'язок рівняння (1) за умов (H1), (H2), (14) і (15). Тоді розв'язок u є неперервним в Ω .

Нарешті, за аналогією з [14, 38] можна показати, що умови (14) і (15) виконуються, якщо для деякого $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} f &\in L(\log L)^{n-1}(\log \log L)^{n-2} \dots (\log \dots \log L)^{n-2}(\log \dots \log L)^{n-2+\epsilon}(\Omega), \\ f_1, f_2 &\in L(\log L)^n(\log \log L)^{n-1} \dots (\log \dots \log L)^{n-1}(\log \dots \log L)^{n-1+\epsilon}(\Omega). \end{aligned} \quad (16)$$

Точне означення простору Зігмунда $L(\log L)^{\sigma_1} \dots (\log \dots \log L)^{\sigma_k}(\Omega)$, $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathbb{R}$, можна знайти, наприклад, в [3, гл. 4], [14].

Теорема 6. Нехай $n = q$, і нехай $u \in W_{2,p}^{1,n}(\Omega)$ – слабкий розв'язок рівняння (1) за умов (H1), (H2) і (16). Тоді розв'язок u є неперервним в Ω .

Зауваження 2. Теорема 6 стає неправильною, якщо в умовах (16) покласти $\epsilon = 0$ (див. [38, Приклад 6.2]).

3. Поточкові потенціальні оцінки для функцій із класів Кіппелайнена–Мали.

Означення. Нехай $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$, $0 < R \leq 1$, $t \geq 1$ і $\lambda \in (0, \frac{q-1}{n-q+1})$. Говоримо, що функція $u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ належить до класу $\text{KM}_{2,p,q,t,\lambda}^{f_1,f_2,f}(B_R(x_0); K_1, K_2, K_3)$, якщо існують додатні сталі K_1 , K_2 і K_3 , такі, що для будь-яких концентричних куль $B_r(x_0)$ і $B_{r-\sigma r}(x_0)$, $R/2 \leq r - \sigma r < r \leq R$, і будь-яких чисел $l \geq 0$ і $\delta > R^{\frac{q-2p}{2(q-p)}}$ виконується нерівність (для порівняння див. [38, нерівність 4.10]):

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega_{r-\sigma r,l}(x_0)} \frac{[U_{l,\delta}(u)]^{t-1} |D^\alpha u|^q}{(1 + U_{l,\delta}^t(u))^{1+\lambda/t}} dx &\leq \frac{K_1 \delta^q}{(\sigma r)^q} \int_{\Omega_{r,l}(x_0)} (1 + U_{l,\delta}^t(u))^{\frac{(\lambda+1)(q-1)}{t}} dx \\ &+ K_2 \int_{B_r(x_0)} (f_1 + f_2) dx + K_3 \delta \int_{B_r(x_0)} |f| dx, \end{aligned} \quad (17)$$

де $\Omega_{r,l}(x_0) = B_r(x_0) \cap \{x \in \Omega : |u(x)| > l\}$ і, для будь-якого $s \in \mathbb{R}$,

$$U_{l,\delta}(s) = \max \left\{ \frac{(|s| - l)_+}{\delta}, 0 \right\} = \frac{(|s| - l)_+}{\delta}. \quad (18)$$

Теорема 7. Нехай $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$, $0 < R \leq 1$, $t \geq 1$, $0 < \lambda < (q-1)/(n-q+1)$,

$$u \in \text{KM}_{2,p,q,t,\lambda}^{f_1,f_2,f}(B_R(x_0); K_1, K_2, K_3),$$

і нехай x_0 – точка Лебега функції u . Тоді виконується така нерівність:

$$|u(x_0)| \leq C \left(R^{-n} \int_{B_R(x_0)} |u|^{(\lambda+1)(q-1)} dx \right)^{\frac{1}{(\lambda+1)(q-1)}} + C \left(K_2^{1/q} \mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(x_0; 2R) + K_3^{1/(q-1)} \mathbf{W}_{1,q}^f(x_0; 2R) + R^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} \right),$$

де C – додатна стала, залежна тільки від n, p, q, λ, t і K_1 .

Ми не наводимо тут доведення Теорема 2. Воно повторює з незначними змінами міркування, що викладені в [38, Розд. 4.2, 4.3]. Також в [38, Лема 4.1] показано, що для будь-якого $\lambda \in (0, \frac{q-1}{n-q+1})$ і деякого $t = t(p, q) > 2$ довільний слабкий розв'язок $u \in W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ рівняння (1) за умов (H1) і (H2) належить до класу $\mathbf{KM}_{2,p,q,t,\lambda}^{f_1,f_2,f}(B_R(x_0); K_1, K_2, K_3)$, в якому константи K_1, K_2 і K_3 залежать тільки від n, p, q, c_1, c_2 і λ . Саме звідси і з Теорема 2 випливає слушність оцінки (8).

Важливим новим моментом, який відрізняє цю роботу від [38], є той факт, що до класів $\mathbf{KM}_{2,p,q,t,\lambda}^{f_1,f_2,f}(B_R(x_0); K_1, K_2, K_3)$ належать не тільки розв'язки рівняння (1), але і їх суперпозиції з деякими допоміжними функціями, на кшталт логарифмічних функцій Мозера [27, 28]. Цей факт буде встановлено і використано для доведення Теорема 1 в наступному розділі.

4. Доведення Теорема 1.

Нехай x_0 – довільна точка в Ω , $\partial\Omega$ – границя Ω , і $d = \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Зафіксуємо радіуси

$$R < \min\{d/8, 1\} \quad \text{і} \quad 0 < \rho \leq R, \quad (19)$$

і зробимо такі позначення:

$$M(\rho) = \text{ess sup}_{B_\rho(x_0)} u, \quad m(\rho) = \text{ess inf}_{B_\rho(x_0)} u, \quad \omega(\rho) = \text{osc}\{u; B_\rho(x_0)\} = M(\rho) - m(\rho).$$

Внаслідок [38, Теорема 3.6] маємо: $M(\rho) < +\infty$, $m(\rho) < +\infty$, і тому $\omega(\rho) < +\infty$. Визначимо такі множини:

$$G'_\rho = \left\{ x \in B_\rho(x_0) : u(x) \leq m(\rho) + \frac{\omega(\rho)}{2} \right\}, \quad G''_\rho = B_\rho(x_0) \setminus G'_\rho. \quad (20)$$

Далі визначимо функцію $V : B_\rho(x_0) \rightarrow (0, +\infty)$ в такий спосіб:

$$V(x) = V(u(x)) = \begin{cases} \ln \frac{2\omega(\rho)}{u(x) - m(\rho) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho)}, & \text{якщо } |G'_\rho| \leq \frac{1}{2}|B_\rho(x_0)|, \\ \ln \frac{2\omega(\rho)}{M(\rho) - u(x) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho)}, & \text{якщо } |G''_\rho| \leq \frac{1}{2}|B_\rho(x_0)|, \end{cases} \quad (21)$$

де значення $\psi(\rho)$ визначено за допомогою (10). Припускаємо також, що $\omega(\rho) > \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho)$, і тому

$$V > 0 \quad \text{в} \quad B_\rho(x_0), \quad (21')$$

інакше нерівність (11) виконується.

Наші подальші міркування скеровані на доведення обмеженості функції V в кулі $B_{\rho/2}(x_0)$. Звідси, як буде показано нижче, і випливає оцінка (11). Ідея використання обмеженості логарифмічної функції на зразок функції (21) для доведення неперервності розв'язку u походить з робіт Ю. Мозера [27, 28] і його ітераційного методу для лінійних еліптичних рівнянь другого порядку. Для нелінійних рівнянь вищих порядків з досить регулярними даними подібні ідеї реалізовано Й. Фрезе [10], К.-О. Відманом [39], І.В. Скрипником [32–34] і згодом багатьма іншими авторами, див., наприклад, [4, 6, 17, 18, 29, 30, 35, 37]. Наразі, ми не можемо застосувати ітераційний метод Мозера для доведення обмеженості функції V , оскільки права частина f рівняння (1) є слабо сумовною. Фактично, f належить тільки до $L^1(\Omega)$. Ми скористаємося Теоремою 2, яка не вимагає від f підвищеної сумовності і дає можливість для доведення обмеженості функції V в термінах величин $\mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(4\rho)$ і $\mathbf{W}_{1,q}^f(4\rho)$.

Візьмемо довільну точку Лебега $\bar{x} \in B_{\rho/2}(x_0)$ функції V , концентричні кулі $B_r(\bar{x})$ і $B_{r-\sigma r}(\bar{x})$ з радіусами

$$\rho/8 \leq r - \sigma r < r \leq \rho/4 \leq 1, \quad (22)$$

функцію $\eta \in C_0^\infty(B_r(\bar{x}))$ з такими властивостями:

$$0 \leq \eta \leq 1 \text{ в } B_r(\bar{x}), \quad \eta = 1 \text{ в } B_{r-\sigma r}(\bar{x}), \quad (23)$$

$$|D^\alpha \eta| \leq c_n(\sigma r)^{-|\alpha|} \text{ для кожного } \alpha \in \Lambda_2, \quad (24)$$

і дійсні числа λ і t , що задовольняють умови:

$$0 < \lambda < \frac{1}{n-1} < \frac{q-1}{n-q+1}, \quad t > 2. \quad (25)$$

Покажемо, що

$$V \in \mathbf{KM}_{2,p,q,t,\lambda}^{f_1,f_2,f}(B_{\rho/4}(\bar{x}); K_1, K_2, K_3), \quad (26)$$

де

$$K_1 = c_3, \quad K_2 = c_3[\psi(\rho)]^{-q}, \quad K_3 = c_3[\psi(\rho)]^{1-q}, \quad (27)$$

і через c_i , $i = 3, 4, \dots$, позначено сталі, що залежать тільки від c_1 , c_2 , n , p , q , λ , t .

Для цього фіксуємо числа l і δ ,

$$l \geq 0, \quad \delta > \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}}. \quad (28)$$

Визначимо функції $h_{l,\delta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (див. [38, рівність (4.11)]) і $\tilde{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ в такий спосіб:

$$h_{l,\delta}(s) = \left[1 - (1 + U_{l,\delta}^t(s))^{-\lambda/t} \right] \text{sign } s \quad \text{для будь-якого } s \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{v} = \begin{cases} B^{1-q} h_{l,\delta}(V(u)) \eta^q & \text{в } B_r(\bar{x}), \\ 0 & \text{в } \Omega \setminus B_r(\bar{x}), \end{cases} \quad (29)$$

де функція $U_{l,\delta}(s)$ визначена за допомогою (18), а функція $B : B_\rho(x_0) \rightarrow (0, +\infty)$ – в такий спосіб:

$$B(x) = \begin{cases} u(x) - m(\rho) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho), & \text{якщо } |G'_\rho| \leq \frac{1}{2}|B_\rho(x_0)|, \\ M(\rho) - u(x) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho), & \text{якщо } |G''_\rho| \leq \frac{1}{2}|B_\rho(x_0)|. \end{cases} \quad (30)$$

Ясно, що $h_{l,\delta} \in C^2(\mathbb{R})$ і для будь-якого $s \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення (див., також, [38, нерівність (4.13)]):

$$\begin{aligned} h'_{l,\delta}(s) &= \lambda \delta^{-1} (1 + U_{l,\delta}^t(s))^{-1-\lambda/t} U_{l,\delta}^{t-1}(s), \\ |h''_{l,\delta}(s)| &\leq c_4 \delta^{-2} (1 + U_{l,\delta}^t(s))^{-1-\lambda/t} U_{l,\delta}^{t-2}(s). \end{aligned} \quad (31)$$

Безпосередні обчислення з використанням (21), (24), (29), (30), (31) показують, що функція $\tilde{v}$ належить до $\dot{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, має компактний носій в $B_r(\bar{x}) \subset \Omega$, і виконуються такі твердження:

якщо $\alpha \in \Lambda_2$ і $|\alpha| = 1$, то

$$\begin{aligned} \left| D^\alpha \tilde{v} \pm \frac{\lambda}{\delta} \frac{U_{l,\delta}^{t-1}(V) B^{-q} D^\alpha u \eta^q}{(1 + U_{l,\delta}^t(V))^{1+\lambda/t}} \pm (q-1) B^{-q} h_{l,\delta}(V) D^\alpha u \eta^q \right| \\ \leq \frac{c_5 q}{\sigma r} B^{1-q} h_{l,\delta}(V) \eta^{q-1} \quad \text{м.в. в } \Omega; \end{aligned} \quad (32)$$

якщо $\alpha \in \Lambda_2$ і $|\alpha| = 2$, то

$$\begin{aligned} \left| D^\alpha \tilde{v} \pm \frac{\lambda}{\delta} \frac{U_{l,\delta}^{t-1}(V) B^{-q} D^\alpha u \eta^q}{(1 + U_{l,\delta}^t(V))^{1+\lambda/t}} \pm (q-1) B^{-q} h_{l,\delta}(V) D^\alpha u \eta^q \right| \\ \leq c_6 \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u|^2 B^{-q-1} (|h_{l,\delta}(V)| + h'_{l,\delta}(V) + |h''_{l,\delta}(V)|) \eta^q \\ + \frac{c_6}{\sigma r} \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u| B^{-q} (|h_{l,\delta}(V)| + h'_{l,\delta}(V)) \eta^{q-1} \\ + \frac{c_6}{(\sigma r)^2} B^{1-q} h_{l,\delta}(V) \eta^{q-2} \quad \text{м.в. в } \Omega. \end{aligned} \quad (33)$$

Надалі, для зручності, ми використовуємо такі скорочені позначення:

$$V_{l,\delta} = U_{l,\delta}(V) \quad \text{і} \quad \Phi = \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^p. \quad (34)$$

Підставивши функцію $\tilde{v}$ в (4) замість v , і скориставшись умовою (2) і твердженнями (32) і (33), отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} \frac{\lambda c_1}{\delta} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} \frac{\Phi V_{l,\delta}^{t-1} B^{-q} \eta^q}{(1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} dx \leq \\ \leq c_7 \left(\sum_{i=1}^4 I_i + \frac{\lambda}{\delta} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} \frac{f_1 V_{l,\delta}^{t-1} B^{-q} \eta^q}{(1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} dx + \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} |f| \tilde{v} dx \right), \end{aligned} \quad (35)$$

де

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} (\sigma r)^{-1} |A_\alpha(x, \nabla_2 u)| |h_{l,\delta}(V)| B^{1-q} \eta^{q-1} dx, \\
 I_2 &= \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} (\sigma r)^{-2} |A_\alpha(x, \nabla_2 u)| |h_{l,\delta}(V)| B^{1-q} \eta^{q-2} dx, \\
 I_3 &= \sum_{|\alpha|=2} \sum_{|\beta|=1} \sum_{\kappa=0,1} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} (\sigma r)^{-1} |A_\alpha(x, \nabla_2 u)| |D^\beta u| |h_{l,\delta}^{(\kappa)}(V)| B^{-q} \eta^{q-1} dx, \\
 I_4 &= \sum_{|\alpha|=2} \sum_{|\beta|=1} \sum_{\kappa=0}^2 \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} |A_\alpha(x, \nabla_2 u)| |D^\beta u|^2 |h_{l,\delta}^{(\kappa)}(V)| B^{-q-1} \eta^q dx.
 \end{aligned}$$

Нам знадобляться такі оцінки для I_i , $i = 1, 2, 3, 4$, з довільним $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}
 I_i &\leq \frac{c_2 \varepsilon}{\delta} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} \frac{\Phi V_{l,\delta}^{t-1} B^{-q} \eta^q}{(1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} dx \\
 &+ \frac{c_8}{\varepsilon c_4} \frac{\delta^{q-1}}{(\sigma r)^q} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} (1 + V_{l,\delta}^t)^{\frac{(1+\lambda)(q-1)}{t}} dx + \frac{\varepsilon}{\delta} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} \frac{f_2 V_{l,\delta}^{t-1} B^{-q} \eta^q}{(1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} dx.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Ми не наводимо тут детальне доведення нерівності (36), яке можна виконати на зразок роботи [38]. Зауважимо тільки, що воно ґрунтується на акуратному використанні нерівності Юнга в комбінації з нерівностями (3), (22)–(25), (28), (31) і відповідному виборі параметру $t = t(p, q) > 2$.

Оцінки (36) разом з (35) за умови вибору достатньо малого $\varepsilon > 0$ дають:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} \frac{\Phi V_{l,\delta}^{t-1} B^{-q} \eta^q}{(1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} dx &\leq \frac{c_9 \delta^q}{(\sigma r)^q} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} (1 + V_{l,\delta}^t)^{\frac{(1+\lambda)(q-1)}{t}} dx \\
 &+ c_9 \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} \frac{(f_1 + f_2) V_{l,\delta}^{t-1} \eta^q}{B^q (1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} dx + c_9 \delta \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} |f| \tilde{v} dx.
 \end{aligned}$$

З огляду на (23), (29) і (30) для інтегралів в правій частині останньої нерівності, що містять функції f_1 , f_2 і f , маємо такі оцінки:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} \frac{(f_1 + f_2) V_{l,\delta}^{t-1} \eta^q}{B^q (1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} dx &\leq \frac{1}{[\psi(\rho)]^q} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} (f_1 + f_2) dx, \\
 \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} |f| \tilde{v} dx &\leq [\psi(\rho)]^{1-q} \int_{\Omega_{r,l}(\bar{x})} |f| dx,
 \end{aligned}$$

які у поєднанні з попередньою нерівністю, властивістю (23) і визначеннями функцій V , B , $V_{l,\delta}$ і Φ (див. рівності (21), (30) і (34), відповідно) дають:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega_{r-\sigma r, l}(\bar{x})} \frac{[U_{l,\delta}(V)]^{t-1} |D^\alpha V|^q}{(1 + U_{l,\delta}^t(V))^{1+\lambda/t}} dx &\leq \frac{c_9 \delta^q}{(\sigma r)^q} \int_{\Omega_{r, l}(\bar{x})} (1 + U_{l,\delta}^t(V))^{\frac{(1+\lambda)(q-1)}{t}} dx \\ &+ \frac{c_9}{[\psi(\rho)]^q} \int_{\Omega_{r, l}(\bar{x})} (f_1 + f_2) dx + \frac{c_9 \delta}{[\psi(\rho)]^{q-1}} \int_{\Omega_{r, l}(\bar{x})} |f| dx. \end{aligned}$$

Одержана нерівність означає, що для функції V , визначеної за допомогою рівності (21), виконується нерівність вигляду (17) зі сталими K_1 , K_2 , K_3 , визначеними в (27) і з радіусами r і $r - \sigma r$ як в (22). Таким чином, доведення включення (26) завершено.

Тепер Теорема 2 з урахуванням (26), (27), нерівностей $(\lambda + 1)(q - 1) < q$ (див. (25)), Гельдера і включень $B_{\rho/4}(\bar{x}) \subset B_{3\rho/4}(x_0) \subset B_\rho(x_0)$ означає правильність такої нерівності:

$$\begin{aligned} V(\bar{x}) &\leq c_{10} \left(\rho^{-n} \int_{B_{\rho/4}(\bar{x})} V^{(\lambda+1)(q-1)} dx \right)^{\frac{1}{(1+\lambda)(q-1)}} \\ &+ \frac{c_{10}}{\psi(\rho)} \left(\mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(\bar{x}; \rho/2) + \mathbf{W}_{1,q}^f(\bar{x}; \rho/2) \right) + c_{10} \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} \\ &\leq c_{10} \left(\rho^{-n} \int_{B_\rho(x_0)} V^q dx \right)^q + \frac{c_{10}}{\psi(\rho)} \left(\mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(\rho) + \mathbf{W}_{1,q}^f(\rho) \right) + c_{10} \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Щоб оцінити інтеграл в правій частині цієї нерівності зауважимо, що функція V належить до $W^{1,q}(B_\rho(x_0))$ і має таку властивість: існує множина $G \subset B_\rho(x_0)$ і додатні сталі C' і C'' такі, що $|G| \geq C' \rho^n$ і $\text{ess sup}_G |V| \leq C''$. Дійсно, з огляду на (21) можемо покласти $G = G''_\rho$, якщо $|G'_\rho| \leq \frac{1}{2} |B_\rho(x_0)|$, і $G = G'_\rho$, якщо $|G''_\rho| \leq \frac{1}{2} |B_\rho(x_0)|$. Тоді, внаслідок (20), (21) і (21'), матимемо

$$|G| \geq |B_\rho(x_0)|/2 \quad \text{і} \quad 0 < V \leq \frac{2\omega(\rho)}{\frac{1}{2}\omega(\rho) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho)} < 4 \quad \text{на } G.$$

Для функції V із зазначеною властивістю виконується нерівність на зразок нерівності Пуанкаре (див., наприклад, [11, нерівність (7.45)], [33, гл.1, §2, Лема 4]):

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} V^q dx &\leq C \left(\rho^q \sum_{|\alpha|=1} \int_{B_\rho(x_0)} |D^\alpha V|^q dx + \rho^n \right) \\ &= C \left(\rho^q \int_{B_\rho(x_0)} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q \right\} B^{-q} dx + \rho^n \right) \end{aligned} \quad (38)$$

з додатною сталою C , що залежить тільки від n , q , C' і C'' . Останній інтеграл в

правій частині одержаної нерівності можна оцінити наступним чином:

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q \right\} B^{-q} dx &\leq c_{11} \rho^{n-q} \\ &+ \frac{c_{11}}{[\psi(\rho)]^{q-1}} \int_{B_{2\rho}(x_0)} |f| dx + \frac{c_{11}}{[\psi(\rho)]^q} \int_{B_{2\rho}(x_0)} (f_1 + f_2) dx. \end{aligned} \quad (39)$$

Для цього в інтегральній тотожності (4) слід виконати підстановку

$$v = \begin{cases} B^{1-q} \zeta^q & \text{в } B_{2\rho}(x_0), \\ 0 & \text{в } \Omega \setminus B_{2\rho}(x_0), \end{cases}$$

де функція $\zeta \in C_0^\infty(B_{2\rho}(x_0))$ має такі властивості:

$$0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta = 1 \text{ в } B_\rho(x_0), \quad |D^\alpha \zeta| \leq c_n \rho^{-|\alpha|}. \quad (40)$$

Оцінювання інтегральних доданків, що виникають під час такої підстановки, виконується на зразок [37, Лема 4.2] з використанням нерівності Юнга, (40), структурних умов (2), (3) і елементарних нерівностей:

$$\begin{aligned} \int_{B_{2\rho}(x_0)} f B^{1-q} \zeta^q dx &\leq \frac{1}{[\psi(\rho)]^{q-1}} \int_{B_{2\rho}(x_0)} |f| dx. \\ \int_{B_{2\rho}(x_0)} (f_1 + f_2) B^{-q} \zeta^q dx &\leq \frac{1}{[\psi(\rho)]^q} \int_{B_{2\rho}(x_0)} (f_1 + f_2) dx. \end{aligned}$$

Поєднання оцінок (37), (38), (39), нерівності (19) і елементарних нерівностей

$$\left(\rho^{q-n} \int_{B_{2\rho}(x_0)} (f_1 + f_2) dx \right)^{1/q} \leq 2^{n/q} \mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(x_0; 4\rho),$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho^{q-n}}{[\psi(\rho)]^{q-1}} \int_{B_{2\rho}(x_0)} |f| dx \right)^{1/q} \\ \leq 1 + \frac{1}{\psi(\rho)} \left(\rho^{q-n} \int_{B_{2\rho}(x_0)} |f| dx \right)^{1/(q-1)} \leq 1 + \frac{2^{\frac{n-1}{q-1}}}{\psi(\rho)} \mathbf{W}_{1,q}^f(x_0; 4\rho), \end{aligned}$$

з урахуванням (10) і довільного вибору Лебегової точки $\bar{x} \in B_{\rho/2}(x_0)$ функції V , дає

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\rho/2}(x_0)} V \leq c_{12} + \frac{c_{12}}{\psi(\rho)} \left(\mathbf{W}_{\frac{q}{q+1}, q+1}^{f_1+f_2}(4\rho) + \mathbf{W}_{1,q}^f(4\rho) \right) \leq c_{13}.$$

З одержаної нерівності та з означення функції V (див. рівність (21)) випливає, що для кожного $\rho \in (0, R]$ виконується нерівність:

$$\omega(\rho/2) \leq \frac{c_{13} - 1}{c_{13}} \omega(\rho) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho).$$

Тепер твердження Теорема 1 є простим наслідком одержаного співвідношення і відомої ітераційної леми (див., наприклад, [11, Лема 8.23]).

Доведення Теорема 1 завершено. $\square$

Цитована література

1. *Adams D.R., Hedberg L.I.* Function Spaces and Potential Theory, in: Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 314. – Springer-Verlag, Berlin. – 1996.
2. *Alberico A., Ferone V.* Regularity properties of solutions of elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ in limit cases // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. – 1995. – 6, No. 4. – P. 237–250.
3. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. – Academic Press, Boston. – 1988.
4. *Bonafede S., Voitovych M.V.* Hölder continuity up to the boundary of solutions to nonlinear fourth-order elliptic equations with natural growth terms // Differ. Equ. Appl. – 2019. – 11, No. 1. – P. 107–127.
5. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. – М.: Мир. – 1964.
6. *D'Asero S., Cataldo V., Nicolosi F.* Regularity of minimizers of some integral functionals with degenerate integrands // Nonlinear Anal. – 2008. – 68, No. 11. – P. 3283–3293.
7. *De Giorgi E.* Selected papers. – Springer-Verlag, Berlin. – 2006.
8. *Duzaar F., Mingione G.* Gradient continuity estimates // Calc. Var. Partial Differential Equations. – 2010. – 39, No. 3–4. – P. 379–418.
9. *Ferone V., Fusco N.* Continuity properties of minimizers of integral functionals in a limit case // J. Math. Anal. Appl. – 1996. – 202, No. 1. – P. 27–52.
10. *Frehse J.* On the boundedness of weak solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations // Boll. Un. Mat. Ital. – 1970. – 3, No. 4. – P. 607–627.
11. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic partial differential equations of second order. – Berlin: Springer-Verlag. – 1983.
12. *Hedberg L.I., Wolff T.H.* Thin sets in nonlinear potential theory // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1983. – 33, No. 4. – P. 161–187.
13. *Helms L.L.* Potential theory. Second edition. – Universitext. Springer, London. – 2014.
14. *Jiang R., Koskela P., Yang D.* Continuity of solutions to n -harmonic equations // Manuscripta Math. – 2012. – 139, No. 1–2. – P. 237–248.
15. *Kilpeläinen T., Malý J.* The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations // Acta Math. – 1994. – 172, No. 1. – P. 137–161.
16. *Ковалевский А.А.* Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1 -правыми частями // Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – 65, No. 2. – P. 27–80.
17. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Boundedness of solutions of variational inequalities with nonlinear degenerated elliptic operators of high order // Appl. Anal. – 1997. – 65. – P. 225–249.
18. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* On regularity up to the boundary of solutions to degenerate nonlinear elliptic high-order equations // Nonlinear Anal. – 2000. – 40, No. 1–8. – P. 365–379.
19. *Ковалевский А.А., Войтович М.В.* О повышении суммируемости обобщенных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, № 11. – С. 1511–1524.
20. *Kovalevsky A.A., Skrypnik I.I., Shishkov A.E.* Singular solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations. – Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH. – 2016.
21. *Kuusi T., Mingione G.* Guide to nonlinear potential estimates // Bull. Math. Sci. – 2014. – 4, No. 1. – P. 1–82.
22. *Ладженская О.А., Уралцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва, Наука. – 1973.
23. *Malý J., Ziemer W.P.* Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations, in: Math. Surveys and Monogr., vol. 15. – American Math. Soc., Providence, RI. – 1997.

24. Мазья В.Г. Примеры нерегулярных решений квазилинейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Функц. анализ и его прил. – 1968. – 2, № 3. – С. 53–57.
25. Мазья В.Г., Хавин В.П. Нелинейная теория потенциала // Успехи матем. наук. – 1972. – 27, No. 6(168). – С. 67–138.
26. Mingione G. Regularity of minima: an invitation to the dark side of the calculus of variations // Appl. Math. – 2006. – 51, No. 4. – С. 355–426.
27. Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1960. – 13. – P. 457–468.
28. Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – 14. – P. 577–591.
29. Nicolosi F., Skrypnik I. V. Nirenberg–Gagliardo interpolation inequality and regularity of solutions of nonlinear higher order equations // Topol. Methods Nonlinear Anal. – 1996. – 7, No. 2. – P. 327–347.
30. Nicolosi F., Skrypnik I. V. On Harnack type theorems for nonlinear higher order elliptic equations // Nonlinear Anal. – 2002. – 50, No. 1. – P. 129–147.
31. Rakotoson J.M., Ziemer W.P. Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations with general structure // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – 139, No. 2. – P. 747–764.
32. Скрыпник И.В. Условие регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – 37, № 6. – P. 1376–1427.
33. Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. – Киев, Наукова думка. – 1973.
34. Скрыпник И.В. О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. – 1978. – 14, № 6. – С. 1104–1118.
35. Скрыпник И.В. Регулярность граничной точки для квазилинейного эллиптического уравнения высшего порядка // Тр. МИАН. – 1991. – 200. – С. 310–321.
36. Skrypnik I.I., Voitovych M. V. $\mathfrak{B}_1$ classes of De Giorgi, Ladyzhenskaya and Ural'tseva and their application to elliptic and parabolic equations with nonstandard growth // Ukr. Mat. Visn. – 2019. – 16, No. 3. – P. 403–446.
37. Voitovych M. V. Hölder continuity of bounded generalized solutions for nonlinear fourth-order elliptic equations with strengthened coercivity and natural growth terms // Electron. J. Differential Equations. – 2017. – 2017, No. 63. – P. 1–18.
38. Voitovych M. V. Pointwise estimates of solutions to $2m$ -order quasilinear elliptic equations with $m(p, q)$ growth via Wolff potentials // Nonlinear Anal. – 2019. – 181. – P. 147–179.
39. Widman K.-O. Local bounds for solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations // Math. Z. – 1971. – 121, No. 1. – P. 81–95.

References

1. Adams, D.R., Hedberg, L.I. (1996). Function Spaces and Potential Theory, in: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 314, Springer-Verlag, Berlin.
2. Alberico, A., Ferone, V. (1995). Regularity properties of solutions of elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ in limit cases. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 6(4), 237–250.
3. Bennett, C., Sharpley, R. (1988). *Interpolation of operators*. Academic Press, Boston.
4. Bonafede, S., Voitovych, M.V. (2019). Hölder continuity up to the boundary of solutions to nonlinear fourth-order elliptic equations with natural growth terms. *Differ. Equ. Appl.*, 11(1), 107–127.
5. BreLOT, M. (1965). *Éléments de la théorie classique du potentiel*. 3e édition. Les cours de Sorbonne. 3e cycle. Centre de Documentation Universitaire, Paris.
6. D'Asero, S., Cataldo, V., Nicolosi, F. (2008) Regularity of minimizers of some integral functionals with degenerate integrands. *Nonlinear Anal.*, 68(11), 3283–3293.
7. De Giorgi, E. (2006). *Selected papers*. Springer-Verlag, Berlin.
8. Duzaar, F., Mingione, G. (2010). Gradient continuity estimates. *Calc. Var. Partial Differential*

- Equations*, 39(3-4), 379-418.
9. Ferone, V., Fusco, N. (1996). Continuity properties of minimizers of integral functionals in a limit case. *J. Math. Anal. Appl.*, 20(1), 27-52.
 10. Frehse, J. (1970). On the boundedness of weak solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 3(4), 607-627.
 11. Gilbarg, D., Trudinger, N.S. (1983). *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin: Springer-Verlag.
 12. Hedberg, L.I., Wolff, T.H. (1983). Thin sets in nonlinear potential theory. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(4), 161-187.
 13. Helms, L.L. (2014). *Potential theory*. Second edition. Universitext. Springer, London.
 14. Jiang, R., Koskela, P., Yang, D. (2012). Continuity of solutions to n -harmonic equations. *Manuscripta Math.*, 139(1-2), 237-248.
 15. Kilpeläinen, T., Malý, J. (1994). The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations. *Acta Math.*, 172(1), 137-161.
 16. Kovalevskii, A.A. (2001). Entropy solutions of the Dirichlet problem for a class of non-linear elliptic fourth-order equations with right-hand sides in L^1 . *Izv. Math.*, 65(2), 231-283.
 17. Kovalevsky, A., Nicolosi, F. (1997). Boundedness of solutions of variational inequalities with nonlinear degenerated elliptic operators of high order. *Appl. Anal.*, 65, 225-249.
 18. Kovalevsky, A., Nicolosi, F. (2000). On regularity up to the boundary of solutions to degenerate nonlinear elliptic high-order equations. *Nonlinear Anal.*, 40(1-8), 365-379.
 19. Kovalevskii, A.A., Voitovich, M.V. (2006). On the improvement of summability of generalized solutions of the Dirichlet problem for nonlinear equations of the fourth order with strengthened ellipticity. *Ukr. Mat. Zh.*, 58(11), 1511-1524.
 20. Kovalevsky, A.A., Skrypnik, I.I., Shishkov, A.E. (2016). *Singular solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations*. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH.
 21. Kuusi, T., Mingione, G. (2014). Guide to nonlinear potential estimates. *Bull. Math. Sci.*, 4(1), 1-82.
 22. Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N. (1973). *Linear and quasilinear elliptic equations*. Nauka, Moscow.
 23. Malý, J., Ziemer, W.P. (1997). Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations, in: *Math. Surveys and Monogr.*, vol. 15. American Math. Soc., Providence, RI.
 24. Maz'ya, V.G. (1968). Examples of nonregular solutions of quasilinear elliptic equations with analytic coefficients. *Funct. Anal. Appl.*, 2(3), 230-234.
 25. Maz'ya, V.G., Havin, V.P. (1972). Non-linear potential theory. *Russian Math. Surveys*, 27(6), 71-148.
 26. Mingione, G. (2006). Regularity of minima: an invitation to the dark side of the calculus of variations. *Appl. Math.*, 51(4), 355-426.
 27. Moser, J. (1960). A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13, 457-468.
 28. Moser, J. (1961). On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14, 577-591.
 29. Nicolosi, F., Skrypnik, I.V. (1996). Nirenberg–Gagliardo interpolation inequality and regularity of solutions of nonlinear higher order equations. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 7(2), 327-347.
 30. Nicolosi, F., Skrypnik, I.V. (2002). On Harnack type theorems for nonlinear higher order elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, 50(1), 129-147.
 31. Rakotoson, J.M., Ziemer, W.P. (1990). Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations with general structure. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 319(2), 747-764.
 32. Skrypnik, I.V. (1973). A regularity condition for generalized solutions of higher-order quasilinear elliptic equations. *Math. USSR-Izv.*, 7(6), 1371-1421.
 33. Skrypnik, I.V. (1973). *Nonlinear higher order elliptic equations*. Naukova dumka, Kiev (in Russian).
 34. Skrypnik, I.V. (1978). Higher order quasilinear elliptic equations with continuous generalized solutions. *Differentsial'nye Uravneniya*, 14(6), 1104-1118 (in Russian).
 35. Skrypnik, I.V. (1993). Regularity of a boundary point for a quasi-linear elliptic equation of higher

- order. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 200, 339-351.
36. Skrypnik, I.I., Voitovych, M.V. (2019). $\mathfrak{B}_1$ classes of De Giorgi, Ladyzhenskaya and Ural'tseva and their application to elliptic and parabolic equations with nonstandard growth. *Ukr. Mat. Visn.*, 16(3), 403-446.
37. Voitovych, M.V. (2017). Hölder continuity of bounded generalized solutions for nonlinear fourth-order elliptic equations with strengthened coercivity and natural growth terms. *Electron. J. Differential Equations*, 2017(63), 1-18.
38. Voitovych, M.V. (2019). Pointwise estimates of solutions to $2m$ -order quasilinear elliptic equations with m -(p, q) growth via Wolff potentials. *Nonlinear Anal.*, 181, 147-179.
39. Widman K.-O. (1971). Local bounds for solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations. *Math. Z.*, 121(1), 81-95.

M.V. Voitovych

Continuity of weak solutions to nonlinear fourth-order equations with strengthened ellipticity via Wolff potentials.

In the present article nonlinear fourth-order equations in the divergence form with L^1 -right-hand sides and the strengthened ellipticity condition on the coefficients are analyzed. Such equations, but with sufficiently regular right-hand sides, first appeared in the works of Professor I.V. Skrypnik concerning the regularity of generalized solutions for multidimensional nonlinear elliptic equations of high order. This class of equations correctly generalizes the corresponding nonlinear second-order elliptic equations with non-standard growth conditions on the coefficients, which are models for numerous physical phenomena in non-homogeneous medium. The main result of the article is a theorem on an estimation of oscillations in a ball of solutions to the given equations via the Wolff potentials of their right-hand sides. To prove this, we use the improved Kilpeläinen-Malý method and pointwise potential estimates of functions related to special subclasses of Sobolev spaces, akin to the well-known De Giorgi classes. A new point is the verification that these classes contain superpositions of solutions and Moser logarithmic functions that include the Wolff potential of the right-hand side of the equation. As a corollary, a new result is obtained on the interior continuity of solutions to the equations with right-hand sides from the Kato class, which is characterized by the uniform convergence to zero of the corresponding Wolff potentials. Some important cases of fulfilling this condition are considered: the right-hand side of the equation belongs to the Morrey space with an index exceeding a certain limiting value, then the solutions are locally Hölder continuous; if the right-hand side belongs to the borderline Lorentz-Zygmund classes, then the solutions are only locally continuous, but they are not Hölder continuous in the domain. In the case when the summability exponents of the right-hand sides of the equations under consideration are less than the borderline values, there are examples of unbounded discontinuous solutions. These facts are exact analogues of the corresponding results in the theory of second-order elliptic equations.

Keywords: *nonlinear elliptic equations, weak solutions, continuity, Wolff potential, Kato class.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
voitovichmu76@gmail.com

Отримано 02.12.19

УДК 517.5

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-4

©2019. С.В. Волков, В.І. Рязанов

ПРО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОГО СПОТВОРЕННЯ ДОВЖИНИ НА РИМАНОВИХ ПОВЕРХНЯХ

У статті, в термінах дилатацій, доведено ряд критеріїв для неперервного і гомеоморфного продовження на границю відображень скінченного спотворення довжини між областями на риманових поверхнях. Ця робота є продовженням наших попередніх статей [1] і [2], в яких можна знайти короткий історичний огляд та обговорення основних означень. Зазначені роботи були присвячені теорії граничної поведінки відображень зі скінченим спотворенням за Іванцем на риманових поверхнях, які спершу були визначені на площині в роботі [3], а після узагальнені на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в монографії [4]. В даній статті розвивається теорія граничної поведінки на риманових поверхнях, так званих, відображень зі скінченим спотворенням довжини, що були вперше визначені в роботі [5] в контексті $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, див. також главу 8 монографії [6]. Як було показано в роботах [7] і [8], такі відображення, взагалі кажучи, не є відображеннями зі скінченим спотворенням за Іванцем, оскільки їх перші часткові похідні можуть бути локально не інтегровані. В той же час, цей клас є узагальненням відомого класу відображень з обмеженим спотворенням довжини за Вайсяля–Мартіо з роботи [9]. Крім того, в цей клас входять в якості підкласу так звані скінченно біліпшицеві відображення, введені в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ в роботі [10], див. секцію 10.6 в [6], які в свою чергу є узагальненням добре відомих класів біліпшицевих відображень, а також ізометрій та квазіізометрій. При дослідженні локальної та граничної поведінки відображень зі скінченим спотворенням довжини в $\mathbb{R}^n$ ключовим фактором було те, що вони задовольняли деяким модульним нерівностям, які сприяли розгляду більш ширших класів відображень, див., наприклад, статті [5, 11, 12] та монографію [6]. Тому природньо, що при дослідженні відображень зі скінченим спотворенням на риманових поверхнях ми розпочнемо із встановлення відповідних модульних нерівностей, які будуть слугувати для нас основним інструментом при вивченні граничної поведінки таких відображень.

Ключові слова: риманові поверхні, гранична поведінка, неперервне і гомеоморфне продовження, відображення скінченного спотворення довжини, сильно досяжні і слабо плоскі границі.

Присвячується 100-річчю від дня народження Георгія Дмитровича Суворова

1. Означення та попередні зауваження.

В подальшому, ми завжди будемо вважати, що всі відображення, які ми розглядатимемо, є неперервними.

Почнемо з основних визначень роботи [5], адаптованих до випадку областей D в комплексній площині $\mathbb{C}$, див. також главу 8 монографії [6]. Будемо казати, що відображення $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ – **скінченного метричного спотворення**, пишемо $f \in \mathbf{FMD}$, якщо f володіє (N)-властивістю Лузіна відносно площі та

$$0 < l(z, f) \leq L(z, f) < \infty \quad \text{м.в.}, \quad (1)$$

Робота частково підтримана грантом Міністерства освіти і науки України, номер проекту 0119U100421.

де

$$l(z, f) := \liminf_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in D} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}, \quad L(z, f) := \limsup_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in D} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}. \quad (2)$$

Далі кажемо, що відображення $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ володіє **(L)–властивістю**, якщо для м.в. шляхів γ в D шлях $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляється та $f|_{\gamma}$ володіє **(N)–властивістю** Лузіна відносно міри довжини. Нагадаємо, що шлях γ в D є відображенням $\gamma : \Delta \rightarrow D$, де Δ – інтервал в $\mathbb{R}$. При цьому кажуть, що деяка властивість має місце для майже всіх **(м.в.)** шляхів, якщо шляхи з порушенням цієї властивості утворюють сімейство нульового конформного модуля, див., наприклад, означення в нашій попередній роботі [1], формули (6) і (7).

Кажемо також, що гомеоморфізм f між двома областями D та D^* в $\mathbb{C}$ – **скінченного спотворення довжини**, пишемо $f \in \mathbf{FLD}$, якщо $f \in \mathbf{FMD}$ і при цьому, f та f^{-1} володіють **(L)–властивістю**. Прикладами таких відображень можуть слугувати **скінченно біліпшицеві** гомеоморфізми, що задовольняють умові (1) всюди, а не тільки м.в., див. теорему 5.7 в статті [13] або теорему 10.11 в монографії [6]. Частинним випадком останніх виступають **біліпшицеві** гомеоморфізми, для яких величини в (1) рівномірно в області D відділені як від нуля, так і від нескінченності. Таким чином, гомеоморфізми скінченного спотворення довжини є далекосяжним узагальненням ізометрій та квазіізометрій.

Зауваження 1. За теоремою 6.10 в [5] або теоремою 8.6 в [6], гомеоморфізми $f \in \mathbf{FLD}$ між областями D та D^* в $\mathbb{C}$ задовольняють модульний нерівності

$$M(f\Gamma) \leq \int_D Q(z) \cdot \rho^2(z) \, dm(z) \quad (3)$$

з $Q = K_f$ для будь-якого сімейства Γ шляхів γ в D і $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Для визначення дилатації K_f , конформного модуля M сімейства Γ та допустимих ρ , див. [1].

Гомеоморфізми f між областями D та D^* в комплексній площині $\mathbb{C}$, що задовольняють умові (3), прийнято називати **Q–гомеоморфізмами**, див. статті [11] та [12], а також глави 5 та 6 монографії [6]. З огляду на зауваження 1, ці гомеоморфізми представляють собою ще більш широкий клас відображень ніж гомеоморфізми скінченного спотворення довжини.

Перейдемо до відповідних означень на риманових поверхнях. Нехай тепер f – гомеоморфізм між областями D та D^* на риманових поверхнях $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$. Перш за все кажемо, що f є відображенням **скінченного спотворення довжини**, пишемо $f \in \mathbf{FLD}$, якщо f є таким в картах $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$. З огляду на властивості конформних відображень, а саме, властивостей **(N)–Лузіна** відносно площі та довжини, а також збереження локального спрямлення шляхів, див., наприклад, теорему 5.6 в монографії [14], визначення не залежить від вибору карт. В подальшому також будемо говорити, що f є **локальним Q–гомеоморфізмом** для деякої вимірюваної функції $Q : D \rightarrow (0, \infty)$, якщо умова (3) виконується для будь-якого сімейства шляхів Γ в $D \cap U$ для карт U риманової поверхні $\mathbb{S}$, що є околами точок $p \in \overline{D}$.

Зауваження 2. Як відомо, якщо функція $\rho : V \rightarrow [0, \infty]$ є допустимою для деякого сімейства $\mathcal{A}$ шляхів α в відкритій множині V комплексної площини $\mathbb{C}$, то функція $\rho^*(\zeta) = \rho(\varphi^{-1}(\zeta))/|\varphi'(\varphi^{-1}(\zeta))|$ є допустимою для сімейства шляхів $\mathcal{B} := \varphi\mathcal{A}$ шляхів $\beta := \varphi \circ \alpha$ при будь-якому конформному відображенні $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$, див. ще раз теорему 5.6 в монографії [14]. Таким чином, права частина в (3) конформно інваріантна, оскільки якобіан конформного відображення $\varphi(z)$ рівний $|\varphi'(z)|^2$.

Пропозиція 1. *Будь-який гомеоморфізм f скінченного спотворення довжини між областями D та D^* на риманових поверхнях $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$, відповідно, є локальним Q -гомеоморфізмом з $Q = K_f$.*

Доведення. Нехай $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ карта риманової поверхні $\mathbb{S}$, яка є околom довільної точки $p \in \bar{D}$. Оскільки простір $\mathbb{S}$ сепарабельний, відкрита множина $D \cap U$ складається зі зліченої кількості компонент U_k , кожна з яких конформно еквівалентна плоским областям $V_k := g(U_k)$. Таким чином, області $U_k^* := f(U_k)$ гомеоморфні плоским областям V_k і, як наслідок, за загальним принципом Кьобе, див., наприклад, [15], с. 48, конформно еквівалентні цим областям.

Відмітимо також, що сімейство шляхів Γ розбивається на злічений набір сімейства шляхів Γ_k , що попарно не перетинаються, і лежать в областях U_k . Тому сімейство шляхів $\Gamma^* := f\Gamma$ розбивається на злічений набір сімейства шляхів $\Gamma_k^* := f\Gamma_k$, що попарно не перетинаються, і лежать в областях U_k^* , тобто, таких, що лежать у відповідних картах риманової поверхні $\mathbb{S}^*$. Таким чином, за зауваженням 1 роботи [1] та за зауваженням 1 і 2 даної роботи, отримуємо необхідний висновок.

2. Основна лема.

В подальшому, $\Delta(E, F; \Omega)$ для множин E, F і Ω на римановій поверхні $\mathbb{S}$ означає сімейство кривих $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}$, які з'єднують множини E і F в Ω , тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in \Omega$ при $a < t < b$. Нагадаємо також, що фактор-простір $\mathbb{D}/G$ одиничного кола $\mathbb{D}$ по дискретній групі G без нерухомих точок є римановою поверхнею з картами з проєкції $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/G$, див., наприклад, теорему 6.2.1 в [16].

Лема 1. *Нехай G – дискретна група дробово-лінійних відображень $\mathbb{D}$ на себе без нерухомих точок, $f : D \rightarrow D^*$ – гомеоморфізм скінченного спотворення довжини між областями D та D^* на риманових поверхнях $\mathbb{D}/G$ та $\mathbb{S}^*$. Тоді*

$$M(\Delta(fC_1, fC_2; fA)) \leq \int_{A \cap D} K_f(p) \cdot \xi^2(h(p, p_0)) dh(p) \quad \forall p_0 \in \bar{D} \quad (4)$$

для будь-яких кілець $A = A(p_0, R_1, R_2) = \{p \in \mathbb{D}/G : R_1 < h(p, p_0) < R_2\}$, кил $C_1 = \{z \in \mathbb{D}/G : h(p, p_0) = r_1\}$, $C_2 = \{p \in \mathbb{D}/G : h(p, p_0) = r_2\}$, $0 < R_1 < R_2 < \varepsilon(p_0)$, і, для будь-яких вимірних функцій $\xi : (R_1, R_2) \rightarrow [0, \infty]$, таких, що

$$\int_{R_1}^{R_2} \xi(R) dR \geq 1, \quad (5)$$

і проєкція $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/G$ конформна на крузі $\{z \in \mathbb{D} : h(z, z_0) < \varepsilon(p_0)\}$, $p_0 = \pi(z_0)$.

Доведення. Як обговорювалось в секції 2 роботи [1], тут ми ототожнюємо поверхню $\mathbb{D}/G$ з фундаментальною множиною F в $\mathbb{D}$ для G з метрикою d , визначеною (2.10) в [1], яка містить фундаментальний многокутник Пуанкаре D_{z_0} для G з центром в точці $z_0 \in \mathbb{D}$, орбіта якої G_{z_0} і є p_0 . Без обмежень загальності, будемо рахувати $z_0 = 0$. Це досягається за рахунок дробово-лінійного відображення $\mathbb{D}$ на себе $g_0(z) = (z - z_0)/(1 - \bar{z}z_0)$, що переводить точку z_0 в початок координат. Переходячи до нової групи G_0 , отримуємо риманову поверхню $\mathbb{D}/G_0$, яка будет конформно еквівалентною $\mathbb{D}/G$, а всі величини й умови в лемі 1 конформно інваріантні. Оберемо $\varepsilon(p_0) \in (0, \delta_0)$ настільки малими, щоб при $d(0, z) \leq \varepsilon(p_0)$ виконувалась рівність $d(0, z) = h(0, z)$, де $\delta_0 = \min \left[\inf_{\zeta \in \partial D_0} d(0, \zeta), \sup_{z \in D} d(0, z) \right]$.

Відмітимо, що за визначенням гіперболічної метрики, див., напр., (11) в [1],

$$R := h(0, z) = \log \frac{1+r}{1-r}, \quad \text{где} \quad r := |z|,$$

і, відповідно,

$$dR = \frac{2dr}{1-r^2}, \quad r = \frac{e^R - 1}{e^R + 1},$$

$$A = \{z \in \mathbb{D} : r_1 < |z| < r_2\}, \quad C_1 = \{z \in \mathbb{D} : |z| = r_1\}, \quad C_2 = \{z \in \mathbb{D} : |z| = r_2\},$$

$$r_1 := \frac{e^{R_1} - 1}{e^{R_1} + 1}, \quad r_2 := \frac{e^{R_2} - 1}{e^{R_2} + 1}.$$

Як наслідок,

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1, \quad \text{де} \quad \eta(r) = \frac{2}{1-r^2} \cdot \xi \left(\log \frac{1+r}{1-r} \right),$$

тому функція $\rho(z) := \eta(|z|)$, $z \in A$, є допустимою для зазначеного сімейства шляхів, якщо її продовжити нулем поза A і D . Крім того,

$$\int_{A \cap D} K_f(z) \cdot \xi^2(h(z, z_0)) dh(z) = \int_{A \cap D} K_f(z) \cdot \eta^2(|z|) dm(z), \quad (6)$$

де елемент площі $dm(z) := dx dy$ відповідає мірі Лебега на площині $\mathbb{C}$. Таким чином, висновок лєми впливає з пропозиції 1.

Зауваження 3. За теоремою уніформізації Клейна–Пуанкаре, див. II.3 в [1], а також 7.4 в [17], будь-яка риманова поверхня $\mathbb{S}$ конформно еквівалентна фактор-простору одиничного круга $\mathbb{D}$ за дискретною групою G без нерухомих точок, за виключенням найпростіших випадків, коли $\mathbb{S}$ конформно еквівалентна $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, кільцю або тору.

У випадку тора, $\mathbb{S}$ конформно еквівалентна фактор-простору $\mathbb{C}/G$ за групою G зсувів з двома генераторами $z \rightarrow z + \omega_1$ і $z \rightarrow z + \omega_2$, де ω_1 і $\omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і

$\text{Im } \omega_1/\omega_2 > 0$. В цьому випадку, фундаментальна область F є паралелограмом зі сторонами паралельними ω_1 та ω_2 , після склейки протилежних сторін якого і отримується тор. Оскільки Евклідові відстані і площі інваріантні відносно зсувів, то метрика і площа на поверхні $\mathbb{C}/G$ в малому також співпадають з Евклідовим.

Таким чином, за пропозицією 1 відношення (4) має місце для всіх вказаних особливих випадків з Евклідовим відстаням і площею замість гіперболічних. Хоча, зберігаємо теж позначення для універсальності.

3. Про продовження на границю обернених відображень.

Тут і далі розуміємо, що дилатація K_f продовжена нулем поза D і $\mathbb{S}$, пишемо $K_f \in L^1_{\text{loc}}$, якщо K_f локально інтегрується в картах $\mathbb{S}$. Будемо також казати як і в роботі [1], що гомеоморфізм $f : D \rightarrow D^*$ між областями D та D^* в компактифікаціях Керекьярто-Стоїлова $\bar{\mathbb{S}}$ та $\bar{\mathbb{S}}^*$ є **відображенням зі скінченням спотворенням довжини**, пишемо $f \in \mathbf{FLD}$, якщо ця властивість має місце для його звуження в $\mathbb{S}$. Нагадаємо, що гомеоморфізм між областями в $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$ завжди продовжується до гомеоморфізму між відповідними областями в $\bar{\mathbb{S}}$ та $\bar{\mathbb{S}}^*$.

Наступна лема є основною при дослідженні проблеми неперервного продовження обернених відображень f^{-1} для $f \in \mathbf{FLD}$ на границю.

Лема 2. *Нехай $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D та D^* – області в $\bar{\mathbb{S}}$ і $\bar{\mathbb{S}}^*$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$ і $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, і ∂D^* – слабо плоска. Якщо $f : D \rightarrow D^*$ – гомеоморфізм зі скінченням спотворенням довжини і $K_f \in L^1_{\text{loc}}$, тоді в точках p_1 і $p_2 \in \partial D$, $p_1 \neq p_2$, локальної зв'язності області D*

$$C(p_1, f) \cap C(p_2, f) = \emptyset, \quad (7)$$

де $C(p_0, f)$ для будь-якої точки $p_0 \in \partial D \subset \mathbb{S}$ означає множину точок накопичення $f(p)$ при $p \rightarrow p_0$ на римановій поверхні $\mathbb{S}^*$.

Доведення. Згідно зауваження 3, ми можемо обмежитись випадком поверхонь гіперболічного типу. Відмітимо також, що ∂D та ∂D^* мають околи, які не містять жодних граничних елементів поверхонь $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}^*$ з моделі Керекьярто-Стоїлова, оскільки $\partial D \subset \mathbb{S}$ і $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$.

Нехай $E_i = C(p_i, f)$, $i = 1, 2$. Тоді з наслідку 1 статті [1] $E_i \subseteq \partial D^*$, $i = 1, 2$. Допустимо, що $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ і нехай $p_* \in E_1 \cap E_2$.

Позначимо через δ число $\varepsilon(p_1)$ з леми 1. Так як область D локально зв'язна в точках p_1 і p_2 , існують їх відкриті околи U_1 і U_2 в $\mathbb{S}$, відповідно, такі, що $W_1 = D \cap U_1$ і $W_2 = D \cap U_2$ є областями, а також $U_1 \subset B(p_1, \delta/3)$ і $U_2 \subset \mathbb{S} \setminus B(p_1, 2\delta/3)$. Тоді за нерівністю трикутника $h(W_1, W_2) \geq \delta/3$. Розглянемо функцію

$$\xi(t) = \begin{cases} 3/\delta, & t \in (\delta/3, 2\delta/3), \\ 0, & t \notin (\delta/3, 2\delta/3). \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\int_{\delta/3}^{2\delta/3} \xi(t) dt = 1$ й за принципом мінорирування та лемою 1 для будь-

яких континуумів $C_1 \subset W_1$ і $C_2 \subset W_2$:

$$\begin{aligned} M(f(\Delta(C_1, C_2, D))) &\leq \int_{A(p_1, \delta/3, 2\delta/3)} K_f(p) \cdot \xi^2(h(p, p_1)) dh(p) \leq \\ &\leq \frac{3^2}{\delta^2} \int_{A(p_1, \delta/3, 2\delta/3)} K_f(p) dh(p) < \infty, \end{aligned}$$

так як $K_f \in L^1(A)$, де $A = A(p_1, \delta/3, 2\delta/3)$ та припускається, що K_f продовжена нулем поза D .

Проте, ця оцінка протиречить умові, що ∂D^* є слабо плоскою. Дійсно, $p_* \in E_1 \cap E_2 \subseteq \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ і тоді в областях $W_1^* = fW_1$ і $W_2^* = fW_2$ знайдеться по неперервній кривій, що перетинає будь-які наперед задані кола $\partial B(p_*, r_0)$ і $\partial B(p_*, r_*)$ з достатньо малими радіусами r_0 і r_* . Таким чином, припущення, що $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ було хибним.

На відміну від прямих відображень, див. наступну секцію, має місце простий критерій для продовження обернених відображень на границю.

Теорема 1. *Нехай $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D та D^* – області в $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$ і $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально зв'язна на границі і ∂D^* – слабо плоска. Якщо $f : D \rightarrow D^*$ – гомеоморфізм зі скінченним спотворенням довжини і $K_f \in L^1_{\text{loc}}$, то f^{-1} продовжується за неперервністю в $\overline{D^*}$.*

Доведення. За теоремою Урисона $\overline{\mathbb{S}}$ є простір з можливістю визначення метрики, див., наприклад, теорему 22.II.1 в [18]. Тому компактність $\overline{\mathbb{S}}$ еквівалентна секвенціальній компактності, див., наприклад, зауваження 41.I.3 в [19]. Отже, гранична множина $C(p_*, f^{-1})$ не пуста для будь-якої точки $p_* \in \partial D^*$ з огляду секвенціальної компактності $\overline{\mathbb{S}}$ і $C(p_*, f^{-1}) \subseteq \partial D \subset \mathbb{S}$ за наслідком 1 з роботи [1]. Таким чином, достатньо переконатись, що $C(p_*, f^{-1})$ складається з єдиної точки, див., наприклад, теореми 20.V.1 і 21.II.1 в [18], оскільки на $\overline{\mathbb{S}}$ може бути визначена метрика.

Допустимо, що знайдеться принаймні дві точки p_1 і $p_2 \in \partial D$ в $C(p_*, f^{-1})$. Тоді $p_* \in C(p_1, f) \cap C(p_2, f)$, що протиречить лемі 2. Отримане протиріччя спростовує зроблене допущення, і тим самим, доводить висновок теореми 1.

4. Неперервне продовження на границю прямих відображень.

На відміну від випадку обернених відображень, як це було встановлено ще на площині, жодна степінь інтегрованості дилатації не призводить до продовження Q -гомеоморфізмів (і як наслідок, гомеоморфізмів класу FLD) на границю, див., наприклад, пропозицію 6.3 в [6]. Відповідний критерій для цього, наведений нижче, є значно витонченішим. Як і раніше, ми розуміємо, що дилатація K_f продовжена нулем за межі області D .

Лема 3. *Нехай $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D і D^* – області в $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$, $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально зв'язна в точці $p_0 \in \partial D$. Допустимо, що $f : D \rightarrow D^*$ – гомеоморфізм скінченного спотворення довжини такий, що*

∂D^* сильно досяжна хоча б в одній точці $C(p_0, f)$ і, в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$ з локальною координатою z_0 точки p_0 ,

$$\int_{\varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0} K_f(z) \cdot \psi_{z_0, \varepsilon}^2(|z - z_0|) dm(z) = o(I_{z_0, \varepsilon_0}^2(\varepsilon)), \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (8)$$

для деякого $\varepsilon_0 > 0$, де $\psi_{z_0, \varepsilon}(t)$ – сімейство невід’ємних вимірних (по Лебегу) функцій на $(0, \infty)$, таких що задовольняють

$$0 < I_{z_0, \varepsilon_0}(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0, \varepsilon}(t) dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \quad (9)$$

Тоді відображення f продовжується по неперервності в точку p_0 і $f(p_0) \in \partial D^*$.

Відмітимо, що умови (8)-(9) приводять до того, що $I_{z_0, \varepsilon_0}(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ і, що ε_0 може бути обрано настільки малим на скільки потрібно зі збереженням (8)-(9).

Доведення. Переходячи до карти U , ми можемо вважати, без обмеження загальності, що $\mathbb{S}$ і D – плоскі області. Тоді за принципом уніфірмації Кюбе, див., наприклад, [15], с. 48, область $D^* = fD$ також є картою на римановій поверхні $\mathbb{S}^*$. Таким чином, за пропозицією 1

$$M(\Delta(fC_1, fC_2; fD)) \leq \int_A K_f(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|) dm(z) \quad (10)$$

для будь-яких кілець $A = A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \varepsilon_* := \sup_{z \in D} |z - z_0|$, континумів C_1 і C_2 в D , що належать різним компонентам зв’язності доповнення A в $\mathbb{C}$, і для будь-яких функцій, що вимірюються $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, таких, що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1, \quad (11)$$

див., наприклад, пропозицію 2.4 в [20] або 13.4 в [6].

Нагадаємо, що за теоремою Урисона $\overline{\mathbb{S}^*}$ є простором з визначенням метрики, див., наприклад, теорему 22.II.1 в [18]. Тому компактність $\overline{\mathbb{S}^*}$ еквівалентна секвенціальній компактності, див., наприклад, зауваження 41.I.3 в [19]. З цього слідує, гранична множина $C(z_0, f)$ не є пустою з огляду на секвенціальну компактність $\overline{\mathbb{S}^*}$, і $C(z_0, f) \subseteq \partial D^* \subset \mathbb{S}^*$ за наслідком 1 з роботи [1]. Таким чином, достатньо показати, що $C(z_0, f)$ складається з єдиної точки, див., наприклад, теореми 20.V.1 і 21.II.1 в [18], оскільки $\overline{\mathbb{S}^*}$ метризується.

За умовою леми, ∂D^* сильно досяжна в деякій точці $p_1 \in C(z_0, f)$. Допустимо, що існує ще хоча б одна точка $p_2 \in C(z_0, f)$. Через d позначимо одну з відстаней в $\overline{\mathbb{S}^*}$. Нехай $d_0 \in (0, d(p_1, p_2))$.

З огляду на локальну зв'язність області D в точці z_0 , знайдеться послідовність відкритих околів U_k точки z_0 така, що $D_k = D \cap U_k$ – області і $\text{diam } U_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тоді знайдуться точки ζ_k і $\zeta_k^* \in D_k^* := f D_k$, близькі до p_1 і p_2 , відповідно, для яких $d(p_1, \zeta_k) < d_0$ і $d(p_1, \zeta_k^*) > d_0$, і які можна з'єднати кривими C_k в областях D_k^* , $k = 1, 2, \dots$. З огляду на зв'язність C_k ,

$$C_k \cap \partial B(p_1, d_0) \neq \emptyset, \quad \text{де} \quad B(p_1, d_0) = \{p \in \mathbb{S}^* : d(p, p_1) < d_0\}. \quad (12)$$

За умови сильної досяжності точки p_1 знайдуться континуум $C_0 \subset D^*$ і число $\delta > 0$ такі, що

$$M(\Delta(C_0, C_k; D^*)) \geq \delta \quad (13)$$

для достатньо великих k , оскільки $\text{dist}(p_1, C_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Відмітимо, що $K_0 := f^{-1}(C_0)$ також є континуумом як неперервний образ континуума. Таким чином, $\varepsilon^* := \text{dist}(z_0, K_0) > 0$. Визначимо в умові леми $\varepsilon_0 < \min(\varepsilon_*, \varepsilon^*)$.

Зауважимо, що для функції

$$\eta_\varepsilon(t) := \begin{cases} \psi_{z_0, \varepsilon}(t)/I_{z_0, \varepsilon_0}(\varepsilon), & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0), \end{cases} \quad (14)$$

виконана умова

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Таким чином, для довільного континуума $K \subset D(z_0, \varepsilon) := \{z \in D : |z - z_0| < \varepsilon\}$, за властивістю (10),

$$\begin{aligned} M(\Delta(fK_0, fK; D^*)) &\leq \int_{\varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0} K_f(z) \cdot \eta_\varepsilon^2(|z - z_0|) dm(z) = \\ &= \frac{1}{I_{z_0, \varepsilon_0}^2(\varepsilon)} \int_{\varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0} K_f(z) \cdot \psi_{z_0, \varepsilon}^2(|z - z_0|) dm(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (15)$$

з огляду на умову (8).

З іншого боку, для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при великих k має місце включення $D_k \subset D(z_0, \varepsilon)$ і, як наслідок, $f^{-1}(C_k) \subset D(z_0, \varepsilon)$. Таким чином, отримаємо протиріччя між (13) і (15). Це протиріччя спростовує гіпотезу про існування другої точки p_2 в $C(z_0, f)$, що і завершує доведення.

Теорема 2. Нехай $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D і D^* – області в $\bar{\mathbb{S}}$ та $\bar{\mathbb{S}}^*$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$, $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально зв'язна на границі і ∂D^* сильно досяжна, $f : D \rightarrow D^*$ – гомеоморфізм скінченного спотворення довжини.

Допустимо, що для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$,

$$\int_0^\delta \frac{dr}{\|K_f\|(z_0, r)} = \infty \quad (16)$$

при всіх достатньо малих $\delta > 0$, де

$$\|K_f\|(z_0, r) = \int_{|z-z_0|=r} K_f(z) |dz| . \quad (17)$$

Тоді відображення f продовжується по неперервності на ∂D .

Доведення. Дійсно, при $\psi_{z_0}(t) = 1/\|K_f\|(z_0, t)$ для всіх $t \in (0, \varepsilon_0)$ і достатньо малому $\varepsilon_0 > 0$, та $\psi_{z_0}(t) = 1$ для всіх $t \in (\varepsilon_0, \infty)$, з (16) отримаємо, що

$$\int_{\varepsilon < |z-z_0| < \varepsilon_0} K_f(z) \cdot \psi_{z_0}^2(|z-z_0|) dm(z) = I_{z_0, \varepsilon_0}(\varepsilon) = o(I_{z_0, \varepsilon_0}^2(\varepsilon)) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 ,$$

де з огляду умов $K_f(z) \geq 1$ в D і $K_f \in L_{\text{loc}}^1$,

$$0 < I_{z_0, \varepsilon_0}(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0}(t) dt < \infty .$$

Таким чином, теорема 2 випливає з леми 3 та теореми 1.

Наслідок 1. В частинному випадку, висновок теореми 2 має місце якщо, для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в карті U поверхні $\mathbb{S}$,

$$K_f(z) = O\left(\log \frac{1}{|z-z_0|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow z_0 , \quad (18)$$

або, більш загально,

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 , \quad (19)$$

де $k_{z_0}(\varepsilon)$ – середнє значення функції K_f на колі $|z-z_0| = \varepsilon$.

З урахуванням теореми 3.1 в роботі [21] та результату теореми 2, отримаємо наступне.

Теорема 3. Нехай $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D і D^* – області в $\bar{\mathbb{S}}$ та $\bar{\mathbb{S}}^*$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$, $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально зв'язна на границі і ∂D^* сильно досяжна, $f : D \rightarrow D^*$ – гомеоморфізм скінченного спотворення довжини.

Допустимо, що для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$,

$$\int \Phi(K_f(z)) dm(z) < \infty , \quad (20)$$

де $\Phi : \bar{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ – неспадаюча випукла функція з умовою, для деякого $\delta > \Phi(0)$,

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty . \quad (21)$$

Тоді відображення f продовжується по неперервності на ∂D .

Зауваження 4. Відмітимо, що за теоремою 5.1 та зауваженням 5.1 в [13] умова (21) є не тільки достатньою, а й необхідною для неперервного продовження на границю всіх відображень f скінченного спотворення довжини з інтегральними обмеженнями виду (20).

Зауважимо також, що за теоремою 2.1 в [21] умова (21) еквівалентна будь-якій із наступних умов, де $H(t) = \log \Phi(t)$:

$$\int_{\Delta}^{\infty} H'(t) \frac{dt}{t} = \infty \quad (22)$$

або

$$\int_{\Delta}^{\infty} \frac{dH(t)}{t} = \infty \quad (23)$$

або

$$\int_{\Delta}^{\infty} H(t) \frac{dt}{t^2} = \infty \quad (24)$$

для деякого $\Delta > 0$, а також кожній із рівностей:

$$\int_0^{\delta} H\left(\frac{1}{t}\right) dt = \infty \quad (25)$$

для деякого $\delta > 0$,

$$\int_{\Delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H^{-1}(\eta)} = \infty \quad (26)$$

для деякого $\Delta_* > H(+0)$.

Інтеграл в (23) розуміється як інтеграл Лебега–Стилтьєса, а інтеграли в (28), (24)–(26) як звичайні інтеграли Лебега.

Необхідно навести ще пояснення. В правих частинах умов (22)–(26) маємо на увазі $+\infty$. Якщо $\Phi(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$, то $H(t) = -\infty$ для $t \in [0, t_*]$, і ми завершуємо означення в (22), вважаючи $H'(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$. Відмітимо, що умови (23) і (24) виключають випадок того, що t_* належить інтервалу інтегрування, оскільки в протилежному випадку ліві частини в (23) і (24) або рівні $-\infty$, або не визначені. Тому припускаємо, що в (22)–(25) $\delta > t_0$, відповідно, $\Delta < 1/t_0$, де $t_0 := \sup_{\Phi(t)=0} t$, і вважаємо $t_0 = 0$, якщо $\Phi(0) > 0$.

Найбільш цікавим із вказаних вище умов є умова (24), яка може бути записана у вигляді:

$$\int_{\delta}^{\infty} \log \Phi(t) \frac{dt}{t^2} = \infty. \quad (27)$$

Наслідок 2. Зокрема, висновок теореми 3 має місце, якщо при деякому $\alpha > 0$

$$\int e^{\alpha K_f(z)} dm(z) < \infty. \quad (28)$$

Наступне твердження є наслідком теореми 1 і леми 3 при $\psi(t) = 1/t$.

Теорема 4. Нехай $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D і D^* – області в $\bar{\mathbb{S}}$ та $\bar{\mathbb{S}}^*$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$, $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально зв'язна на границі і ∂D^* сильно досяжна, $f : D \rightarrow D^*$ – гомеоморфізм скінченного спотворення довжини.

Допустимо, що для будь-якої точки $z_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$,

$$\int_{\varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0} K_f(z) \frac{dm(z)}{|z - z_0|^2} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^2\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (29)$$

Тоді відображення f продовжується по неперервності на ∂D .

Зауваження 5. Обираючи в лемі 3 функцію $\psi(t) = 1/(t \log 1/t)$ замість $\psi(t) = 1/t$ отримаємо, що умова (29) може бути замінена умовою

$$\int_{\varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0} \frac{K_f(z) dm(z)}{\left(|z - z_0| \log \frac{1}{|z - z_0|}\right)^2} = o\left(\left[\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right]^2\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30)$$

Аналогічно, умова (19) за теоремою 2 може бути замінена більш слабкою умовою

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon} \log \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (31)$$

Звичайно, ми могли б тут навести велику кількість відповідних умов логарифмічного типу, використовуючи функції $\psi(t)$, що підходять.

Аналогічно як в [22], говоримо, що функція $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ на відкритій множині $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ має **скінченне середнє коливання** в точці $z_0 \in D$, пишемо $\varphi \in \text{FMO}(z_0)$, якщо

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{B(z_0, \varepsilon)} |\varphi(z) - \tilde{\varphi}_\varepsilon| dm(z) < \infty, \quad (32)$$

де $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ – середнє значення функції φ в крузі $B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

За лемою 3 з вибором $\psi_{z_0, \varepsilon}(t) \equiv 1/t \log \frac{1}{t}$, див. також наслідок 2.3 в [22], отримуємо наступний результат.

Теорема 5. Нехай $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D і D^* – області в $\bar{\mathbb{S}}$ та $\bar{\mathbb{S}}^*$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$, $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально зв'язна на границі і ∂D^* сильно досяжна, $f : D \rightarrow D^*$ – гомеоморфізм скінченного спотворення довжини.

Допустимо, що для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$, для деякої функції $Q : U \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$K_f(z) \leq Q(z) \in \text{FMO}(z_0) \quad \forall z \in U. \quad (33)$$

Тоді відображення f продовжується по неперервності на ∂D .

За наслідком 2.1 в [22] з теореми 5 також маємо:

Наслідок 3. Зокрема, висновок теореми 5 має місце, якщо

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{B(z_0, \varepsilon)} K_f(z) \, dm(z) < \infty.$$

Зауваження 6. Лема 3 дозволяє проводити поточковий аналіз: якщо виконані умови на дилатацію в будь-якій граничній точці D , то в цій точці має місце продовження на границю по неперервності.

5. Про гомеоморфне продовження відображень на границю.

Комбінуючи теорему 1 з результатами попереднього розділу, можна отримати цілу низку ефективних критеріїв гомеоморфного продовження на границю для відображень зі скінченим спотворенням довжини між областями на риманових поверхнях. Як і раніше, тут ми будемо розуміти, що функція K_f продовжена нулем поза областю D .

Теорема 6. Нехай в доповнення до умов теореми 1, для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$,

$$\int_0^\delta \frac{dr}{\|K_f\|(z_0, r)} = \infty \quad (34)$$

при всіх достатньо малих $\delta > 0$, де

$$\|K_f\|(z_0, r) = \int_{|z-z_0|=r} K_f(z) \, |dz|. \quad (35)$$

Тоді відображення f можна продовжити до гомеоморфізму $\overline{D}$ на $\overline{D}^*$.

Наслідок 4. В частинному випадку, висновок теореми 6 має місце якщо, для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в карті U поверхні $\mathbb{S}$,

$$K_f(z) = O\left(\log \frac{1}{|z - z_0|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow z_0, \quad (36)$$

або, більш загально,

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (37)$$

де $k_{z_0}(\varepsilon)$ – середнє значення функції K_f на колі $|z - z_0| = \varepsilon$.

Теорема 7. За умов теореми 1, нехай для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ знайдеться карта поверхні $\mathbb{S}$, що містить p_0 , в локальних координатах якої

$$\int \Phi(K_f(z)) \, dm(z) < \infty, \quad (38)$$

де $\Phi: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ – неспадуюча випукла функція з умовою, для деякого $\delta > \Phi(0)$,

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty. \quad (39)$$

Тоді відображення f можна продовжити до гомеоморфізму $\overline{D}$ на $\overline{D^*}$.

Наслідок 5. Зокрема, висновок теореми 7 має місце, якщо при деякому $\alpha > 0$

$$\int e^{\alpha K_f(z)} \, dm(z) < \infty. \quad (40)$$

Теорема 8. Нехай за умов теореми 1, для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$,

$$\int_{\varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0} K_f(z) \frac{dm(z)}{|z - z_0|^2} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^2\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (41)$$

Тоді відображення f продовжується до гомеоморфізму $\overline{D}$ на $\overline{D^*}$.

Теорема 9. Нехай за умов теореми 1, для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$, $K_f(z) \leq Q(z) \in \text{FMO}$. Тоді відображення f продовжується до гомеоморфізму $\overline{D}$ на $\overline{D^*}$.

Наслідок 6. Зокрема, висновок теореми 9 має місце, якщо

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{B(z_0, \varepsilon)} K_f(z) \, dm(z) < \infty.$$

Цитована література

1. Волков С.В., Рязанов В.І. О граничном поведении отображений класса Соболева на римановых поверхностях // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 34–53.
2. Ryzanov V., Volkov S. On the boundary behavior of mappings in the class $W1,1loc$ on Riemann surfaces // Complex Anal. Oper. Theory – 2017. – Vol. 11, № 7. – P. 1503–1520.
3. Iwaniec T., Sverak V. On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – Vol. 118. – P. 181–188.
4. Iwaniec T., Martin G. Geometric function theory and non-linear analysis. – Oxford, Oxford Univ. Press. – 2001.

5. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – Vol. 93. – P. 215–236.
6. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. – Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York. – 2009.
7. Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V. On the boundary behavior of mappings with finite distortion in the plane // Lobachevskii J. Math. – 2017. – Vol. 38, № 2. – P. 290–306.
8. Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V. Prime ends in theory of mappings with finite distortion in the plane // Filomat. – 2017. – Vol. 31, № 5. – P. 1349–1366.
9. Martio O., Väisälä J. Elliptic equations and maps of bounded length distortion // Math. Ann. – 1988. – Vol. 282, №3. – P. 423–443.
10. Kovtonyuk D., Ryazanov V. On the boundary behavior of generalized quasi-isometries // J. Anal. Math. – 2011. – Vol. 115. – P. 103–120.
11. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Q -homeomorphisms // Complex analysis and dynamical systems. Contemp. Math. – 2004. – Vol. 364. – P. 193–203.
12. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On Q -homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2005. – Vol. 30, № 1. – P. 49–69.
13. Kovtonyuk D., Ryazanov V. On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. – 2008. – Vol. 104. – P. 291–306.
14. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. – Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229. – Springer-Verlag, Berlin–New York. – 1971.
15. Крушкаль С.Л., Апанасов Б.Н., Гусевский Н.А. Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах. – Наука, Новосибирск. – 1981.
16. Бердон А. Геометрия в дискретных группах. – М.: Наука, 1986.
17. Zieschang H., Vogt E., Coldewey H. Surfaces and planar discontinuous groups. – Lecture Notes in Mathematics, Vol. 835. – Springer, Berlin. – 1980.
18. Куратовский К. Топология, т. 1. – М.: Мир, 1966.
19. Куратовский К. Топология, т. 2. – М.: Мир, 1969.
20. Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вісник. – 2007. – Т. 4, № 2. – С. 199–234; transl. in Ukrainian Math. Bull. – 2007. – Vol. 4, № 2. – P. 199–234.
21. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вісник. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 73–87; transl. in J. Math. Sci. – 2011. – Vol. 173, No. 4. – P. 397–407.
22. Игнатъев А. А., Рязанов В.И. Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вісник. – 2005. – Т. 2, № 3. – С. 395–417; transl. in Ukrainian Math. Bull. – 2005. – Vol. 2, № 3. – P. 403–424.

References

1. Volkov, S.V., Ryazanov, V.I. (2015). О граничном поведении отображений класса Соболева на римановых поверхностях. *Trudy IPMM NAN Ukrainy*, 29, 34–53 (in Russian).
2. Ryazanov, V., Volkov, S. (2017). On the boundary behavior of mappings in the class $W^{1,1}_{loc}$ on Riemann surfaces. *Complex Anal. Oper. Theory*, 11(7), 1503–1520.
3. Iwaniec, T., Sverak, V. (1993). On mappings with integrable dilatation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118, 181–188.
4. Iwaniec, T., Martin, G. (2001). *Geometric function theory and non-linear analysis*. Oxford, Oxford Univ.
5. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Mappings with finite length distortion. *J. Anal. Math.*, 93, 215–236.
6. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in modern mapping theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York.
7. Kovtonyuk, D., Petkov, I., Ryazanov, V. (2017). On the boundary behavior of mappings with finite distortion in the plane. *Lobachevskii J. Math.*, 38(2), 290–306.
8. Kovtonyuk, D., Petkov, I., Ryazanov, V. (2017). Prime ends in theory of mappings with finite

- distortion in the plane. *Filomat*, 31(5), 1349–1366.
9. Martio, O., Väisälä, J. (1988). Elliptic equations and maps of bounded length distortion. *Math. Ann.*, 282(3), 423–443.
10. Kovtonyuk, D., Ryazanov, V. (2011). On the boundary behavior of generalized quasi-isometries. *J. Anal. Math.*, 115, 103–120.
11. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Q -homeomorphisms. *Complex analysis and dynamical systems, Contemp. Math.*, 364, 193–203.
12. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On Q -homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 30(1), 49–69.
13. Kovtonyuk, D., Ryazanov, V. (2008). On the theory of mappings with finite area distortion. *J. Anal. Math.*, 104, 291–306.
14. Väisälä, J. (1971). *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229. Springer-Verlag, Berlin-New York.
15. Krushkal', S.L., Apanasov, B.N., Gusevskij, N.A. (1981). *Klejnovy' gruppy' i uniformizacziya v primerakh i zadachakh*. Nauka, Novosibirsk (in Russian).
16. Berdon, A. (1986). *The geometry of discrete groups*. Nauka, Moscow (in Russian).
17. Zieschang, H., Vogt, E., Coldewey, H. (1980). *Surfaces and planar discontinuous groups*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 835. Springer, Berlin.
18. Kuratovskij, K. (1966). *Topologiya, t. 1*. Mir, Moskva (in Russian).
19. Kuratovskij, K. (1969). *Topologiya, t. 2*. Mir, Moskva (in Russian).
20. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R. (2007). Slabo ploskie prostranstva i graniczy' v teorii otobrazhenij. *Ukr. mat. visnik*, 4(2), 199–234 (in Russian).
21. Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2011). Integral conditions in the mapping theory. *J. Math. Sci.*, 173(4), 397–407.
22. Ignat'ev, A.A., Ryazanov, V.I. (2005). Konechnoe srednee kolebanie v teorii otobrazhenij. *Ukr. mat. visnik*, 2(3), 395–417 (in Russian).

S.V. Volkov, V.I. Ryazanov

On mappings with finite length distortion on Riemann surfaces.

The present paper is a natural continuation of our previous paper (2017) on the boundary behavior of mappings in the Sobolev classes on Riemann surfaces, where the reader will be able to find the corresponding historic comments and a discussion of many definitions and relevant results. The given paper was devoted to the theory of the boundary behavior of mappings with finite distortion by Iwaniec on Riemannian surfaces first introduced for the plane in the paper of Iwaniec T. and Sverak V. (1993) On mappings with integrable dilatation and then extended to the spatial case in the monograph of Iwaniec T. and Martin G. (2001) devoted to Geometric function theory and non-linear analysis. At the present paper, it is developed the theory of the boundary behavior of the so-called mappings with finite length distortion first introduced in the paper of Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. (2004) in the spatial case, see also Chapter 8 in their monograph (2009) on Moduli in modern mapping theory. As it was shown in the paper of Kovtonyuk D., Petkov I. and Ryazanov V. (2017) On the boundary behavior of mappings with finite distortion in the plane, such mappings, generally speaking, are not mappings with finite distortion by Iwaniec because their first partial derivatives can be not locally integrable. At the same time, this class is a generalization of the known class of mappings with bounded distortion by Martio–Vaisala from their paper (1988). Moreover, this class contains as a subclass the so-called finitely bi-Lipschitz mappings introduced for the spatial case in the paper of Kovtonyuk D. and Ryazanov V. (2011) On the boundary behavior of generalized quasi-isometries, that in turn are a natural generalization of the well-known classes of bi-Lipschitz mappings as well

as isometries and quasi-isometries. In the research of the local and boundary behavior of mappings with finite length distortion in the spatial case, the key fact was that they satisfy some modulus inequalities which was a motivation for the consideration more wide classes of mappings, in particular, the Q -homeomorphisms (2005) and the mappings with finite area distortion (2008). Hence it is natural that under the research of mappings with finite length distortion on Riemann surfaces we start from establishing the corresponding modulus inequalities that are the main tool for us. On this basis, we prove here a series of criteria in terms of dilatations for the continuous and homeomorphic extension to the boundary of the mappings with finite length distortion between domains on arbitrary Riemann surfaces.

Keywords: *Riemann surfaces, boundary behavior, continuous and homeomorphic extension, mappings of finite length distortion, strongly accessible and weakly flat boundaries.*

ДВНЗ Донецький національний технічний університет,
Покровськ,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
Черкаський національний університет імені
Богдана Хмельницького
serhi.volkov@donntu.edu.ua,
vl.ryazanov1@gmail.com, Ryazanov@nas.gov.ua

Отримано 11.10.19

UDC 517.5

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-5

©2019. V. Gutlyanskii, O. Nesmelova, V. Ryazanov, A. Yefimushkin

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE GENERALIZED ANALYTIC AND HARMONIC FUNCTIONS

The study of the Dirichlet problem with arbitrary measurable data for harmonic functions is due to the famous dissertation of Luzin. Later on, the known monograph of Vekua has been devoted to boundary value problems (only with Hölder continuous data) for the generalized analytic functions, i.e., continuous complex valued functions $h(z)$ of the complex variable $z = x + iy$ with generalized first partial derivatives by Sobolev satisfying equations of the form $\partial_{\bar{z}}h + ah + bh = c$, where $\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)$, and it was assumed that the complex valued functions a, b and c belong to the class L^p with some $p > 2$ in the corresponding domains $D \subset \mathbb{C}$. The present paper is a natural continuation of our articles on the Riemann, Hilbert, Dirichlet, Poincaré and, in particular, Neumann boundary value problems for quasiconformal, analytic, harmonic and the so-called A -harmonic functions with boundary data that are measurable with respect to logarithmic capacity. Here we extend the corresponding results to the generalized analytic functions $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ with the sources $g : \partial_{\bar{z}}h = g \in L^p$, $p > 2$, and to generalized harmonic functions U with sources $G : \Delta U = G \in L^p$, $p > 2$. It was also given relevant definitions and necessary references to the mentioned articles and comments on previous results. This paper contains various theorems on the existence of nonclassical solutions of the Riemann and Hilbert boundary value problems with arbitrary measurable (with respect to logarithmic capacity) data for generalized analytic functions with sources. Our approach is based on the geometric (theoretic-functional) interpretation of boundary values in comparison with the classical operator approach in PDE. On this basis, it is established the corresponding existence theorems for the Poincaré problem on directional derivatives and, in particular, for the Neumann problem to the Poisson equations $\Delta U = G$ with arbitrary boundary data that are measurable with respect to logarithmic capacity. These results can be also applied to semi-linear equations of mathematical physics in anisotropic and inhomogeneous media.

MSC: Primary 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 30C62; Secondary 30E25, 31C05, 35J61, 34M50, 35F45, 35Q15.

Keywords: *Poisson equations; Riemann, Hilbert, Dirichlet, Neumann and Poincaré problems; generalized analytic and harmonic functions; logarithmic capacity.*

Dedicated to the 100th anniversary of the birth of Georgii Dmitrievich Suvorov

1. Introduction.

The well-known monograph of Vekua [46] has been devoted to the theory of the **generalized analytic functions**, i.e., continuous complex valued functions $h(z)$ of the complex variable $z = x + iy$ with generalized first partial derivatives by Sobolev satisfying equations of the form

$$\partial_{\bar{z}}h + ah + bh = c, \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (1)$$

This work was partially supported by grants of Ministry of Education and Science of Ukraine, project number is 0119U100421.

where it was assumed that the complex valued functions a, b and c belong to the class L^p with some $p > 2$ in the corresponding domains $D \subseteq \mathbb{C}$.

The present paper is a natural continuation of the articles [6]–[8], [15]–[20], [47] and [48] devoted to the Riemann, Hilbert, Dirichlet, Poincare and, in particular, Neumann boundary value problems for quasiconformal, analytic, harmonic and the so-called A –harmonic functions with boundary data that are measurable with respect to logarithmic capacity. Here we extend the corresponding results to **generalized** analytic and harmonic functions, see relevant definitions with history notes in the mentioned articles and necessary comments on previous results below.

The first part of the paper is devoted to the proof of existence of nonclassical solutions of Riemann, Hilbert and Dirichlet boundary value problems with arbitrary measurable boundary data with respect to logarithmic capacity for the equations

$$\partial_{\bar{z}}h(z) = g(z) \quad (2)$$

with the real valued function g in the class L^p , $p > 2$. We will call continuous solutions h of the equation (2) with the generalized first partial derivatives by Sobolev **generalized analytic functions with sources g**.

The second part of the paper contains the proof of existence of nonclassical solutions to the Poincare problem on the directional derivatives and, in particular, to the Neumann problem with arbitrary measurable boundary data with respect to logarithmic capacity for the Poisson equations

$$\Delta U(z) = G(z) \quad (3)$$

with real valued functions G of a class $L^p(D)$, $p > 2$, in the corresponding domains $D \subset \mathbb{C}$. For short, we will call continuous solutions to (3) of the class $W_{\text{loc}}^{2,p}(D)$ **generalized harmonic functions with the source G**. Note that by the Sobolev embedding theorem, see Theorem I.10.2 in [44], such functions belong to the class C^1 .

The research of boundary value problems with arbitrary measurable data is due to the famous dissertation of Luzin, see its original text [30], and its reprint [31] with comments of his pupils Bari and Men'shov. Namely, he has established that, for each measurable a.e. finite 2π –periodic function $\varphi(\vartheta) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, there is a harmonic function U in the unit disk $\mathbb{D}$ such that $U(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ for a.e. ϑ as $z \rightarrow \zeta := e^{i\vartheta}$ along all nontangential paths to $\partial\mathbb{D}$. The latter was based on his other deep result on the antiderivatives stated that, for any measurable function $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, there is a continuous function $\Psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ with $\Psi' = \psi$ a.e., see e.g. his papers [29] and [32].

Later on, the Luzin theorem on harmonic functions was strengthened in the paper [39], Corollary 5.1, see also [40], by the statement that, for each (Lebesgue) measurable function $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, the space of all harmonic functions $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ with the angular limits $\varphi(\zeta)$ for a.e. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ has the infinite dimension. Recall, it is well-known the uniqueness theorem to the Dirichlet problem in terms of the angular limits e.g. for bounded harmonic functions u , see Corollary IX.1.1 and Theorem IX.2.3 in [37]. However, in general there is no uniqueness theorem in the Dirichlet problem for the Laplace equation even under a.e. zero boundary data, see e.g. Theorem 2.1 in [40].

The Luzin theorem was key to establish the corresponding result on the Hilbert boundary value problem in [39], Theorems 2.1 and 5.2: for arbitrary measurable functions $\lambda : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$, and $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, the space of all analytic functions $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ with angular limits

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) \} = \varphi(\zeta) \quad \text{for a.e. } \zeta \in \partial\mathbb{D} \quad (4)$$

has the infinite dimension. Then this theorem was extended to arbitrary Jordan domains with rectifiable boundaries in terms of the natural parameter, see Theorem 3.1 in [39].

In turn, these results have been applied in the paper [41] to the study of the Poincare problem on directional derivatives and, in particular, of the Neumann problem for harmonic functions with arbitrary boundary data that are measurable with respect to natural parameter in arbitrary Jordan domains with rectifiable boundaries. Similarly, the results on the Hilbert and Riemann problems for analytic functions along the so-called **Bagemihl–Seidel systems** of Jordan arcs terminating at the boundary in [42] can be applied to the Poincare and Neumann problems for harmonic functions.

Moreover, a series of the corresponding results have been formulated and proved in terms of logarithmic capacity, see its definition and properties e.g. in [16]. The base is the following analog of the Luzin theorem in [7], see also [48], where the abbreviation **q.e. means quasi-everywhere** with respect to logarithmic capacity.

Theorem A. *Let $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a measurable function with respect to logarithmic capacity. Then there is a continuous function $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ with $\Phi'(x) = \varphi(x)$ q.e.*

Furthermore, the function Φ can be chosen in such a way that $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ and $|\Phi(x)| \leq \varepsilon$ for any prescribed $\varepsilon > 0$ and all $x \in [a, b]$.

On the basis of Theorem A, it was proved the analog of the second Luzin theorem:

Theorem B. *Let $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be 2π -periodic, measurable with respect to logarithmic capacity and finite q.e. Then a space of harmonic functions u in $\mathbb{D}$ with the angular limits $u(z) \rightarrow \varphi(\vartheta)$ as $z \rightarrow e^{i\vartheta}$ q.e. on $\mathbb{R}$ has the infinite dimension.*

In turn, on the basis of Theorem B, it was obtain the result on the Hilbert problem:

Theorem C. *Let $\lambda : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$, be of bounded variation and $\varphi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ be measurable with respect to logarithmic capacity. Then there is a space of analytic functions $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ of the infinite dimension with the angular limits*

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) \} = \varphi(\zeta) \quad \text{q.e. on } \partial\mathbb{D}. \quad (5)$$

Then this result was extended to domains with the so-called quasiconformal boundaries and, in particular, to arbitrary smooth (C^1) domains, see [7] and [48], and it was also applied to the Poincare and Neumann problems for harmonic and A -harmonic functions, see [47]. Moreover, it was proved in [19] the following result:

Theorem D. *Let D be a Jordan domain with the quasihyperbolic boundary condition, ∂D have a tangent q.e., $\lambda : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$, be of countable bounded variation*

and let $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ be measurable with respect to logarithmic capacity. Then there is a space of analytic functions $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ of the infinite dimension with the angular limits

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(\zeta)} f(z) \} = \varphi(\zeta) \quad \text{q.e. on } \partial D. \quad (6)$$

See the next section for definitions. As usual, this theorem on the Hilbert problem for analytic functions implies the corresponding theorems on the Poincare and Neumann problems for harmonic functions. Finally, notice a wide circle of the corresponding results on boundary value problems in terms of the Bagemihl–Seidel systems in [17].

2. Hilbert problem and angular limits.

In this section, we prove the existence of nonclassical solutions of the Hilbert boundary value problem for generalized analytic functions with arbitrary boundary data that are measurable with respect to logarithmic capacity. The result is formulated in terms of the angular limit that is a traditional tool of the geometric function theory, see e.g. monographs [5, 26, 31, 36] and [37].

Recall that the classic boundary value **problem of Hilbert**, see [24], was formulated as follows: To find an analytic function $f(z)$ in a domain D bounded by a rectifiable Jordan contour C that satisfies the boundary condition

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(\zeta)} f(z) \} = \varphi(\zeta) \quad \forall \zeta \in C, \quad (7)$$

where the **coefficient** λ and the **boundary data** φ of the problem are continuously differentiable with respect to the natural parameter s and $\lambda \neq 0$ everywhere on C . The latter allows to consider that $|\lambda| \equiv 1$ on C . Note that the quantity $\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda} f \}$ in (7) means a projection of f into the direction λ interpreted as vectors in $\mathbb{R}^2$.

The reader can find a rather comprehensive treatment of the theory in the new excellent books [2, 3, 23, 45]. We also recommend to make familiar with the historic surveys contained in the monographs [10, 33, 46] on the topic with an exhaustive bibliography and take a look at our recent papers, see Introduction.

Next, recall that a straight line L is **tangent** to a curve Γ in $\mathbb{C}$ at a point $z_0 \in \Gamma$ if

$$\limsup_{z \rightarrow z_0, z \in \Gamma} \frac{\operatorname{dist}(z, L)}{|z - z_0|} = 0. \quad (8)$$

Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$ with a tangent at a point $\zeta \in \partial D$. A path in D terminating at ζ is called **nontangential** if its part in a neighborhood of ζ lies inside of an angle with the vertex at ζ . The limit along all nontangential paths at ζ is called **angular** at the point.

Following [19], we say that a Jordan curve Γ in $\mathbb{C}$ is **almost smooth** if Γ has a tangent q.e. In particular, Γ is almost smooth if Γ has a tangent at all its points except a countable collection. The nature of such a Jordan curve Γ can be complicated enough because this countable collection can be everywhere dense in Γ .

Recall that the **quasihyperbolic distance** between points z and z_0 in a domain $D \subset \mathbb{C}$ is the quantity

$$k_D(z, z_0) := \inf_{\gamma} \int_{\gamma} ds/d(\zeta, \partial D) ,$$

where $d(\zeta, \partial D)$ denotes the Euclidean distance from the point $\zeta \in D$ to ∂D and the infimum is taken over all rectifiable curves γ joining the points z and z_0 in D , see [12].

Further, it said that a domain D satisfies the **quasihyperbolic boundary condition** if there exist constants a and b and a point $z_0 \in D$ such that

$$k_D(z, z_0) \leq a + b \ln \frac{d(z_0, \partial D)}{d(z, \partial D)} \quad \forall z \in D . \quad (9)$$

The latter notion was introduced in [11] but, before it, was first implicitly applied in [4]. By the discussion in [20], every smooth (or Lipschitz) domain satisfies the quasihyperbolic boundary condition.

Note that it is well-known the so-called (A)–condition by Ladyzhenskaya–Ural'tseva, which is standard in the theory of boundary value problems for PDE, see e.g. [28]. Recall that a domain D in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, is called satisfying **(A)-condition** if

$$\text{mes } D \cap B(\zeta, \rho) \leq \Theta_0 \text{mes } B(\zeta, \rho) \quad \forall \zeta \in \partial D, \rho \leq \rho_0 \quad (10)$$

for some Θ_0 and $\rho_0 \in (0, 1)$, where $B(\zeta, \rho)$ denotes the ball with the center $\zeta \in \mathbb{R}^n$ and the radius ρ , see 1.1.3 in [28].

Recall also that a domain D in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, is said to be satisfying the **outer cone condition** if there is a cone that makes possible to be touched by its top to every boundary point of D from the completion of D after its suitable rotations and shifts. It is clear that the outer cone condition implies (A)–condition.

Probably one of the simplest examples of an almost smooth domain D with the quasihyperbolic boundary condition and without (A)–condition is the union of 3 open disks with the radius 1 centered at the points 0 and $1 \pm i$. It is clear that this domain has zero interior angle at its boundary point 1.

Given a Jordan domain D in $\mathbb{C}$, we call $\lambda : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ a **function of bounded variation**, write $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial D)$, if

$$V_{\lambda}(\partial D) := \sup \sum_{j=1}^k |\lambda(\zeta_{j+1}) - \lambda(\zeta_j)| < \infty \quad (11)$$

where the supremum is taken over all finite collections of points $\zeta_j \in \partial D$, $j = 1, \dots, k$, with the cyclic order meaning that ζ_j lies between ζ_{j+1} and ζ_{j-1} for every $j = 1, \dots, k$. Here we assume that $\zeta_{k+1} = \zeta_1 = \zeta_0$. The quantity $V_{\lambda}(\partial D)$ is called the **variation of the function λ** .

Now, we call $\lambda : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ a function of **countable bounded variation**, write $\lambda \in \mathcal{CBV}(\partial D)$, if there is a countable collection of mutually disjoint arcs γ_n of ∂D ,

$n = 1, 2, \dots$ on each of which the restriction of λ is of bounded variation and the set $\partial D \setminus \cup \gamma_n$ has logarithmic capacity zero. In particular, the latter holds true if the set $\partial D \setminus \cup \gamma_n$ is countable. It is clear that such functions can be singular enough.

Theorem 1. *Let D be a Jordan domain with the quasihyperbolic boundary condition, ∂D have a tangent q.e., $\lambda : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$, be in $\mathcal{CBV}(\partial D)$ and let $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ be measurable with respect to logarithmic capacity.*

Suppose that $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ is in $L^p(D)$, $p > 2$. Then there exist generalized analytic functions $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ with the source g that have the angular limits

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \left\{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot h(z) \right\} = \varphi(\zeta) \quad \text{q.e. on } \partial D. \quad (12)$$

Furthermore, the space of such functions h has the infinite dimension.

Later on, we often apply the **logarithmic (Newtonian) potential $\mathcal{N}_G$ of sources $G \in L^p(\mathbb{C})$, $p > 2$, with compact supports given by the formula:**

$$\mathcal{N}_G(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \ln |z - w| G(w) \, dm(w). \quad (13)$$

By Lemma 3 in [16], $\mathcal{N}_G \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbb{C}) \cap C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{C})$, $\alpha := (p - 2)/p$, and $\Delta \mathcal{N}_G = G$ a.e.

Proof. Extending the function g by zero outside of D and setting $P = \mathcal{N}_G$ with $G = 2g$, $U = P_x$ and $V = -P_y$, we have that $U_x - V_y = G$ and $U_y + V_x = 0$. Thus, elementary calculations show that $H := U + iV$ is just a generalized analytic function with the source g . Moreover, the function

$$\varphi_*(\zeta) := \lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \left\{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot H(z) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot H(\zeta) \right\}, \quad \forall \zeta \in \partial D, \quad (14)$$

is measurable with respect to logarithmic capacity because the function H is continuous in the whole plane $\mathbb{C}$.

By Theorem 2 in [19], see also Theorems 5.1 and 6.1 in [21], there exist analytic functions $\mathcal{A}$ in D with the angular limits

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \left\{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot \mathcal{A}(z) \right\} = \Phi(\zeta) \quad \text{q.e. on } \partial D \quad (15)$$

for the function $\Phi(\zeta) := \varphi(\zeta) - \varphi_*(\zeta)$, $\zeta \in \partial D$. The space of such analytic functions $\mathcal{A}$ has the infinite dimension, see e.g. Corollary 8.1 in [21].

Finally, it is clear that the functions $h := \mathcal{A} + H$ are desired generalized analytic functions with the source g satisfying the Hilbert condition (12). Thus, the space of such functions h has really the infinite dimension. $\square$

Remark 1. As it follows from the proof of Theorems 1, the generalized analytic functions h with a source $g \in L^p$, $p > 2$, satisfying the Hilbert boundary condition (12) q.e. in the sense of the angular limits can be represented in the form of the sums $\mathcal{A} + H$ with analytic functions $\mathcal{A}$ satisfying the corresponding Hilbert boundary condition (15)

and a generalized analytic function $H = U + iV$ with the same source g , $U = P_x$ and $V = -P_y$, where P is the logarithmic (Newtonian) potential $\mathcal{N}_G$ with $G = 2g$ in the class $W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbb{C}) \cap C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{C})$, $\alpha = (p-2)/p$, that satisfies the equation $\Delta P = G$.

In particular, for the case $\lambda \equiv 1$, we obtain the following consequence of Theorem 1 on the Dirichlet problem for the generalized analytic functions.

Corollary 1. *Let D be a Jordan domain with the quasihyperbolic boundary condition, ∂D have a tangent q.e., $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ be measurable with respect to logarithmic capacity and let $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ be in $L^p(D)$ for some $p > 2$.*

Then there exist generalized analytic functions $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ with the source g that have the angular limits

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} h(z) = \varphi(\zeta) \quad \text{q.e. on } \partial D. \quad (16)$$

Furthermore, the space of such functions h has the infinite dimension.

3. Hilbert problem and Bagemihl–Seidel systems.

Let D be a domain in $\mathbb{C}$ whose boundary consists of a finite collection of mutually disjoint Jordan curves. A family of mutually disjoint Jordan arcs $J_\zeta : [0, 1] \rightarrow \overline{D}$, $\zeta \in \partial D$, with $J_\zeta([0, 1)) \subset D$ and $J_\zeta(1) = \zeta$ that is continuous in the parameter ζ is called a **Bagemihl–Seidel system** or, in short, of **class $\mathcal{BS}$** .

Theorem 2. *Let D be a bounded domain in $\mathbb{C}$ whose boundary consists of a finite number of mutually disjoint Jordan curves, and let functions $\lambda : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$, $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ and $\psi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ be measurable with respect to the logarithmic capacity.*

Suppose that $\{\gamma_\zeta\}_{\zeta \in \partial D}$ is a family of Jordan arcs of class $\mathcal{BS}$ in D and that a function $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ is of the class $L^p(D)$ for some $p > 2$. Then there is a generalized analytic function $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ with the source g such that

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot h(z) \} = \varphi(\zeta), \quad (17)$$

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Im} \{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot h(z) \} = \psi(\zeta) \quad (18)$$

along γ_ζ q.e. on ∂D .

Proof. As in the proof of Theorem 1, the function $H = U + iV$ with $U = P_x$ and $V = -P_y$, where $P = \mathcal{N}_G$ with $G = 2g$ is a generalized analytic function with the source g . Moreover, the functions

$$\varphi_*(\zeta) := \lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \left\{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot H(z) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot H(\zeta) \right\}, \quad \forall \zeta \in \partial D, \quad (19)$$

$$\psi_*(\zeta) := \lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Im} \left\{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot H(z) \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot H(\zeta) \right\}, \quad \forall \zeta \in \partial D, \quad (20)$$

are measurable with respect to logarithmic capacity because the function H is continuous in the whole plane $\mathbb{C}$.

Next, by Theorem 3 in [17] there is an analytic function $\mathcal{A}$ in D that has along γ_ζ q.e. on ∂D the limits

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot \mathcal{A}(z) \} = \Phi(\zeta), \quad (21)$$

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Im} \{ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot \mathcal{A}(z) \} = \Psi(\zeta) \quad (22)$$

for the functions $\Phi(\zeta) := \varphi(\zeta) - \varphi_*(\zeta)$ and $\Psi(\zeta) := \psi(\zeta) - \psi_*(\zeta)$, $\zeta \in \partial D$. Thus, the function $h := \mathcal{A} + H$ is a desired generalized analytic function with the source g . $\square$

Remark 2. As it follows from the proof of Theorems 2, the generalized analytic functions h with a source $g \in L^p$, $p > 2$, satisfying the Hilbert boundary condition (17) q.e. in the sense of the limits along γ_ζ can be represented in the form of the sums $\mathcal{A} + H$ with analytic functions $\mathcal{A}$ satisfying the corresponding Hilbert boundary condition (21) and a generalized analytic function $H = U + iV$ with the same source g , $U = P_x$ and $V = -P_y$, where P is the logarithmic (Newtonian) potential $\mathcal{N}_G$ with $G = 2g$ in the class $W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbb{C}) \cap C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{C})$, $\alpha = (p-2)/p$, that satisfies the equation $\Delta P = G$.

The space of all solutions h of the Hilbert problem (17) in the given sense has the infinite dimension for any such prescribed φ , λ and $\{\gamma_\zeta\}_{\zeta \in D}$ because the space of all functions $\psi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ which are measurable with respect to the logarithmic capacity has the infinite dimension.

The latter is valid even for its subspace of continuous functions $\psi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$. Indeed, by the Riemann theorem every Jordan domain G can be mapped with a conformal mapping g onto the unit disk $\mathbb{D}$ and by the Caratheodory theorem g can be extended to a homeomorphism of $\overline{G}$ onto $\overline{\mathbb{D}}$. By the Fourier theory, the space of all continuous functions $\tilde{\psi} : \partial \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, equivalently, the space of all continuous 2π -periodic functions $\psi_* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, has the infinite dimension.

Corollary 2. *Let D be a bounded domain in $\mathbb{C}$ whose boundary consists of a finite number of mutually disjoint Jordan curves, and $\lambda : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$, and $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ be measurable functions with respect to the logarithmic capacity.*

Suppose also that $\{\gamma_\zeta\}_{\zeta \in \partial D}$ is a family of Jordan arcs of class $\mathcal{BS}$ in D and that a function $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ is of the class $L^p(D)$, $p > 2$.

Then there exist generalized analytic functions $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ with the source g that have the limits (17) along γ_ζ q.e. on ∂D . Furthermore, the space of such functions h has the infinite dimension.

In particular, for the case $\lambda \equiv 1$, we obtain the corresponding consequence on the Dirichlet problem for the generalized analytic functions with the source g along any prescribed Bagemihl–Seidel system:

Corollary 3. *Let D be a bounded domain in $\mathbb{C}$ whose boundary consists of a finite number of mutually disjoint Jordan curves and $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ be a measurable function with respect to the logarithmic capacity.*

Suppose also that $\{\gamma_\zeta\}_{\zeta \in \partial D}$ is a family of Jordan arcs of class $\mathcal{BS}$ in D and that a function $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ is of the class $L^p(D)$, $p > 2$.

Then there exist generalized analytic functions $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ with the source g such that

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} h(z) = \varphi(\zeta) \quad \text{along } \gamma_\zeta \text{ q.e. on } \partial D. \quad (23)$$

Furthermore, the space of such functions h has the infinite dimension.

4. Riemann problem and Bagemihl–Seidel systems.

Recall that the classical setting of the **Riemann problem** in a smooth Jordan domain D of the complex plane $\mathbb{C}$ is to find analytic functions $f^+ : D \rightarrow \mathbb{C}$ and $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ that admit continuous extensions to ∂D and satisfy the boundary condition

$$f^+(\zeta) = A(\zeta) \cdot f^-(\zeta) + B(\zeta) \quad \forall \zeta \in \partial D \quad (24)$$

with prescribed Hölder continuous functions $A : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ and $B : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$.

Recall also that the **Riemann problem with shift** in D is to find analytic functions $f^+ : D \rightarrow \mathbb{C}$ and $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfying the condition

$$f^+(\alpha(\zeta)) = A(\zeta) \cdot f^-(\zeta) + B(\zeta) \quad \forall \zeta \in \partial D \quad (25)$$

where $\alpha : \partial D \rightarrow \partial D$ was a one-to-one sense preserving correspondence having the non-vanishing Hölder continuous derivative with respect to the natural parameter on ∂D . The function α is called a **shift function**. The special case $A \equiv 1$ gives the so-called **jump problem** and $B \equiv 0$ gives the **problem on gluing** of analytic functions.

Arguing similarly to the proof of Theorem 1, we obtain by Theorem 8 in [17] on the Riemann problem for analytic functions the following statement.

Theorem 3. *Let D be a domain in $\mathbb{C}$ whose boundary consists of a finite number of mutually disjoint Jordan curves, $A : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ and $B : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ be functions that are measurable with respect to the logarithmic capacity and let $\{\gamma_\zeta^+\}_{\zeta \in \partial D}$ and $\{\gamma_\zeta^-\}_{\zeta \in \partial D}$ be families of Jordan arcs of class $\mathcal{BS}$ in D and $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, correspondingly.*

Suppose that $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ is a function with compact support in the class $L^p(\mathbb{C})$ with some $p > 2$. Then there exist generalized analytic functions $f^+ : D \rightarrow \mathbb{C}$ and $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ with the source g that satisfy (24) q.e. on $\zeta \in \partial D$, where $f^+(\zeta)$ and $f^-(\zeta)$ are limits of $f^+(z)$ and $f^-(z)$ as $z \rightarrow \zeta$ along γ_ζ^+ and γ_ζ^- , correspondingly.

Furthermore, the space of all such couples (f^+, f^-) has the infinite dimension for every couple (A, B) and any collections γ_ζ^+ and γ_ζ^- , $\zeta \in \partial D$.

Theorem 3 is a special case of the following lemma based on Lemma 3 in [17] on the Riemann problem with shift that may have of independent interest.

Lemma 1. *Under the hypotheses of Theorem 3, let in addition $\alpha : \partial D \rightarrow \partial D$ be a homeomorphism keeping components of ∂D such that α and α^{-1} have the (N) -property of Luzin with respect to the logarithmic capacity.*

Then there exist generalized analytic functions $f^+ : D \rightarrow \mathbb{C}$ and $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ with the source g that satisfy (25) for a.e. $\zeta \in \partial D$ with respect to the logarithmic capacity, where $f^+(\zeta)$ and $f^-(\zeta)$ are limits of $f^+(z)$ and $f^-(z)$ as $z \rightarrow \zeta$ along γ_ζ^+ and γ_ζ^- , correspondingly.

Furthermore, the space of all such couples (f^+, f^-) has the infinite dimension for every couple (A, B) and any collections γ_ζ^+ and γ_ζ^- , $\zeta \in \partial D$.

Remark 3. Some investigations were devoted also to the nonlinear Riemann problems with boundary conditions of the form

$$\Phi(\zeta, f^+(\zeta), f^-(\zeta)) = 0 \quad \forall \zeta \in \partial D. \quad (26)$$

It is natural as above to weaken such conditions to the following

$$\Phi(\zeta, f^+(\zeta), f^-(\zeta)) = 0 \quad \text{q.e. on } \zeta \in \partial D. \quad (27)$$

It is easy to see that the proposed approach makes possible also to reduce such problems to the algebraic measurable solvability of the relations

$$\Phi(\zeta, v, w) = 0 \quad (28)$$

with respect to complex-valued functions $v(\zeta)$ and $w(\zeta)$, cf. e.g. [13].

Later on, we sometimes say in short " C -measurable" instead of the expression "measurable with respect to the logarithmic capacity".

Example 1. For instance, correspondingly to the scheme given above, special nonlinear problems of the form

$$f^+(\zeta) = \varphi(\zeta, f^-(\zeta)) \quad \text{q.e. on } \zeta \in \partial D \quad (29)$$

are always solved if the function $\varphi : \partial D \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfies the **Caratheodory conditions** with respect to the logarithmic capacity, that is if $\varphi(\zeta, w)$ is continuous in the variable $w \in \mathbb{C}$ for a.e. $\zeta \in \partial D$ with respect to the logarithmic capacity and it is C -measurable in the variable $\zeta \in \partial D$ for all $w \in \mathbb{C}$.

Furthermore, the spaces of solutions of such problems always have the infinite dimension. Indeed, by the Egorov theorem, see e.g. Theorem 2.3.7 in [9], see also Section 17.1 in [27], the function $\varphi(\zeta, \psi(\zeta))$ is C -measurable in $\zeta \in \partial D$ for every C -measurable function $\psi : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ if the function φ satisfies the Caratheodory conditions, and the space of all C -measurable functions $\psi : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ has the infinite dimension, see e.g. arguments in Remark 2 above.

5. On mixed boundary value problems.

Remark 3 makes possible to formulate a series of nonlinear boundary value problems in terms of Bagemihl–Seidel systems for generalized analytic functions including mixed boundary value problems. In order to demonstrate the potentiality of our approach, we give here a couple of results. Namely, arguing similarly to the proof of Theorem 1, see also Theorem 1.10 in [46], we obtain for instance by Theorem 10 and Lemma 5 in [17] the following statement on mixed boundary value problems.

Theorem 4. *Let D be a domain in $\mathbb{C}$ whose boundary consists of a finite number of mutually disjoint Jordan curves, $\varphi : \partial D \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfy the Caratheodory conditions and $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\nu(\zeta)| \equiv 1$, be measurable with respect to the logarithmic capacity.*

Suppose also that $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ is in $C^\alpha(\mathbb{C})$, $\alpha \in (0, 1)$, with compact support, $\{\gamma_\zeta^+\}_{\zeta \in \partial D}$ and $\{\gamma_\zeta^-\}_{\zeta \in \partial D}$ are families of Jordan arcs of class $\mathcal{BS}$ in D and $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, correspondingly.

Then there exist generalized analytic functions $f^+ : D \rightarrow \mathbb{C}$ and $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ with the source g such that

$$f^+(\zeta) = \varphi \left(\zeta, \left[\frac{\partial f}{\partial \nu} \right]^- (\zeta) \right) \quad \text{q.e. on } \partial D, \quad (30)$$

where $f^+(\zeta)$ and $\left[\frac{\partial f}{\partial \nu} \right]^- (\zeta)$ are limits of the functions $f^+(z)$ and $\frac{\partial f^-}{\partial \nu} (z)$ as $z \rightarrow \zeta$ along γ_ζ^+ and γ_ζ^- , correspondingly.

Furthermore, the space of all such couples (f^+, f^-) has the infinite dimension for any such prescribed functions g , φ , ν and collections γ_ζ^+ and γ_ζ^- , $\zeta \in \partial D$.

Theorem 4 is a special case of the following lemma on the mixed problem with shift.

Lemma 2. Under the hypotheses of Theorem 4, let in addition $\beta : \partial D \rightarrow \partial D$ be a homeomorphism keeping components of ∂D such that β and β^{-1} have the (N) -property of Luzin with respect to the logarithmic capacity.

Then there exist generalized analytic functions $f^+ : D \rightarrow \mathbb{C}$ and $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ with the source g such that

$$f^+(\beta(\zeta)) = \varphi \left(\zeta, \left[\frac{\partial f}{\partial \nu} \right]^- (\zeta) \right) \quad \text{q.e. on } \partial D, \quad (31)$$

where $f^+(\zeta)$ and $\left[\frac{\partial f}{\partial \nu} \right]^- (\zeta)$ are limits of the functions $f^+(z)$ and $\frac{\partial f^-}{\partial \nu} (z)$ as $z \rightarrow \zeta$ along γ_ζ^+ and γ_ζ^- , correspondingly.

Furthermore, the space of all such couples (f^+, f^-) has the infinite dimension for any such prescribed g , φ , ν , β and collections $\{\gamma_\zeta^+\}_{\zeta \in \partial D}$ and $\{\gamma_\zeta^-\}_{\zeta \in \partial D}$.

6. Poincare and Neumann problems in terms of angular limits.

In this section, we consider the Poincare boundary value problem on the directional derivatives and, in particular, the Neumann problem for the Poisson equations

$$\Delta U(z) = G(z) \quad (32)$$

with real valued functions G of classes $L^p(D)$ with $p > 2$ in the corresponding domains $D \subset \mathbb{C}$. Recall that a continuous solution U of (32) in the class $W_{\text{loc}}^{2,p}$ is called a **generalized harmonic function with the source G** and that by the Sobolev embedding theorem such a solution belongs to the class C^1 .

Theorem 5. Let D be a Jordan domain with the quasihyperbolic boundary condition, ∂D have a tangent q.e., $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\nu(\zeta)| \equiv 1$, be in $\mathcal{CBV}(\partial D)$ and $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ be measurable with respect to logarithmic capacity.

Suppose that $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ is in $L^p(D)$, $p > 2$. Then there exist generalized harmonic functions $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ with the source G that have the angular limits

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial U}{\partial \nu} (z) = \varphi(\zeta) \quad \text{q.e. on } \partial D. \quad (33)$$

Furthermore, the space of such functions U has the infinite dimension.

Proof. Indeed, let us extend the function G by zero outside of D and let P be the logarithmic potential $\mathcal{N}_G$ with the source G , see (13). Then by Lemma 3 in [16] $P \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbb{C}) \cap C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{C})$ with $\alpha = (p-2)/p$ and $\Delta P = G$ a.e. in $\mathbb{C}$. Set

$$\varphi_*(\zeta) = \operatorname{Re} \nu(\zeta) H(\zeta), \quad \zeta \in \partial D, \quad (34)$$

where

$$H(z) := \overline{\nabla P(z)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \nabla P := P_x + iP_y, \quad z = x + iy. \quad (35)$$

Then by Theorem 1 with $g = G/2$ in D and $\lambda = \bar{\nu}$ on ∂D , there exist generalized analytic functions h with the source g that have the angular limits

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \nu(\zeta) h(z) = \varphi(\zeta) \quad \text{q.e. on } \partial D \quad (36)$$

and, moreover, by Remark 4 the given functions h can be represented in the form of the sums $\mathcal{A} + H$ with analytic functions $\mathcal{A}$ in D that have the angular limits

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \nu(\zeta) \mathcal{A}(z) = \Phi(\zeta) \quad \text{q.e. on } \partial D \quad (37)$$

with $\Phi(\zeta) := \varphi(\zeta) - \varphi_*(\zeta)$, $\zeta \in \partial D$, and the space of such analytic functions $\mathcal{A}$ has the infinite dimension.

Note that any indefinite integral $\mathcal{F}$ of such $\mathcal{A}$ in the simply connected domain D is also a single-valued analytic function and the harmonic functions $u := \operatorname{Re} \mathcal{F}$ and $v := \operatorname{Im} \mathcal{F}$ satisfy the Cauchy-Riemann system $u_x = v_y$ and $u_y = -v_x$. Hence

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}' = \mathcal{F}_x = u_x + i \cdot v_x = u_x - i \cdot u_y = \overline{\nabla u}. \quad (38)$$

Consequently, setting $U_* = u + P$, we see that U_* is a generalized harmonic function with the source G and, moreover, by the construction $h = \overline{\nabla U_*}$.

Note also that the directional derivative of U_* along the unit vector ν is the projection of its gradient ∇U_* into ν , i.e., the scalar product of ν and ∇U_* interpreted as vectors in $\mathbb{R}^2$ and, consequently,

$$\frac{\partial U_*}{\partial \nu} = (\nu, \nabla U_*) = \operatorname{Re} \nu \cdot \overline{\nabla U_*} = \operatorname{Re} \nu \cdot h. \quad (39)$$

Thus, (36) implies (33) and the proof is complete. $\square$

Remark 4. We are able to say more in the case of $\operatorname{Re} n(\zeta) \overline{\nu(\zeta)} > 0$, where $n(\zeta)$ is the inner normal to ∂D at the point ζ . Indeed, the latter magnitude is a scalar product of $n = n(\zeta)$ and $\nu = \nu(\zeta)$ interpreted as vectors in $\mathbb{R}^2$ and it has the geometric sense of projection of the vector ν into n . In view of (33), since the limit $\varphi(\zeta)$ is finite, there is a finite limit $U(\zeta)$ of $U(z)$ as $z \rightarrow \zeta$ in D along the straight line passing through the point ζ and being parallel to the vector ν because along this line

$$U(z) = U(z_0) - \int_0^1 \frac{\partial U}{\partial \nu} (z_0 + \tau(z - z_0)) d\tau. \quad (40)$$

Thus, at each point with condition (33), there is the directional derivative

$$\frac{\partial U}{\partial \nu}(\zeta) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(\zeta + t \cdot \nu) - U(\zeta)}{t} = \varphi(\zeta). \quad (41)$$

In particular, in the case of the Neumann problem, $\operatorname{Re} n(\zeta) \overline{\nu(\zeta)} \equiv 1 > 0$, where $n = n(\zeta)$ denotes the unit interior normal to ∂D at the point ζ , and we have by Theorem 5 and Remark 4 the following significant result.

Corollary 4. *Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$ with the quasihyperbolic boundary condition, the unit inner normal $n(\zeta)$, $\zeta \in \partial D$, belong to the class $\mathcal{CBV}(\partial D)$ and $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ be measurable with respect to logarithmic capacity.*

Suppose that $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ is in $L^p(D)$, $p > 2$. Then one can find generalized harmonic functions $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ with the source G such that q.e. on ∂D there exist:

1) the finite limit along the normal $n(\zeta)$

$$U(\zeta) := \lim_{z \rightarrow \zeta} U(z),$$

2) the normal derivative

$$\frac{\partial U}{\partial n}(\zeta) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(\zeta + t \cdot n(\zeta)) - U(\zeta)}{t} = \varphi(\zeta),$$

3) the angular limit

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial U}{\partial n}(z) = \frac{\partial U}{\partial n}(\zeta).$$

Furthermore, the space of such functions U has the infinite dimension.

7. Poincare and Neumann problems and Bagemihl–Seidel systems.

Arguing similarly to the last section, we obtain by Theorem 6 in [17], as well as Theorem 2 and Remark 2 above, the following statement.

Theorem 6. *Let D be a Jordan domain in $\mathbb{C}$, $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\nu(\zeta)| \equiv 1$, and $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ be measurable functions with respect to the logarithmic capacity and let $\{\gamma_\zeta\}_{\zeta \in \partial D}$ be a family of Jordan arcs of class $\mathcal{BS}$ in D .*

Suppose that $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ is in $L^p(D)$, $p > 2$. Then there exist generalized harmonic functions $U : D \rightarrow \mathbb{C}$ with the source G that have the limits along γ_ζ

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial U}{\partial \nu}(z) = \varphi(\zeta) \quad \text{q.e. on } \partial D. \quad (42)$$

Furthermore, the space of such functions U has the infinite dimension.

Remark 5. As it follows from the proofs of Theorems 5 and 6, the generalized harmonic functions U with a source $G \in L^p$, $p > 2$, satisfying the Poincare boundary conditions can be represented in the form of the sums $\mathcal{N}_G + \mathcal{H}$ of the logarithmic (Newtonian) potential $\mathcal{N}_G$ that is a generalized harmonic function with the source G and harmonic functions $\mathcal{H}$ satisfying the corresponding Poincare boundary conditions.

8. Other consequences in terms of Bagemihl–Seidel systems.

Finally, arguing similarly to the proofs of Corollaries 9 and 10 in [17] and supporting on Lemmas 1 and 2 from Sections 4 and 5, correspondingly, we obtain the following consequences.

Corollary 5. *Let D be a domain in $\mathbb{C}$ whose boundary consists of a finite number of mutually disjoint Jordan curves, $B : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ and $C : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ be functions that are measurable with respect to the logarithmic capacity and let $\alpha : \partial D \rightarrow \partial D$ be a homeomorphism keeping components of ∂D such that α and α^{-1} have the (N) –property of Luzin with respect to the logarithmic capacity.*

Suppose that $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ is in $L^p(D)$, $p > 2$, $\{\gamma_\zeta^+\}_{\zeta \in \partial D}$ and $\{\gamma_\zeta^-\}_{\zeta \in \partial D}$ are families of Jordan arcs of class $\mathcal{BS}$ in D and $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, correspondingly. Then there exist generalized harmonic functions $u^+ : D \rightarrow \mathbb{R}$ and $u^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ with the source G such that

$$u^+(\alpha(\zeta)) = B(\zeta) \cdot u^-(\zeta) + C(\zeta) \quad \text{q.e. on } \partial D, \quad (43)$$

where $u^+(\zeta)$ and $u^-(\zeta)$ are limits of $u^+(z)$ and $u^-(z)$ as $z \rightarrow \zeta$ along γ_ζ^+ and γ_ζ^- , correspondingly.

Furthermore, the space of all such couples (u^+, u^-) has the infinite dimension for any such prescribed functions G , B , C , α and collections $\{\gamma_\zeta^+\}_{\zeta \in \partial D}$ and $\{\gamma_\zeta^-\}_{\zeta \in \partial D}$.

In particular, we are able to obtain from the following corollary solutions of the problem on gluing of the Dirichlet problem in the unit disk $\mathbb{D}$ and the Neumann problem outside of $\mathbb{D}$ in the class of generalized harmonic functions with the source G .

Corollary 6. *Let D be a domain in $\mathbb{C}$ whose boundary consists of a finite number of mutually disjoint Jordan curves, $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\nu(\zeta)| \equiv 1$, be a measurable function, $\beta : \partial D \rightarrow \partial D$ be a homeomorphism such that β and β^{-1} have the (N) –property of Luzin and $\varphi : \partial D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy the Caratheodory conditions with respect to the logarithmic capacity.*

Suppose that $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ is in $C^\alpha(\mathbb{C})$, $\alpha \in (0, 1)$, with compact support, $\{\gamma_\zeta^+\}_{\zeta \in \partial D}$ and $\{\gamma_\zeta^-\}_{\zeta \in \partial D}$ are families of Jordan arcs of class $\mathcal{BS}$ in D and $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, correspondingly. Then there exist generalized harmonic functions $u^+ : D \rightarrow \mathbb{R}$ and $u^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ with the source G such that

$$u^+(\beta(\zeta)) = \varphi \left(\zeta, \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]^- (\zeta) \right) \quad \text{q.e. on } \partial D, \quad (44)$$

where $u^+(\zeta)$ and $\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \right]^- (\zeta)$ are limits of the functions $u^+(z)$ and $\frac{\partial u^-}{\partial \nu} (z)$ as $z \rightarrow \zeta$ along γ_ζ^+ and γ_ζ^- , correspondingly.

Furthermore, the space of all such couples (u^+, u^-) has the infinite dimension for any such prescribed functions G , ν , β , φ and collections γ_ζ^+ and γ_ζ^- , $\zeta \in \partial D$.

The corresponding results on the boundary value problems for semi-linear equations of mathematical physics in anisotropic and inhomogeneous media with arbitrary measurable data can be proved on the basis of the factorization theorem in the paper [14], too.

References

1. Bagemihl, F., Seidel, W. (1955). Regular functions with prescribed measurable boundary values almost everywhere. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 41, 740-743.
2. Begehr, H. (1994). *Complex analytic methods for partial differential equations. An introductory text*. River Edge, NJ, World Scientific Publishing Co., Inc.
3. Begehr, H., Wen, G.Ch. (1996). Nonlinear elliptic boundary value problems and their applications. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 80. Harlow, Longman.
4. Becker, J., Pommerenke, Ch. (1982). Hölder continuity of conformal mappings and nonquasiconformal Jordan curves. *Comment. Math. Helv.*, 57(2), 221-225.
5. Duren, P.L. (1970). *Theory of H_p spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38. New York-London: Academic Press.
6. Efimushkin, A.S., Ryazanov, V.I. (2014). On regular solutions of the Riemann-Hilbert problem for Beltrami equations. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 5, 19-23.
7. Efimushkin, A.S., Ryazanov, V.I. (2015). On the Riemann-Hilbert problem for the Beltrami equations in quasidisks. *Ukr. Mat. Visn.*, 12(2), 190-209; transl. in *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 211(5), 646-659.
8. Efimushkin, A.S., Ryazanov, V.I. (2016). On the Riemann-Hilbert problem for analytic functions in circular domains. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 5, 13-16.
9. Federer, H. (1969). *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, Berlin.
10. Gakhov, F.D. (1990) *Boundary value problems*. Dover Publications. Inc. New York.
11. Gehring, F.W., Martio, O. (1985). Lipschitz classes and quasiconformal mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 10, 203-219.
12. Gehring, F.W., Palka, B.P. (1976). Quasiconformally homogeneous domains. *J. Analyse Math.*, 30, 172-199.
13. Gromov, M. (1986). *Partial differential relations*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Springer-Verlag. Berlin.
14. Gutlyanskii, V., Nesmelova, O., Ryazanov, V. (2017). On quasiconformal maps and semi-linear equations in the plane. *Ukr. Mat. Visn.*, 14(2), 161-191, transl. in (2018) *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 229(1), 7-29.
15. Gutlyanskii, V., Nesmelova, O., Ryazanov, V. (2018). On the regularity of solutions of quasilinear Poisson equations. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 10, 9-17.
16. Gutlyanskii, V., Nesmelova, O., Ryazanov, V. (2019). To the theory of semi-linear equations in the plane. *Ukr. Mat. Visn.*, 16(1), 105-140, transl. in (2019) *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 242, 6, 833-859.
17. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2015). On the boundary value problems for quasiconformal functions in the plane. *Ukr. Mat. Visn.*, 12(3), 363-389; transl. in (2016) *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 214(2), 200-219.
18. Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yefimushkin, A.S. (2017). On a new approach to the study of plane boundary-value problems. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 4, 12-18.
19. Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yakubov, E., Yefimushkin, A.S. (2019). On the Hilbert problem for analytic functions in quasihyperbolic domains. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 2, 23-30.
20. Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yakubov, E., Yefimushkin, A.S. (2019). On boundary-value problems in domains without (A)-condition. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 3, 17-24.
21. Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yakubov, E., Yefimushkin, A.S. (2019). *On Hilbert problem for Beltrami equation in quasihyperbolic domains*. ArXiv: 1807.09578v7 [math.CV] 9 Nov 2019, 28 pp.
22. Goluzin, G.M. (1969). *Geometric theory of functions of a complex variable*. Transl. of Math. Monographs, 26. American Mathematical Society, Providence, R.I.
23. Heinonen, J., Kilpeläinen, T., Martio, O. (1993). *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications, The Clarendon Press,

- Oxford University Press, New York.
24. Hilbert, D. (1904). *Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf eine Problem der Funktionentheorie*, Verhandl. des III Int. Math. Kongr., Heidelberg.
25. Hörmander, L. (1983). *The analysis of linear partial differential operators*. V. I. Distribution theory and Fourier analysis. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 256. Springer-Verlag, Berlin.
26. Koosis, P. (1998). *Introduction to H^p spaces*. Cambridge Tracts in Mathematics, 115. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
27. Krasnosel'skii, M.A., Zabreiko, P.P., Pustyl'nik, E.I., Sobolevskii, P.E. (1976). *Integral operators in spaces of summable functions*. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids, Mechanics: Analysis. Noordhoff International Publishing. Leiden.
28. Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N. (1968). *Linear and quasilinear elliptic equations*. Academic Press, New York-London.
29. Luzin, N.N. (1912). On the main theorem of integral calculus. *Mat. Sb.*, 28, 266-294 (in Russian).
30. Luzin, N.N. (1915). *Integral and trigonometric series*. Dissertation, Moskwa (in Russian).
31. Luzin, N.N. (1951). *Integral and trigonometric series*, Editing and commentary by N.K. Bari and D.E. Men'shov. Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit. Moscow-Leningrad (in Russian).
32. Luzin, N. (1917). Sur la notion de l'integrale. *Annali Mat. Pura e Appl.*, 26(3), 77-129.
33. Muskhelishvili, N.I. (1992). *Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. Dover Publications Inc., New York.
34. Nevanlinna, R. (1944). *Eindeutige analytische Funktionen*. Ann Arbor, Michigan.
35. Noshiro, K. (1960). *Cluster sets*. Springer-Verlag, Berlin etc.
36. Pommerenke, Ch. (1992). *Boundary behaviour of conformal maps*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 299. Springer-Verlag, Berlin.
37. Priwalow, I.I. (1956). *Randeigenschaften analytischer Funktionen*. Hochschulbücher für Mathematik, 25. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
38. Ransford, T. (1995). *Potential theory in the complex plane*. London Mathematical Society Student Texts, 28. Cambridge University Press, Cambridge.
39. Ryazanov, V. (2014). On the Riemann–Hilbert problem without index. *Ann. Univ. Buchar. Math. Ser.*, 5(LXIII)(1), 169-178.
40. Ryazanov, V. (2015). Infinite dimension of solutions of the Dirichlet problem. *Open Math. (the former Central European J. Math.)*, 13(1), 348-350.
41. Ryazanov, V. (2017). On Neumann and Poincare problems for Laplace equation. *Anal. Math. Phys.*, 7(3), 285-289.
42. Ryazanov, V. (2015). On Hilbert and Riemann problems. An alternative approach. *Ann. Univ. Buchar. Math. Ser.*, 6(LXIV)(2), 237-244.
43. Saks, S. (1964). *Theory of the integral*. Warsaw; Dover Publications Inc., New York.
44. Sobolev, S.L. (1963). *Applications of functional analysis in mathematical physics*. Transl. of Math. Mon., 7. AMS, Providence, R.I.
45. Trogdon, Th., Olver Sh. (2016) *Riemann–Hilbert problems, their numerical solution, and the computation of nonlinear special functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia.
46. Vekua, I.N. (1962). *Generalized analytic functions*. Pergamon Press. London-Paris-Frankfurt; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.
47. Yefimushkin, A. (2016). On Neumann and Poincare problems in A–harmonic analysis. *Advances in Analysis*, 1(2), 114-120.
48. Yefimushkin, A., Ryazanov, V. (2016). On the Riemann–Hilbert problem for the Beltrami equations. *Complex Analysis and Dynamical Systems VI, Part 2: Complex Analysis, Quasiconformal Mappings, Complex Dynamics*, Vol. 667, 299-316.

В. Гутлянский, О. Несмелова, В. Рязанов, А. Ефимушкин
Крайові задачі для узагальнених аналітичних і гармонічних функцій.

Вивчення задачі Діріхле з довільними вимірними даними для гармонічних функцій сходять до знаменитої дисертації Лузіна. Пізніше, відома монографія Векуа була присвячена крайовим задачам (тільки з неперервними по Гельдеру граничними даними) для узагальнених аналітичних функцій, а саме для неперервних комплекснозначних функцій комплексної змінної з узагальненими першими частинними похідними по Соболеву, які задовольняють лінійним рівнянням першого порядку, чиї коефіцієнти інтегровані порядку більше 2 у відповідних областях комплексної площини. Подана стаття є природним продовженням наших статей, присвячених крайовим задачам Рімана, Гільберта, Діріхле, Пуанкаре і, зокрема, Неймана для квазіконформних, аналітичних, гармонічних і, так званих, А-гармонічних функцій з крайовими умовами, вимірними відносно логарифмічної ємності. В цій роботі ми поширюємо відповідні результати на узагальнені аналітичні функції з витоками інтегрованими порядку більше 2, а також на узагальнені гармонічні функції з витоками інтегрованими порядку більше 2. Також ми даємо відповідні визначення з необхідними посиланнями на згадані статті та коментарі до попередніх результатів. Стаття містить різноманітні теореми існування неklasичних розв'язків крайових задач Гільберта та Рімана з довільними вимірними відносно логарифмічної ємності даними для узагальнених аналітичних функцій з витоками. Наш підхід ґрунтується на геометричній (теоретико-функціональній) інтерпретації граничних значень в порівнянні з класичним операторним підходом в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. На цій основі встановлені відповідні теореми існування для задачі Пуанкаре про похідні за напрямками і, зокрема, для задачі Неймана до рівняння Пуасона з довільними крайовими умовами, вимірними відносно логарифмічної ємності. Ці результати також можуть бути застосовані для напівлінійних рівнянь математичної фізики в анізотропних та неоднорідних середовищах.

Ключові слова: *рівняння Пуасона; задачі Рімана, Гільберта, Діріхле, Неймана та Пуанкаре; узагальнені аналітичні та гармонічні функції; логарифмічна ємність.*

*Institute of Applied Mathematics and Mechanics
of the NAS of Ukraine, Slavyansk,
Bogdan Khmelnytsky National University of Cherkasy,
Physics Department, Laboratory of Mathematical Physics,
Cherkasy
vgutlyanski@gmail.com, star-o@ukr.net,
Ryazanov@nas.gov.ua, a.yefimushkin@gmail.com,*

Received 24.11.19

УДК 517.54

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-6

©2019. І.В. Денег

ОЦІНКА ДОБУТКІВ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ ОБЛАСТЕЙ З ДОДАТКОВОЮ УМОВОЮ СИМЕТРІЇ

У даній роботі розглядається проблема про максимум добутку внутрішніх радіусів n областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, та містять точки розширеної комплексної площини, і ступеня γ внутрішнього радіусу області, що містить точку нуль. Одержано оцінку зверху максимуму даного добутку при всіх значеннях $\gamma \in (0, n]$. Основний результат роботи також узагальнює та посилює результати попередників [1–4] на випадок довільного розташування систем точок на $\mathbb{C}$.

MSC: 30C75.

Ключові слова: внутрішній радіус області, області, що не перетинаються, функція Гріна, трансфінітний діаметр, теорема про мінімізацію площі, нерівність Коші.

Нехай $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – її одноточкова компактифікація, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел, відповідно, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Нехай $r(B, a)$ – внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ [1 – 9].

В геометричній теорії функцій велику роль відіграють специфічні способи вимірювання замкнутих множин на комплексній площині. Один з таких способів був даний Фекете в 1923 році. Згідно з теоремою Сеге, введений Фекете трансфінітний діаметр дорівнює логарифмічній ємності і виражається через енергію Вінера з логарифмічним ядром. Природнім узагальненням логарифмічної ємності є ємність Робена. В роботі Дюрена, Пфальцграффа і Турмана доведена формула, що пов'язує ємність Робена та енергію Вінера, в ролі ядра якої замість логарифмічної функції є функція Неймана. Відмітимо, що в теорії потенціала введені поняття ємності, енергії Вінера, трансфінітного діаметра і сталої Чебишева відносно довільного ядра і досить добре вивчений зв'язок між ними.

Для компакта E його логарифмічна ємність визначається наступними рівностями:

$$\text{cap } E := \frac{1}{r(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, \infty)},$$

якщо величина $r(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, \infty)$ скінченна; $\text{cap } E := 0$ – в іншому випадку.

Наприклад, трансфінітний діаметр будь-якого кола дорівнює його радіусу, трансфінітний діаметр будь-якого прямолінійного відрізка дорівнює чверті його довжини [7].

Система точок $A_n := \{a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, називається n -променевою, якщо $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}$ і $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi$.

Позначимо при цьому

$$a_{n+1} := a_1, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

$$\alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad k = \overline{1, n}, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 2.$$

Нехай $\mathbb{U}$ – відкритий одиничний круг з центром в початку координат, $\partial\mathbb{U}$ – одиничне коло. Вважатимемо, що область D_0 належить до класу Λ , якщо $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ та $(\overline{\mathbb{C}} \setminus D_0) \cap \partial\mathbb{U}$ містить хоча б одну невироджену дугу одиничного кола.

Вважатимемо, що область $D_0 \in \Lambda$ належить до класу Δ , якщо $\overline{D_0} \subset \mathbb{U}$, очевидно, що $\Delta \subset \Lambda$. Систему непересічних областей $D_1, D_2, \dots, D_n$, будемо називати системою областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0, D_0 \in \Lambda$, якщо має місце наступне співвідношення

$$\bigcup_{k=1}^n D_k \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{D_0 \cup \widetilde{D_0}\},$$

де $\widetilde{D_0}$ – область, симетрична D_0 відносно одиничного кола. Очевидно, що $D_0, D_1, D_2, \dots, D_n$ – система областей, що взаємно не перетинаються.

Проблема. При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, n]$ знайти максимум добутку

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k), \quad (1)$$

де $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a_0 = 0, A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ – n -променева система точок, $\{D_k\}_{k=1}^n$ – довільна система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Lambda, a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}, k = \overline{0, n}$, і описати всі екстремалі.

Використовуючи міркування леми 1 роботи [5] ми отримуємо справедливості наступної оцінки зверху добутку (1).

Теорема. Нехай $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \gamma \in (0, n]$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ та будь-якого набору областей $D_k, a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}, k = \overline{0, n}, a_0 = 0$, де $\{D_k\}_{k=1}^n$ – система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Delta$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n}}. \quad (2)$$

Дана теорема узагальнює та посилює результати робіт [1–4] на випадок довільного розташування систем точок на $\overline{\mathbb{C}}$.

Доведення. Нехай $d(E)$ – трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$. Тоді має місце наступне співвідношення

$$r(D_0, 0) = r(D_0^+, \infty) = \frac{1}{d(\mathbb{C} \setminus D_0^+)} \leq \frac{1}{d\left(\bigcup_{k=1}^n \overline{D}_k^+\right)}, \quad (3)$$

де $D^+ = \{z : \frac{1}{z} \in D\}$. Згідно із теоремою Поїа [6], справедлива нерівність

$$\mu E \leq \pi d^2(E),$$

де μE – лебегова міра компактної множини E . Звідси

$$d(E) \geq \left(\frac{1}{\pi} \mu E\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі, використовуючи (3), маємо

$$r(D_0, 0) \leq \frac{1}{d\left(\bigcup_{k=1}^n \overline{D}_k^+\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\pi} \mu \left(\bigcup_{k=1}^n \overline{D}_k^+\right)}} = \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \mu \overline{D}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

За теоремою про мінімізацію площі [7] одержуємо, що

$$\mu(D) \geq \pi r^2(D, a).$$

Із нерівності (4), маємо

$$r(D_0, 0) \leq \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \mu \overline{D}_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \mu D_k^+\right]^{-\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{k=1}^n r^2(D_k^+, a_k^+)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Звідси отримуємо нерівність

$$r(D_0, 0) \leq \frac{1}{\left[\sum_{k=1}^n r^2(D_k^+, a_k^+)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Використовуючи конформну інваріантність функції Гріна

$$g_{D_k}(z, a_k) = g_{D_k^+}(w^+, a_k^+), \quad w^+ = \frac{1}{z}, \quad a_k^+ = \frac{1}{a_k},$$

маємо

$$g_{D_k^+}(w^+, a_k^+) = g_{D_k^+}\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{a_k}\right) = \ln \frac{1}{\left|\frac{1}{z} - a_k^+\right|} + \ln r(D_k^+, a_k^+) + o(1).$$

Виконавши нескладні перетворення, одержуємо

$$\begin{aligned} g_{D_k^+}(w^+, a_k^+) &= \ln \frac{|z|}{|1 - za_k^+|} + \ln r(D_k^+, a_k^+) + o(1) = \\ &= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln |a_k|^2 + \ln \left| 1 - \frac{1}{a_k}(z - a_k) \right| + \ln r(D_k^+, a_k^+) + o(1) = \\ &= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln |a_k|^2 r(D_k^+, a_k^+) + o(1). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$r(D_k^+, a_k^+) = \frac{r(D_k, a_k)}{|a_k|^2}$$

і приходимо до наступної нерівності

$$r(D_0, 0) \leq \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{r^2(D_k, a_k)}{|a_k|^4}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Далі,

$$r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq \frac{\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k)}{\left[\sum_{k=1}^n \frac{r^2(D_k, a_k)}{|a_k|^4} \right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Із нерівності Коші отримуємо

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{r^2(D_k, a_k)}{|a_k|^4} \geq \left[\prod_{k=1}^n \frac{r^2(D_k, a_k)}{|a_k|^4} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Звідси маємо, що

$$\left[\sum_{k=1}^n \frac{r^2(D_k, a_k)}{|a_k|^4} \right]^{\frac{\gamma}{2}} \geq \left[n \left[\prod_{k=1}^n \frac{r^2(D_k, a_k)}{|a_k|^4} \right]^{\frac{1}{n}} \right]^{\frac{\gamma}{2}} = n^{\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^n |a_k| \right]^{-\frac{2\gamma}{n}}.$$

І, таким чином,

$$I_n(\gamma) \leq \frac{\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k)}{n^{\frac{\gamma}{2}} \left[\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^n |a_k| \right]^{-\frac{2\gamma}{n}}} = n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \right)^{1 - \frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^n |a_k| \right)^{\frac{2\gamma}{n}}.$$

Нерівність (2) даної теореми доведена. $\square$

Зауваження. Якщо $\gamma = n$ і $\prod_{k=1}^n |a_k| \leq 1$, тоді при всіх умовах вище сформульованої теореми має місце нерівність

$$r^n(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq n^{-\frac{n}{2}}.$$

У цьому випадку структура точок і областей є неважливою.

Використовуючи нерівність [8]

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq 2^n \cdot \mathcal{L}(A_n) \cdot \prod_{k=1}^n \alpha_k,$$

$$\mathcal{L}(A_n) := \prod_{k=1}^n \chi\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_k|, \quad \chi(t) := \frac{1}{2}(t + t^{-1}),$$

доведену для будь-якої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ і довільної системи областей, що взаємно не перетинаються, $\{D_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, одержуємо наступне твердження.

Наслідок 1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді для будь-якої фіксованої n -променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $\mathcal{L}(A_n) = 1$, і будь-якого набору областей D_k , $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, де $\{D_k\}_{k=1}^n$ – система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Delta$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq 2^{n-\gamma} \cdot n^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

У випадку, якщо $\alpha_k = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1, n}$, тоді має місце наступний результат.

Наслідок 2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді при всіх умовах наслідку 1 справедлива нерівність

$$r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{n}\right)^{n-\gamma}.$$

З міркувань доведення вище сформульованої теореми для випадку, коли $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, маємо наступне твердження.

Наслідок 3. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ одиничного кола та будь-якого набору непересічних областей D_k , $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, де $\{D_k\}_{k=1}^n$ – система областей, що взаємно

не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Lambda$, справедлива нерівність

$$r^\gamma(D_0, 0) \prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Екстремальні задачі інших типів, пов'язаних з теорією відображень, оцінками ємності і модуля, а також точними оцінками інтегралів з вагою, розглядалися в роботах [10–15].

Автор висловлює подяку рецензенту статті за уважне прочитання роботи і зроблені зауваження.

Цитована література

1. *Бакhtина Г.П.* Конформные радиусы симметрических неналегающих областей // Проблемы дійсного і комплексного аналізу. – 1984. – 149. – С. 21–27.
2. *Ковалев Л.В.* О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 6. – С. 82–87.
3. *Ковалев Л.В.* О трех непересекающихся областях // Дальневосточный матем. журнал. – 2000. – 1, № 1. – С. 3–7.
4. *Dubinin V.N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. – Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
5. *Bakhtin A.K.* Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains // J. Math. Sci. – 2018. – V. 234, No. 1. – P. 1–13.
6. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. – М: Физмат лит., 1962.
7. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.
8. *Бакhtин А.К., Бакhtина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту матем. НАН України. – 2008. – 308 с.
9. *Hayman V.* Multivalent functions. – Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
10. *Afanas'eva E.S.* Generalized quasi-isometries on smooth Riemannian manifolds // Mathematical Notes. – 2017. – V. 102, No. 1–2. – P. 12–21.
11. *Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E.* Singularities of discrete open mappings with controlled p-module // J. Anal. Math. – 2015. – V. 127. – P. 303–328.
12. *Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Yakubov E.* The Beltrami equations and prime ends // J. Math. Sci. – 2015. – V. 210, No. 1. – P. 22–51.
13. *Klishchuk B.A., Salimov R.R.* Lower bounds for the area of the image of a circle // Ufa Math. J. – 2017. – V. 9, No. 2. – P. 55–61.
14. *Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A.* On convergence analysis of space homeomorphisms // Siberian Advances in Mathematics. – 2013. – V. 23, No. 4. – P. 263–293.
15. *Sevost'yanov E. A.* On the integral characterization of some generalized quasiregular mappings and the significance of the conditions of divergence of integrals in the geometric theory of functions // Ukrainian Math. J. – 2009. – V. 61, No. 10. – P. 1610–1623.

References

1. Bakhtina, G.P. (1984). Conformal radii of symmetric nonoverlapping domains, *Current problems in real and complex analysis*, 21–27, 149, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev (in Russian).

2. Kovalev, L.V. (2000). On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 6, 77-78 (in Russian).
3. Kovalev, L.V. (2000). On three disjoint domains. *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 1(1), 3-7 (in Russian).
4. Dubinin, V.N. (2014). *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*. Birkhäuser/Springer, Basel.
5. Bakhtin, A.K. (2018). Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains. *J. Math. Sci.*, 234(1), 1-13.
6. Polya, G., Szego, G. (1962). *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. M., Fizmatgiz (in Russian).
7. Goluzin, G.M. (1969). *Geometric theory of functions of a complex variable*. Amer. Math. Soc. Providence, R.I.
8. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Zelinskii, Yu.B. (2008). Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* (in Russian).
9. Hayman, V. (1958). *Multivalent functions*. Cambridge University Press, Cambridge.
10. Afanas'eva, E.S. (2017). Generalized quasi-isometries on smooth Riemannian manifolds. *Mathematical Notes*, 102(1-2), 12-21.
11. Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2015). Singularities of discrete open mappings with controlled p -module. *J. Anal. Math.*, 127, 303-328.
12. Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Yakubov, E. (2015). The Beltrami equations and prime ends. *J. Math. Sci.*, 210(1), 22-51.
13. Klishchuk, B.A., Salimov, R.R. (2017). Lower bounds for the area of the image of a circle. *Ufa Math. J.*, 9(2), 55-61.
14. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2013). On convergence analysis of space homeomorphisms. *Siberian Advances in Mathematics*, 23(4), 263-293.
15. Sevost'yanov, E.A. (2009). On the integral characterization of some generalized quasiregular mappings and the significance of the conditions of divergence of integrals in the geometric theory of functions. *Ukrainian Math. J.*, 61(10), 1610-1623.

I.V. Denega

Estimation of the products of the inner radii of domains with an additional symmetry condition.

In geometric function theory of complex variable extremal problems on non-overlapping domains are well-known classic direction. A lot of such problems are reduced to determination of the maximum of product of inner radii on the system of non-overlapping domains satisfying a certain conditions. Based on these elementary estimates a number of new estimates for functions realizing a conformal mapping of a disc onto domains with certain special properties are obtained. Estimates of this type are fundamental to solving some metric problems arising when considering the correspondence of boundaries under a conformal mapping. Also, on the basis of the results concerning various extremal properties of conformal mappings, the problem of the representability of functions of a complex variable by a uniformly convergent series of polynomials is solved. In this paper, we consider the problem on maximum the products of the inner radii of n disjoint domains with an additional symmetry condition that contain points of extended complex plane and the degree γ of the inner radius of the domain that contains the zero point. An upper estimate for the maximum of this product is found for all values of $\gamma \in (0, n]$. The main result of the paper generalizes and strengthens the results of the predecessors [1-4] for the case of an arbitrary arrangement of points systems on $\overline{\mathbb{C}}$. In proving the main theorem, the arguments of proving of Lemma 1 [5] and the ideas of proving Theorem 1 [3] played a key role.

We also established the conditions under which the structure of points and domains is not important. The corresponding results are obtained for the case when the points are placed on the unit circle and in the case of any fixed n -radial system of points.

Keywords: *inner radius of domain, non-overlapping domains, the Green function, transfinite diameter, theorem on minimizing of the area, the Cauchy inequality.*

Інститут математики НАН України, Київ
iradenega@gmail.com

Отримано 19.05.19

УДК 531.38

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-7

©2019. Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак

АСИМПТОТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ СТАНУ ТА ЖОРСТКОСТІ ОСЦИЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ

Розглянуто задачу спостереження та ідентифікації математичної моделі осцилятора ван дер Поля. Шукані невідомі характеризують швидкість коливань та жорсткість осцилятора. Такі моделі виникають при спрощеному моделюванні багатьох складних фізичних, біологічних нелінійних процесів, що мають циклічний характер і для яких актуальною є задача відновлення характеристик коливань в режимі реального часу за даними вимірювань. Для побудови відповідних схем спостереження та ідентифікації використано метод синтезу інваріантних співвідношень, розроблений для розв'язку обернених задач математичної теорії керування. Метод дозволяє формувати скінченні співвідношення, які визначають шукані невідомі як функції від відомих величин на траєкторіях досліджуваної системи в процесі її функціонування. Для вихідної задачі побудовано нелінійний спостерігач та ідентифікатор, за допомогою яких знаходяться асимптотичні оцінки шуканого параметра і повного фазового вектора за даними про залежність від часу положення осцилятора ван дер Поля.

MSC: 34A60, 34D20, 34N05.

Ключові слова: нелінійний спостерігач, ідентифікація, інваріантні співвідношення, осцилятор ван дер Поля.

1. Вступ.

У багатьох прикладних дослідженнях фізики, біології та інших наук в якості наближеною моделі складних нелінійних процесів використовується підхід, який засновано на концепції модельних рівнянь. В основі такої концепції лежить положення про те, що невелике число характерних типів рухів (патернів), властивих простим математичним моделям та/або їх комбінаціям, дає ключ до розуміння природи багатьох складних явищ. При цьому апіорі передбачається, що все фізичне різноманіття динамічних взаємозв'язків в досліджуваній системі може бути представлено у формі досить простих модельних рівнянь. Оскільки такі базові моделі окремо добре вивчені та їх параметри мають фізичну інтерпретацію, то це сприяє якісному дослідженню на цій основі складних систем різної природи.

Приміром, у багатьох прикладних дослідженнях коливальний рух різних систем, який має явно виражений нелінійний характер, моделюється системою, що складається з одного або декількох пов'язаних між собою осциляторів ван дер Поля [1]. Системи такого роду досить широко представлені, наприклад, при дослідженні та моделюванні біологічних функцій організму, таких як серцева діяльність, дихання, локомоторна активність [2], [3]. У зв'язку з появою пристроїв, які відстежують і регулюють стан та параметри патернів живих організмів, задача визначення в реальному масштабі часу характеристик таких систем за результатами вимірювання вихідних сигналів є актуальною [4], [5]. Проблеми ідентифіка-

ції параметрів коливальних пристроїв виникають також у зв'язку з розвитком різних технічних смарт-систем. Зокрема, в сучасних інтелектуальних електронно-обчислювальних MEMS-системах широко застосовуються мініатюрні електро-механічні елементи, резонатори - нелінійні осцилятори з параметрами, які треба налаштовувати [6].

Одна із притаманних для таких ситуацій задача про визначення характеристик модельної системи, а саме, задача знаходження повного вектора стану та ідентифікації параметра, що характеризує жорсткість пружини осцилятора ван дер Поля за інформацією про рух, розглянута в даній статті. Для отримання асимптотичних оцінок невідомих використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень [7], модифікація якого в задачах математичної теорії керування дозволяє синтезувати додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами [8]. Метод не передбачає лінеаризації вихідної системи і є суттєво нелінійним.

2. Задача визначення характеристик осцилятора ван дер Поля.

Розглянемо рівняння ван дер Поля, які описують процес релаксаційних коливань [1]

$$\ddot{s} + \mu(1 - s^2)\dot{s} + \omega^2 s = 0. \quad (1)$$

Тут s – відхилення точки від положення рівноваги, μ - коефіцієнт при нелінійній складовій рівняння, який характеризує величину змінного демпфірування, $\mu \geq 0$. Режим $\mu = 0$ відповідає коливанням без тертя і описується рівнянням гармонічного осцилятора з власною частотою ω . Однією із задач, що виникають при вивченні та спрощеному моделюванні нелінійних коливальних процесів за допомогою осциляторних систем, в припущенні, що значення $s(t)$ доступні вимірюванню, є задача визначення невідомої компоненти фазового вектора $\dot{s}(t)$ – швидкості коливань і параметра ω – жорсткості осцилятора.

Позначимо $s_1 = s$, $s_2 = \dot{s}$ і перепишемо (1) у вигляді системи

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2, \\ \dot{s}_2 &= -\omega^2 s_1 + \mu(1 - s_1^2)s_2, \\ y &= s_1(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Розглянемо задачу знаходження невідомих $s_2(t)$ і ω як класичну задачу спостереження і одночасної ідентифікації системи (2) за відомою інформацією про рух, $y(t) = s_1(t)$ [9]. Такою інформацією є вихід - функція $y(t)$, а також ті величини, які можуть бути отримані з використанням тільки лише значень вихіду. Зокрема, далі відомим будемо вважати будь-яке рішення задачі Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t)), \quad \xi(0) = \xi_0 \in R^p, \quad p \geq 1, \quad (3)$$

в якій функції $U(\xi, x_1)$ задовольняють умовам теорем існування та єдиності рішень для $t \in [0, \infty)$.

Застосовуючи до системи (2) перетворення Ліенара [10]

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2 + \mu(s_1^3/3 - s_1), \quad (4)$$

отримуємо систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \mu(x_1 - x_1^3/3), \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1, \\ y &= x_1(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки: вихід системи (2) $s_1(t)$ збігається з $x_1(t)$ -вихідом системи (5); шукана змінна s_2 виражається через x_2 за формулою $s_2 = x_2 - \mu(x_1^3/3 - x_1)$; параметр ω один і той же для обох систем, то далі будемо розглядати таку задачу.

Задача. Знайти асимптотично точні оцінки змінної $x_2(t)$ і параметра ω системи (5) по відомим значенням виходу $y = x_1(t)$.

Достатньою умовою локальної спостережливості та ідентифікованості [9] системи (5) є факт невикористання якобієвої матриці $J = \partial(\dot{y}, \ddot{y})/\partial(x_2, \omega)$, де похідні від функції виходу $y(t) = x_1(t)$ взяті в силу системи (5). Оскільки $\det J = -2\omega x_1$, то система є ідентифікованою тільки на інтервалах знакосталості $x_1(t)$. Тому далі будемо вважати виконаним більш сильну умову ідентифікованості.

Припущення. Будемо вважати, що в процесі виконання сформульованої задачі значення виходу відокремлено від нуля досить малою сталою $\delta > 0$.

У загальному випадку природним є порушення умови $|x_1(t)| > \delta$. Тоді, якщо вихід не дорівнює тотожно нулю, величина δ завжди може бути підібрана так, що існує деяка послідовність часових інтервалів T_α , на кожному з яких умову знакосталості виходу $x_1(t)$ виконано. Пропонована нижче схема рішення задачі передбачає послідовне поліпшення оцінок шуканих невідомих на кожному з таких інтервалів.

3. Синтез додаткових співвідношень.

Для вирішення вихідної задачі спостереження та ідентифікації будемо використовувати метод синтезу інваріантних співвідношень, який дозволяє отримувати в процесі функціонування системи асимптотичні оцінки невідомих [8]. Суть цього підходу полягає в динамічному розширенні вихідної системи диференціальних рівнянь (5) рівняннями (3), де p дорівнює 2 – числу невідомих, а саме: функції $x_2(t)$ і сталої ω . При цьому праві частини $U(\xi, x_1)$ підбираються таким чином, щоб отримана розширена система диференціальних рівнянь (3), (5) допускала сім'ю інваріантних співвідношень

$$F_i(x_1, x_2, \xi, \omega) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

з наступними властивостями:

1) Співвідношення (6) формують додаткові незалежні рівняння для невідомих, тобто $\text{rank} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_2, \omega)} = 2$;

2) Відповідний до рівностей (6) інваріантний многовид

$$M = \{(x_1, x_2, \xi) \subseteq R^{2+p} : F_i(x_1, x_2, \xi, \omega) = 0, i = 1, 2\}$$

має властивість глобального тяжіння для будь-яких рішень розширеної системи (3), (5). Іншими словами, на будь-якому рішенні

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_i(x_1(t), x_2(t), \xi(t), \omega) = 0, i = 1, 2.$$

4. Існування інваріантних співвідношень.

Покажемо, що для даної задачі інваріантні співвідношення виду (6) існують. Щоб властивість 1) було виконано у всій розглянутій області шукатимемо їх у вигляді

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \xi, \omega) &= x_2 - \xi_1 - \Psi_1(x_1) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \xi, \omega) &= \omega^2 - \xi_2 - \Psi_2(x_1) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\xi_1(t), \xi_2(t)$ є рішеннями системи диференціальних рівнянь (3).

На функції $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1), U_1(\xi_1, \xi_2, x_1), U_2(\xi_1, \xi_2, x_1)$ поки не накладаємо ніяких обмежень, окрім вимоги безперервної диференційованості по своїх аргументах у розглянутій області. Якщо ці функції обрані так, що співвідношення (7) стають інваріантними на даному рішенні, то тоді невідомі $x_2(t), \omega$ можуть бути знайдені безпосередньо з рівностей (7).

Твердження 1. Для будь-яких диференційованих функцій $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ існують керування $U_1(\xi_1, \xi_2, x_1), U_2(\xi_1, \xi_2, x_1)$ такі, що рівності (7) виконуються тотожно на деяких рішеннях розширеної системи диференціальних рівнянь (3), (5).

Доказ. Введемо змінні $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, які характеризують невязку в формулах (7) на рішеннях системи (3), (5).

$$x_2(t) - \xi_1(t) - \Psi_1(x_1(t)) = \varepsilon_1, \quad \omega^2 - \xi_2(t) - \Psi_2(x_1(t)) = \varepsilon_2. \quad (8)$$

Диференціюючи (8) в силу системи (3), (5), отримуємо диференціальні рівняння для відхилень

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -U_1 - \Psi'_1(x_1)[\varepsilon_1 + \xi_1 + \Psi_1(x_1) + \mu(x_1 - x_1^3/3)] - x_1(\varepsilon_2 + \xi_2 + \Psi_2(x_1)), \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -U_2 - \Psi'_2(x_1)[\xi_1 + \varepsilon_1 + \Psi_1(x_1) + \mu(x_1 - x_1^3/3)], \end{aligned} \quad (9)$$

де знак ' означає операцію диференціювання.

Щоб рівності (7) виконувалися тотожно на деяких рішеннях системи диференціальних рівнянь (3), (5) досить показати, що система диференціальних рівнянь (9) допускає тривіальне рішення $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$.

Для цього накладемо обмеження на частину вільних функцій, а саме: зафіксуємо вигляд правих частин допоміжної системи диференціальних рівнянь (3)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= U_1(\xi_1, \xi_2, x_1) = -\Psi'_1(x_1)[\xi_1 + \Psi_1(x_1) + \mu(x_1 - x_1^3/3)] - x_1(\xi_2 + \Psi_2(x_1)), \\ \dot{\xi}_2 &= U_2(\xi_1, \xi_2, x_1) = -\Psi'_2(x_1)[\xi_1 + \Psi_1(x_1) + \mu(x_1 - x_1^3/3)]. \end{aligned} \quad (10)$$

В результаті система диференціальних рівнянь для відхилень $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ стає однорідною

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= -\Psi_1'(x_1)\varepsilon_1 - x_1\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\Psi_2'(x_1)\varepsilon_1,\end{aligned}\tag{11}$$

тобто вона допускає тривіальне рішення. *Твердження доведено.* $\square$

Таким чином, можна стверджувати, що для будь-яких $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ початкові значення $\xi_1(0), \xi_2(0)$ в задачі Коші для диференціальних рівнянь (10) можуть бути обрані таким чином, що в момент $t = 0$ формули (7) стають вірними рівностями. Зокрема, це означало б, що початкові значення для відхилень $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0)$ дорівнюють нулю. В цьому випадку рівності (7) для цієї траєкторії розширеної системи (3), (5) виконуються тотожно, утворюючи тим самим систему додаткових рівнянь, в яких єдиними невідомими залишаються $x_2(t), \omega$.

У загальному випадку здійснити такий вибір $\xi_1(0), \xi_2(0)$ не вдається, оскільки для цього необхідно знати значення $x_2(0), \omega$, які, власне, і є шуканими величинами. Для того, щоб використовувати формули (7) для оцінки $x_2(t), \omega$ на будь-якому рішенні системи (3), (5) потрібно з множини функцій $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ вибрати такі, при яких тривіальне рішення системи (11) мало б властивість глобальної асимптотичної стійкості.

5. Стабілізація відхилень.

Розглянемо задачу підбору поки ще невизначених функцій $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ з метою забезпечення глобальної асимптотичної стійкості тривіального рішення системи (11). Введемо позначення:

$$V_1(x_1) = -\Psi_1'(x_1), \quad V_2(x_1) = -\Psi_2'(x_1)$$

і перепишемо систему (11) у вигляді

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= V_1(x_1)\varepsilon_1 - x_1\varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= V_2(x_1)\varepsilon_1.\end{aligned}\tag{12}$$

В силу наявної свободи на вибір функції $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ будемо розглядати задачу визначення функцій $V_1(x_1), V_2(x_1)$ як задачу синтезу управлінь, за якими тривіальне рішення системи (12) стає глобально асимптотично стійким.

Твердження 2. *Нехай значення абсолютної величини виходу системи (5) протягом всього процесу вимірювань відокремлені від нуля, $|x_1(t)| \geq x_{\min} > 0$. Тоді існують $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$, такі, що в фазовому просторі розширеної системи диференціальних рівнянь (5), (10) існує інваріантний многовид M , який визначається співвідношеннями (7) і має властивість глобального тяжіння для всіх траєкторій даної системи.*

Доказ. Доказ проведемо в два етапи. На першому з них знайдемо сім'ю управлінь $V_1(x_1), V_2(x_1)$, при яких змінні $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ пов'язані однорідним інваріантним співвідношенням. На другому етапі за допомогою відповідного синтезу керуючих функцій

забезпечимо це однорідне співвідношення властивістю тяжіння для траєкторій (12) в просторі $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Далі підберемо вільні функції таким чином, щоб одна із змінних $\varepsilon_i, i = 1, 2$ прямувала до нуля. Тоді наявність такого однорідного співвідношення автоматично забезпечить прямування до нуля іншої координати.

Зажадаємо спочатку, щоб рівняння (12) мали лінійний інваріантний многовид виду $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 = k\varepsilon_1\}$, де k – стала, така, що $\text{sign } k = -\text{sign } x_1(t)$. У загальному випадку траєкторії (12) не знаходяться на цій прямій, тому введемо також змінну η – відхилення траєкторій від цього многовиду:

$$\varepsilon_2 = k\varepsilon_1 + \eta.$$

Замінивши у рівняннях (12) змінну ε_2 на η , перепишемо їх у вигляді

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= (V_1(x_1) - kx_1)\varepsilon_1 - x_1\eta, \\ \dot{\eta} &= kx_1\eta + (V_2(x_1) - kV_1(x_1) + k^2x_1)\varepsilon_1.\end{aligned}\tag{13}$$

Розглянемо в якості функції Ляпунова вираз

$$V = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \eta^2)$$

і обчислимо його похідну, взяту в силу системи диференціальних рівнянь (13). Отримуємо

$$\dot{V} = (V_1 - kx_1)\varepsilon_1^2 + [V_2 - kV_1 + (k^2 - 1)x_1]\varepsilon_1\eta + kx_1\eta^2.$$

На другому етапі будемо вимагати, щоб невизначені поки величини $V_1(x_1), V_2(x_1)$ задовольняли наступним рівностям

$$V_1 = kx_1 - 1, \quad V_2 = k + x_1.\tag{14}$$

Тоді

$$\dot{V} \leq -(\varepsilon_1^2 + |kx_1|\eta^2),$$

що за умови $|x_1(t)| \geq x_{\min} > 0$ дозволяє ствержувати: змінні $\varepsilon_1(t), \eta(t)$ асимптотично прямують до нуля. Оскільки при цьому виконується рівність $\varepsilon_2(t) = k\varepsilon_1(t) + \eta(t)$, то змінна $\varepsilon_2(t)$ також прямує до нуля. А це означає, що многовид M , який породжено інваріантними співвідношеннями (7) є притягуючим для всіх траєкторій розширеної системи диференціальних рівнянь (3), (10). *Твердження доведено.* $\square$

6. Спостерігач.

Сформуємо остаточний вигляд рівнянь, що реалізують запропоновану схему рішення задачі спостереження та ідентифікації. Для цього визначимо остаточний вигляд вільних функцій, щоб задовольнити усі наведені вище обмеження. Передбачається, що вихідна задача вирішується на часовому інтервалі, при якому значення виходу $|x_1(t)| \geq x_{\min}$.

Оскільки $V_1(x_1) = -\Psi_1'(x_1)$, $V_2(x_1) = -\Psi_2'(x_1)$, то з урахуванням (14) покладемо

$$\Psi_1 = k \frac{x_1^2}{2} - x_1, \quad \Psi_2 = \frac{x_1^2}{2} + kx_1. \quad (15)$$

Тоді асимптотичні оцінки невідомих отримуємо за формулами

$$x_2(t) = \xi_1(t) + k \frac{x_1^2}{2} - x_1, \quad \omega^2 = \xi_2(t) + \frac{x_1^2}{2} + kx_1, \quad (16)$$

де змінні $\xi_1(t), \xi_2(t)$ задовольняють додатковим диференціальним рівнянням (10) з будь-якими початковими значеннями $\xi_1(0), \xi_2(0)$.

З урахуванням перетворення Ліенара остаточно маємо оцінку для швидкості коливань вихідної системи

$$s_2(t) = x_2(t) - \mu(s_1^3(t)/3 - s_1(t)).$$

7. Висновки.

Розглянуто задачу спостереження стану і одночасної ідентифікації параметра, що характеризує жорсткість пружного зв'язку для осцилятора ван дер Поля. Запропоновано метод побудови нелінійного ідентифікатора, який дозволяє отримувати асимптотичні оцінки шуканих невідомих за результатами вимірювання вихідного сигналу в реальному масштабі часу. Використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень, який в задачах управління дозволяє синтезувати додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами. Розроблений підхід асимптотичного оцінювання в подальшому буде використано в задачах адаптивного керування характером коливань осциляторних мереж.

Цитована література

1. Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В. Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22, № 4. – С. 3–42.
2. Bernardo D.D., Signorini M. G., Cerutti S. A model of two non-linear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics // Int. J. Bifurcation Chaos. – 1998. – 8. – P. 1975–1985.
3. Grudzinski K., Zebrowski J.J. Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators // Physica A 336. – 2004. – P. 153–162.
4. Brandt M. E., G. Wang, H-T Shih. Feedback control of a nonlinear dual-oscillator heartbeat model. – Bifurcation Control.– Eds. G. Chen, D. J. Hill, X. Yu. – Springer. –2003. – P. 265–273.
5. Aoyagi T. Network of neural oscillators for retrieving phase information // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 74. – P. 4075–4078.
6. Hoppensteadt F.C, Izhikevich E.M. Synchronization of MEMS resonators and mechanical neuro-computing // Transactions on circuits and systems. – 2001. – Vol. 48. – P. 133–138.
7. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
8. Жоголева Н.В., Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69–76.
9. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993.

10. Lienard A. Etude des oscillations entretenues // Revue generale de l'electricite. – 1928. – V. 23.

References

1. Kuznetsov, A.P., Seliverstova, E.S., Trubetskov, D.I., Tyuryukina, L.V. (2014). The phenomenon of van der Pol's equation. *Izvestiya Vuzov. Prikladnaya nelinejnaya dinamika*, 22(4), 3-42 (in Russian).
2. Grudzinski, K., Zebrowski, J.J. (2004). Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. *Physica A* 336, 153-162.
3. Bernardo, D.D., Signorini, M.G., Cerutti, S. (1998). A model of two non-linear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 8, 1975-1985.
4. Brandt, M.E., Wang, G., Shih, H-T. (2003). *Feedback control of a nonlinear dual-oscillator heartbeat model. Bifurcation Control*. Eds. G. Chen, D. J. Hill, X. Yu. Springer, 265-273.
5. Aoyagi, T. (1995). Network of neural oscillators for retrieving phase information. *Phys. Rev. Lett.*, 74(20), 4075-4078.
6. Hoppensteadt, F.C., Izhikevich, E.M. (2001). Synchronization of MEMS resonators and mechanical neurocomputing. *Transactions on circuits and systems*, 48, 133-138.
7. Kharlamov, P.V. (1974). Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mekhanika tverdogo tela*, 6, 15-24 (in Russian).
8. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitel'nykh sootnosheniy v obratnykh zadachakh upravleniya. *Proc. IAMM NASU*, 29, 69-76.
9. Kovalev, A.M., Shcherbak, V.F. (1993). *Upravlyayemost', nablyudayemost', identifikatsiruyemost' dinamicheskikh sistem*. Kiev: Nauk. dumka.
10. Lienard, A. Etude des oscillations entretenues. (1928). *Revue generale de l'electricite*, 23.

N.V. Zhogoleva, V.F. Shcherbak

Asymptotic evaluation of the state and stiffness of the van der Paul oscillator.

In many applications of physics, biology, and other sciences, an approach based on the concept of model equations is used as an approximate model of complex nonlinear processes. The basis of this concept is the provision that a small number of characteristic types movements of simple mathematical models inherent in systems gives the key to understanding and exploring a huge number of different phenomena. With this approach it is a priori assumed that the entire physical diverseness can be represented in the form of fairly simple model equations. It is contributes to a qualitative study of complex systems for various physical nature since basic models individually are well studied, their parameters have a physical interpretation. In particular, it is well known that oscillatory motion of various systems with a stable limit cycle can be modeled by a system consisting of one or more coupled van der Pol oscillators. Such systems are widely represented in various technical devices and in the study and modeling of some biological functions of the body, such as cardiac activity, respiration, locomotor activity, etc. It is considered a typical situation for many practical applications of control theory when the complete state vector of the system is unknown and only some of the functions of the state variables – the outputs of the system are accessible to measurement. Therefore, the problem of determining in real time the state and parameters of such systems based on the results of measuring the output signals are relevant. One of these inverse control problems, namely, the problem of observability and parameter identification of an model oscillatory system is considered in this article. For observation and identification scheme design the method of invariant relations developed in analytical mechanics is used. Its modification in control problems allows us to synthesize additional relationships between known and unknown quantities of a dynamical system that arise during the observed motion. The method does

not involve linearization of the original system and is essentially non-linear. The constructed nonlinear observer provides an asymptotic estimation of unknown parameter and velocity of oscillations.

Keywords: *nonlinear observer, identification, invariant relations, van der Pol oscillator.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
zhogoleva.nadia@gmail.com, scherbakvf@ukr.net

Отримано 05.09.19

УДК 004.655

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-8

©2019. І.С. Канарська

АЛГОРИТМИ, ЩО РЕАЛІЗУЮТЬ ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННІ ОПЕРАЦІЇ НА ТАБЛИЦЯХ ТА МУЛЬТИТАБЛИЦЯХ

Робота присвячена дослідженню алгоритмів, що реалізують операції перетину, об'єднання та різниці у таблицях та мультитаблицях. Тематика роботи є актуальною, оскільки незважаючи на важливість та вживаність теоретико-множинних операцій у реляційних базах даних, внаслідок певних причин, увагу дослідників було зосереджено на оптимізації інших табличних операцій, у першу чергу – з'єднання. При цьому оптимальне виконання теоретико-множинних операцій призведе до більш швидкого виконання запиту, що містить хоча б одну таку операцію, та суттєво зменшить час обробки інформації у сучасних базах даних. У статті розглянуто базові, найбільш природні алгоритми, що реалізують теоретико-множинні операції на таблицях та мультитаблицях, та досліджувалися модифікації базових алгоритмів, які могли б зменшити кількість обчислень. У якості критерія оцінювання швидкодії алгоритмів розглядалася їх складність у середньому для найбільш загального випадку, за яким домен кожного атрибуту схеми таблиць є фіксованим і заздалегідь відомим, а розподіл значень за кожним атрибутом в кожній таблиці є рівномірним. Для кожного з шести випадків (три операції на таблицях та три операції на мультитаблицях) знайдено найбільш швидкі за цим критерієм алгоритми. Для усіх розглянутих 6 алгоритмів на таблицях (базові та найшвидші модифікації базових) знайдено точну складність у середньому, причому формули, що визначають складність запропонованих алгоритмів, не містять О-асимптотики. Для експериментального підтвердження теоретичних результатів розроблено програмну систему, яка обчислює фактичну кількість виконаних обчислювальних дій для кожного розглянутого у роботі алгоритму. Проведені експерименти підтвердили теоретичні оцінки, знайдені для таблиць, та визначили найбільш швидкі алгоритми для мультитаблиць. Результати роботи можуть використовуватись як у теорії реляційних баз даних, так і на практиці для оптимізації запитів та зменшення часу обробки інформації в системах управління базами даних.

MSC: 68Q25.

Ключові слова: алгоритм, складність, бази даних.

1. Вступ.

В наш час світ інформаційних технологій широко розповсюдився майже у всі сфери людської діяльності. Переважна більшість сучасних інформаційних систем у своїй роботі використовує бази даних, роботу з якими забезпечують системи управління базами даних, що реалізуються різноманітними програмними продуктами. Наразі спостерігається постійний зріст обсягів інформації, що підвищує вимоги для її зберігання та обробки у реальних базах даних. Однією з цих вимог є збільшення швидкодії роботи системи з користувачем. Для більшості інформаційних систем ця вимога зазвичай реалізується через оптимізацію запитів, які є основним інструментом взаємодії між користувачем і базою даних та й взагалі з системою.

Дотепер найбільш розповсюдженими залишаються реляційні бази даних, ма-

тематична модель яких вперше була запропонована Е. Коддом [1, 2]. Табличні алгебри, що були введені В.Н. Редьком і Д.Б. Буєм [3, 4], побудовані на основі алгебр Е. Кодда, суттєво їх уточнюють та складають теоретичний фундамент мов запитів сучасних табличних баз даних. Аналіз літератури щодо оптимізації операцій у реляційних базах даних показав, що у переважній більшості випадків розглядаються підходи, які дозволяють одержати оптимізацію лише операції з'єднання; не було знайдено жодної спроби оптимізації теоретико-множинних операцій перетину, об'єднання, різниці. Проте ці операції є важливими для табличних (реляційних) алгебр та досить вживаними у запитах. Тому дослідження теоретико-множинних табличних операцій є важливою задачею, результати якої можуть бути використаними для оптимізації запитів.

У роботі досліджуються алгоритми, що реалізують перетин, об'єднання та різницю таблиць і мультитаблиць. У кожному з цих шести випадків спочатку розглядаються базові, найбільш природні алгоритми, що їх реалізують. У процесі дослідження теоретико-множинних табличних операцій нами було розглянуто значну кількість (приблизно 15 для кожного випадку) модифікацій базових алгоритмів, які могли б зменшити кількість обчислень. Для таблиць для кожного алгоритму, що було розглянуто, знайдено значення середньої кількості обчислень. Крім того, нами було розроблено програмну систему, яка для таблиць та мультитаблиць із заданими параметрами (кількість рядків, атрибутів, потужність атрибутів), знаходить фактичну кількість виконаних обчислень за кожним із розглянутих алгоритмів. Завдяки роботі цієї програмної системи були підтверджені теоретичні оцінки складності алгоритмів для таблиць, та обрані найбільш швидкі (з розглянутих) алгоритми для мультитаблиць; у цій роботі наведено ці шість алгоритмів разом з оцінками їх складності.

2. Основні визначення.

Зафіксуємо деяку непорожню множину $A = \{A_1, \dots, A_p\}$, елементи якої називаються атрибутами. Довільну скінченну підмножину $R = \{A'_1, \dots, A'_n\} \subseteq A$ назвемо схемою. Рядком s схеми R називається множина пар $s = \{(A'_1, d_1), \dots, (A'_k, d_k)\}$, проекція якої за першою компонентою дорівнює R . Таблицею схеми R називається скінченна множина рядків схеми R . Кількість рядків у таблиці T позначатимемо $|T|$.

На множині всіх таблиць схеми R введено такі параметричні операції: 1) перетин $\bigcap_R$ таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать одночасно всім вихідним таблицям; 2) об'єднання $\bigcup_R$ таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать хоча б одній з вихідних таблиць; 3) різниця $T_1 -_R T_2$ двох таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать таблиці T_1 та не належать таблиці T_2 .

Іншими словами операції перетину, об'єднання і різниці таблиць є обмеженням відповідно теоретико-множинних операцій перетину, об'єднання і різниці на

множині таблиць однакової схеми.

Існує цілий ряд практичних ситуацій, при яких може виникнути повторюваність даних. При застосуванні традиційних реляційних (табличних) баз даних для обробки результатів у цих ситуаціях можуть виникнути певні ускладнення, оскільки у таблицях повторюваність даних заборонена. Існує декілька шляхів усунення цих ускладнень, одним з яких є розширення поняття таблиці з метою усунення заборони повторюваності рядків. По аналогії з поняттям «мультимножина», такі таблиці дістали назву «мультитаблиці». Отже, мультитаблицею (схеми R) називається сукупність рядків однакової схеми (R).

Найбільш природними є такі два способи подання мультитаблиці:

а) мультитаблиця задається як неупорядкована сукупність рядків однакової схеми (із можливим повторенням рядків);

б) змінюється структура рядка. Вводиться новий атрибут (у нашій роботі цей атрибут назвемо лічильником, ім'я цього атрибута позначимо K), що не належить схемі вихідної таблиці. В якості значення цього атрибута будемо розуміти кількість повторів даного рядка заданої таблиці, це значення є додатним цілим числом.

Нескладно бачити, що ці два способи подання мультитаблиці є еквівалентними: з мультитаблиці, представлені першим способом, легко отримати (причому, однозначно) мультитаблицю, представлену другим способом, і навпаки. На наш погляд, в реальних базах даних природно задавати мультитаблиці першим способом, а для обробки мультитаблиць (у тому числі для виконання операцій над ними) більш зручним є другий спосіб подання. У разі, коли відношення кількості рядків, що зустрічаються точно один раз до загальної кількості рядків у таблиці невелике, другий спосіб подання мультитаблиці є найбільш оптимальним. Далі у нашій роботі вважатимемо, що мультитаблицю задано другим способом подання.

Через $\|T\|$ позначимо кількість унікальних рядків у мультитаблиці T . Нехай $s = \{(A_1, d_1), \dots, (A_n, d_n), (K, k)\}$ – деякий рядок мультитаблиці схеми R . Тоді його основою $\|s\|$ назвемо обмеження s за R , тобто $\|s\| = \{(A_1, d_1), \dots, (A_n, d_n)\}$.

При другому способі подання мультитаблиці всі її рядки та всі основи рядків стають попарно різними, тобто вона перетворюється в таблицю схеми $R' = R \cup K$ з одним особливим атрибутом – лічильником.

Наведемо означення теоретико-множинних операцій для мультитаблиць. 1) Перетин двох мультитаблиць T_1 та T_2 – мультитаблиця $T_1 \overset{M}{\cap} T_2$, що містить ті і тільки ті рядки, які одночасно містяться в обох вихідних таблицях. 2) Об'єднання двох мультитаблиць T_1 та T_2 – мультитаблиця $T_1 \overset{M}{\cup} T_2$, що містить ті і тільки ті рядки, які містяться хоча б в одній з вихідних таблиць. 3) Різниця двох мультитаблиць T_1 та T_2 – мультитаблиця $T_1 \overset{M}{-} T_2$, що містить ті і тільки ті рядки, які містяться в T_1 і не містяться в T_2 .

Проілюструємо ці означення. Нехай $\|s\| \in T_1$, $\|s\| \in T_2$ та значення лічильника s в мультитаблицях T_1 і T_2 дорівнюють відповідно k_1 і k_2 .

Тоді значення лічильника s в мультитаблиці $T_1 \bigcap_{R'}^M T_2$ дорівнює $\min(k_1, k_2)$, у мультитаблиці $T_1 \bigcup_{R'}^M T_2 - k_1 + k_2$, у мультитаблиці $T_1 - \frac{M}{R'} T_2 - \max(0, k_1 - k_2)$.

При цьому для різниці мультитаблиць, якщо значення лічильника менше одиниці, то відповідний рядок до результуючої мультитаблиці не включається.

В роботі ми будемо порівнювати алгоритми за їх обчислювальною складністю. Слідуючи [5], обчислювальною складністю алгоритму називається функція залежності «обсягу» роботи, яка виконується їм, від «розміру» вхідних даних. Розглядають два види обчислювальної складності: часову, яка оцінює час виконання алгоритму (кількість виконуваних обчислень), і ємнісну, яка оцінює кількість елементів пам'яті, необхідних для роботи алгоритму. У даній роботі будемо досліджувати часову складність та вважаємо, що складність елементарних операцій однакова (тобто використовується так звана рівномірна вага).

Виділяють три типи часової складності алгоритму: складність у найгіршому випадку (максимальна кількість елементарних операцій, що виконує алгоритм), складність для майже всіх входів і складність в середньому (математичне сподівання кількості елементарних операцій, що виконує алгоритм). Дослідження складності алгоритму в найгіршому випадку істотно простіше, ніж дослідження інших двох типів складності, проте при аналізі часової складності обробки інформації в системах керування базами даних та обробки запитів найбільш прийнятним є використання складності в середньому. У нашій роботі швидкодія алгоритмів визначається саме за їхньою складністю в середньому.

3. Алгоритми, що реалізують теоретико-множинні операції на таблицях.

У якості базових розглянемо такі алгоритми перетину, об'єднання та різниці таблиць.

Алгоритм БПТ З кожним рядком s_1 таблиці T_1 порівнюємо всі рядки таблиці T_2 : якщо існує такий рядок $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то рядок s_1 додаємо до таблиці T , у якій міститься результат, та переходимо до наступного рядка таблиці T_1 .

Алгоритм БОТ Додаємо всі рядки таблиці T_1 до нової таблиці T , яка містить результат, а потім всі рядки s_2 таблиці T_2 порівнюємо з рядками таблиці T , і якщо не існує такого рядка s_1 , що $s_2 = s_1$, то рядок s_2 додаємо до таблиці T , а якщо такий рядок існує, то переходимо до наступного рядка таблиці T_2 .

Алгоритм БРТ З кожним рядком s_1 таблиці T_1 порівнюємо всі рядки таблиці T_2 : якщо не існує такого рядка $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то рядок s_1 додаємо до нової результуючої таблиці T , а якщо такий рядок існує, то переходимо до наступного рядка таблиці T_1 .

У процесі дослідження теоретико-множинних табличних операцій ми розглядали різні модифікації базових алгоритмів, які могли б зменшити кількість обчислень. У якості критерія оцінювання швидкодії алгоритмів розглядалася їх складність у середньому для найбільш загального, на наш погляд, випадку, за яким домен кожного атрибуту схеми таблиць є фіксованим і заздалегідь відомим, та

розподіл значень за кожним атрибутом в кожній таблиці є рівномірним. Іншими словами, для будь-яких атрибуту $A \in R$ та рядка s будь-якої таблиці кожний елемент множини $dom_a = \{d_1, \dots, d_n\}$ має однакову ймовірність бути значенням A в s : $(A, d) \in s \rightarrow P\{d = d_1\} = P\{d = d_2\} = \dots = P\{d = d_n\}$.

Найбільш швидкими виявилися наступні модифікації базових алгоритмів.

Алгоритм ШПТ Якщо $|T_1| \leq |T_2|$, то з кожним рядком s_1 таблиці T_1 порівнюємо всі рядки таблиці T_2 , і якщо не існує такого рядка $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то вилучаємо рядок s_1 з таблиці T_1 , а якщо такий рядок s_2 існує, то вилучаємо його з таблиці T_2 та переходимо до наступного рядка таблиці T_1 ; результат міститься в таблиці T_1 . Якщо ж $|T_1| > |T_2|$, то таблиці T_1 і T_2 міняються місцями.

Алгоритм ШОТ Якщо $|T_1| \leq |T_2|$, то з кожним рядком s_2 таблиці T_2 порівнюємо всі рядки таблиці T_1 , і якщо існує такий рядок $s_1 \in T_1$, що $s_2 = s_1$, то вилучаємо рядок s_1 з таблиці T_1 і переходимо до наступного рядка таблиці T_2 ; після цього додаємо всі рядки, що залишились, з таблиці T_1 до таблиці T_2 , в якій міститься результат. Якщо ж $|T_1| > |T_2|$, то таблиці T_1 і T_2 міняються місцями.

Алгоритм ШРТ З кожним рядком s_2 таблиці T_2 порівнюємо всі рядки таблиці T_1 : якщо існує такий рядок $s_1 \in T_1$, що $s_2 = s_1$, то вилучаємо s_1 з таблиці T_1 , у якій міститься результат, і переходимо до наступного рядка таблиці T_2 .

Знайдемо складність у середньому алгоритмів БПТ, БОТ, БРТ, ШПТ, ШОТ, ШРТ.

Нехай $|T_1| = m_1$, $|T_2| = m_2$, $|A_1| = q_1, \dots, |A_n| = q_n$. Позначимо $m = \min\{m_1, m_2\}$ та $Q = q_1 \cdot \dots \cdot q_n$. Існує Q фіксованих рядків, кожний з яких незалежно від решти інших може належати чи не належати кожній з таблиць-аргументів. Нескладно бачити, що у випадку $m_1 + m_2 \leq Q$ мінімальна кількість рядків таблиці $T_1 \cap_R T_2$ дорівнює 0, у протилежному випадку мінімальна кількість рядків таблиці $T_1 \cap_R T_2$ дорівнює $m_1 + m_2 - Q$, це число позначимо через z , максимально можлива кількість рядків таблиці $T_1 \cap_R T_2$ становить m . Оскільки всі запропоновані алгоритми використовують порівняння рядків в таблицях T_1 та T_2 на предмет їх рівності, та складність усіх цих алгоритмів залежить від кількості рядків таблиці $T_1 \cap_R T_2$, знайдемо значення ймовірності $P(j)$ того, що кількість таких рядків буде дорівнювати j ($j \in \{z, \dots, m\}$). Далі для кожного алгоритму знайдемо значення $W(j)$ середньої кількості обчислень за умови $|T_1 \cap_R T_2| = j$. Будемо вважати складністю алгоритму число

$$W = \sum_{j=z}^m P(j) \cdot W(j)(1).$$

Знайдемо ймовірність $P(j)$. Ці j рядків можна обрати C_Q^j способами, рядки таблиці T_1 , які не належать таблиці T_2 , можна обрати $C_{Q-j}^{m_1-j}$ способами, а рядки таблиці T_2 , які не належать таблиці T_1 , – $C_{Q-m_1}^{m_2-j}$ способами. Існує $C_Q^{m_1}$ варіантів вибору рядків таблиці T_1 та $C_Q^{m_2}$ варіантів вибору рядків таблиці T_2 . Таким чином

імовірність $P(j)$ дорівнює:

$$P(j) = \frac{C_Q^j \cdot C_{Q-j}^{m_1-j} \cdot C_{Q-m_1}^{m_2-j}}{C_Q^{m_1} \cdot C_Q^{m_2}} = \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot (Q - m_1)! \cdot (Q - m_2)!}{j! \cdot (m_1 - j)! \cdot (m_2 - j)! \cdot (Q - m_1 - m_2 + j)! \cdot Q!}$$

Для знаходження $W(j)$ спочатку знайдемо середню кількість обчислень W' , необхідну для порівняння рядків $s^1 = \{(A_1, d_1^1), \dots, (A_n, d_n^1)\} \in T_1$ та $s^2 = \{(A_1, d_1^2), \dots, (A_n, d_n^2)\} \in T_2$ у випадку, коли $s^1 \neq s^2$. Імовірність того, що $d_1^1 = d_1^2$, дорівнює $\frac{1}{q_1}$, тому імовірність того, що $d_1^1 \neq d_1^2$, дорівнює $1 - \frac{1}{q_1} = \frac{q_1-1}{q_1}$. Якщо $d_1^1 \neq d_1^2$, то перевірка на рівність рядків s^1 та s^2 завершується, при цьому виконано одне обчислення. Нехай $d_1^1 = d_1^2$. Тоді імовірність того, що $d_2^1 = d_2^2$, дорівнює $\frac{1}{q_1} \cdot \frac{1}{q_2}$, а ймовірність того, що $d_2^1 \neq d_2^2$, дорівнює $\frac{1}{q_1} \cdot (1 - \frac{1}{q_2}) = \frac{q_2-1}{q_1 \cdot q_2}$. Якщо $d_2^1 \neq d_2^2$, то перевірка на рівність s^1 та s^2 завершується, при цьому виконано два обчислення.

Аналогічно, якщо виконуються рівності $d_1^1 = d_1^2, \dots, d_{j-1}^1 = d_{j-1}^2$, то ймовірність того, що $d_j^1 = d_j^2$, дорівнює $\frac{1}{q_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{q_j}$, а ймовірність того, що $d_j^1 \neq d_j^2$, дорівнює $\frac{q_j-1}{q_1 \cdot \dots \cdot q_j}$; у другому випадку перевірка на рівність s^1 та s^2 завершується, при цьому виконано j обчислень. Оскільки за постановкою задачі випадок $s^1 = s^2$ є неможливим (його ймовірність дорівнює $\frac{1}{Q}$), то всі знайдені значення треба поділити на число $1 - \frac{1}{Q} = \frac{Q-1}{Q}$. Таким чином,

$$W' = \frac{Q}{Q-1} \cdot \left(1 \cdot \frac{q_1-1}{q_1} + 2 \cdot \frac{q_2-1}{q_1 \cdot q_2} + \dots + n \cdot \frac{q_n-1}{Q} \right).$$

При знаходженні $W(j)$ вважаємо, що рядки в таблицях впорядковані блоками наступним чином. В таблиці T_1 спочатку розміщено блок з $\frac{m_1-j}{2}$ рядків, що не належать таблиці T_2 , далі – блок з j рядків таблиці $T_1 \cap_R T_2$, після цього – блок з решти $\frac{m_1-j}{2}$ рядків, що не належать таблиці T_2 . В таблиці T_2 впорядкування є аналогічним: спочатку розміщено блок з $\frac{m_2-j}{2}$ рядків, що не належать таблиці T_1 , далі – блок з j рядків таблиці $T_1 \cap_R T_2$, після цього – блок з решти $\frac{m_2-j}{2}$ рядків, що не належать таблиці T_1 . Оскільки в усіх алгоритмах, що розглянуто у роботі, формули, які підраховують їх складність, відрізняються лише значенням $W(j)$, далі будемо порівнювати швидкодію алгоритмів саме за цим параметром.

Знайдемо значення $W(j)$ для алгоритму БПТ. Для кожного з $m_1 - j$ рядків таблиці T_1 , що не належать таблиці T_2 , було виконано $m_2 \cdot W'$ порівнянь. Для j рядків таблиці T_1 , що також належать таблиці T_2 , в середньому було виконано $j \cdot \frac{m_2-1}{2} \cdot W'$ порівнянь з тими рядками таблиці T_2 , що не належать таблиці T_1 , та $j \cdot n$ порівнянь, які встановили факт рівності рядків; також було виконано $j \cdot n$ додавань рядків до нової таблиці T , тому:

$$W(j) = \left((m_1 - j)m_2 + j \frac{m_2 - 1}{2} \right) W' + 2jn = \left(m_1 m_2 - \frac{j}{2}(m_2 + 1) \right) W' + 2jn.$$

Знайдемо значення $W(j)$ для алгоритму ШПТ. Для порівняння значень m_1 та m_2 необхідно одне обчислення. Нехай $m_1 \leq m_2$. Для кожного рядка першого блоку таблиці T_1 (їх кількість дорівнює $\frac{m_1-j}{2}$) було виконано $m_2 \cdot W'$ порівнянь та n вилучень з таблиці T_1 . Для першого рядка другого блоку таблиці T_1 в середньому було виконано $\frac{m_2-1}{2} \cdot W' + n$ порівнянь та n вилучень з таблиці T_2 , для другого рядка другого блоку таблиці $T_1 - \frac{m_2-2}{2} \cdot W' + n$ порівнянь та n вилучень (кількість рядків у таблиці T_2 після розглядання попереднього рядка зменшилась на одиницю), ..., для j -го $-\frac{m_2-j}{2} \cdot W' + n$ порівнянь та n вилучень. Для кожного рядка третього блоку таблиці T_1 (їх кількість дорівнює $\frac{m_1-j}{2}$) було виконано $(m_2-j) \cdot W'$ порівнянь та n вилучень з таблиці T_1 . Тому для випадку $m_1 \leq m_2$:

$$W(j) = 1 + \frac{m_1-j}{2} m_2 W' + \frac{m_1-j}{2} n + \frac{m_2-1}{2} W' + \dots + \frac{m_2-j}{2} W' + jn + \frac{m_1-j}{2} n + \frac{m_1-j}{2} (m_2-j) W' = \left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2}) \right) W' + jn + m_1 n + 1.$$

Для загального випадку:

$$W(j) = \left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2}) \right) W' + jn + \min\{m_1, m_2\} n + 1.$$

Знайдемо значення $W(j)$ для алгоритму БОТ. При додаванні всіх рядків таблиці T_1 до нової таблиці T було виконано $m_1 \cdot n$ обчислень. Далі, для кожного з $m_1 - j$ рядків таблиці T_1 , що не належать таблиці T_2 , було виконано $m_2 \cdot W'$ порівнянь. Для j рядків таблиці T_1 , що також належать і таблиці T_2 , в середньому було виконано $j \cdot \frac{m_2-1}{2} \cdot W'$ порівнянь з рядками, що не є рівними ним та $j \cdot n$ порівнянь, які встановили факт рівності рядків. При додаванні рядків з таблиці T_2 до таблиці T було виконано $(m_2 - j) \cdot n$ додавань, тому:

$$W(j) = m_1 n + \left((m_1 - j) m_2 + j \frac{m_2 - 1}{2} \right) W' + (m_2 - j) n + jn = \left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (m_2 + 1) \right) W' + m_1 n + m_2 n.$$

Знайдемо значення $W(j)$ для алгоритму ШОТ. Для порівняння значень m_1 та m_2 необхідно одне обчислення. Нехай $m_1 \leq m_2$. Для кожного рядка першого блоку таблиці T_2 (їх кількість дорівнює $\frac{m_2-j}{2}$) було виконано $m_1 \cdot W'$ порівнянь. Далі, аналогічно алгоритму ШПТ, для першого рядка другого блоку таблиці T_2 в середньому було виконано $\frac{m_1-1}{2} \cdot W' + n$ порівнянь та n вилучень з таблиці T_1 , ..., для j -го $-\frac{m_1-j}{2} \cdot W' + n$ порівнянь та n вилучень. Далі для кожного рядка третього блоку таблиці T_2 (їх кількість дорівнює $\frac{m_2-j}{2}$) було виконано $(m_1-j) \cdot W'$ порівнянь. При додаванні рядків, що лишилися в таблиці T_1 , до таблиці T_2 виконано $(m_1-j) \cdot n$ обчислень, тому для випадку $m_1 \leq m_2$:

$$W(j) = 1 + \frac{m_2-j}{2} m_1 W' + \frac{m_1-j}{2} W' + \dots + \frac{m_1-j}{2} W' + jn + jn + (m_1-j) n =$$

$$= \left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2}) \right) W' + m_1 n + j n + 1.$$

Для загального випадку:

$$W(j) = \left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2}) \right) W' + \min\{m_1, m_2\} n + j n + 1.$$

Знайдемо значення $W(j)$ для алгоритму БРТ. Для кожного з $(m_1 - j)$ рядків таблиці T_1 , що не належать таблиці T_2 , було виконано $m_2 \cdot W'$ порівнянь. Для j рядків таблиці T_1 , що також належать таблиці T_2 , в середньому було виконано $j \cdot \frac{m_2-1}{2} \cdot W'$ порівнянь з тими рядками таблиці T_2 , що не належать таблиці T_1 , та $j \cdot n$ порівнянь, які встановили факт рівності рядків; також було виконано $(m_1 - j) \cdot n$ додавань рядків до нової таблиці T , тому:

$$W(j) = \left((m_1 - j) m_2 + j \frac{m_2 - 1}{2} \right) W' + j n + (m_1 - j) n = \left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (m_2 + 1) \right) W' + m_1 n.$$

Знайдемо значення $W(j)$ для алгоритму ШРТ. Для кожного з $\frac{m_2-j}{2}$ рядків першого блоку таблиці T_2 було виконано $m_1 \cdot W'$ порівнянь. Для першого рядка другого блоку таблиці T_2 в середньому було виконано $\frac{m_1-1}{2} \cdot W' + n$ порівнянь та n вилучень цього рядка з таблиці T_1 , ..., для j -го - $\frac{m_1-j}{2} \cdot W' + n$ порівнянь та n вилучень. Далі для кожного з $\frac{m_2-j}{2}$ рядків третього блоку таблиці T_2 було виконано $(m_1 - j) \cdot W'$ порівнянь, тому:

$$\begin{aligned} W(j) &= \frac{m_2 - j}{2} m_1 W' + \frac{m_1 - j}{2} W' + \dots + \frac{m_1 - j}{2} W' + 2j n + \frac{m_2 - j}{2} (m_1 - j) W' = \\ &= \left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2}) \right) W' + 2j n. \end{aligned}$$

Оскільки одержані формули складності алгоритмів є досить громіздкими, їх аналіз зробимо нижче у шостому розділі цієї роботи.

4. Алгоритми, що реалізують теоретико-множинні операції на мультитаблицях.

У якості базових розглянемо такі алгоритми перетину, об'єднання та різниці мультитаблиць.

Алгоритм БПМ З кожною основою $\|s_1\|$ кожного рядка мультитаблиці T_1 порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_2 : якщо існує така $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_1\| = \|s_2\|$, то порівнюємо значення лічильників цих рядків: рядок із мінімальним значенням лічильника додаємо до нової мультитаблиці T , у якій міститься результат, та переходимо до наступного рядка мультитаблиці T_1 .

Алгоритм БОМ Додаємо всі рядки мультитаблиці T_1 до нової мультитаблиці T , яка містить результат, а потім всі основи $\|s_2\|$ рядків мультитаблиці T_2 порівнюємо з основами рядків мультитаблиці T , і якщо не існує такої $\|s_1\|$, що

$\|s_2\| = \|s_1\|$, то рядок s_2 додаємо до мультитаблиці T , а якщо така основа існує, то її лічильнику у T присвоюємо значення суми лічильників $\|s_1\|$ і $\|s_2\|$ та переходимо до наступної основи рядка мультитаблиці T_2 .

Алгоритм БРМ З кожною основою $\|s_1\| \in T_1$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_2 : якщо не існує такої $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_1\| = \|s_2\|$, то рядок s_1 додаємо до нової результуючої мультитаблиці T , а якщо така основа існує, то у випадку, коли k_1 перевищує k_2 , додаємо $\|s_1\|$ до T та присвоюємо їй нове значення лічильника $k_1 - k_2$; далі переходимо до наступної основи мультитаблиці T_1 .

Найбільш швидкими виявилися наступні модифікації базових алгоритмів.

Алгоритм ШПМ Якщо $\|T_1\| \leq \|T_2\|$, то з кожною основою $\|s_1\| \in T_1$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_2 , і якщо не існує такої $\|s_2\| \in T_2$, що $\|s_1\| = \|s_2\|$, то рядок s_1 видаляємо з мультитаблиці T_1 , а якщо така основа існує, то при її виявленні порівнюємо значення лічильників рядків s_1 і s_2 , присвоюємо новому значенню лічильника рядка s_1 менше з порівнюваних значень та видаляємо рядок s_2 з мультитаблиці T_2 ; далі переходимо до наступної основи рядка T_1 , у якій міститься результат. Якщо ж $\|T_1\| > \|T_2\|$, то T_1 і T_2 міняються місцями.

Алгоритм ШОМ Якщо $\|T_1\| \leq \|T_2\|$, то з кожною основою $\|s_2\| \in T_2$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_1 , і якщо існує така $\|s_1\| \in T_1$, що $\|s_2\| = \|s_1\|$, то її лічильнику у T_2 присвоюємо значення суми лічильників $\|s_1\|$ і $\|s_2\|$, видаляємо рядок s_1 з таблиці T_1 і переходимо до наступної основи мультитаблиці T_2 ; після цього додаємо всі рядки, що залишились, з мультитаблиці T_1 до мультитаблиці T_2 , в якій міститься результат. Якщо ж $\|T_1\| > \|T_2\|$, то мультитаблиці T_1 і T_2 міняються місцями.

Алгоритм ШРМ З кожною основою $\|s_2\| \in T_2$ порівнюємо всі основи рядків мультитаблиці T_1 : якщо існує така $\|s_1\| \in T_1$, що $\|s_2\| = \|s_1\|$, то у випадку, коли k_1 перевищує k_2 , присвоюємо $\|s_1\|$ у T_1 нове значення лічильника $k_1 - k_2$, а у випадку $k_1 \leq k_2$ вилучаємо рядок s_1 з мультитаблиці T_1 та переходимо до наступної основи T_1 .

5. Експериментальне порівняння швидкодії алгоритмів.

Для експериментального підтвердження теоретичних оцінок складності для таблиць та знаходження найшвидших алгоритмів для мультитаблиць було розроблено програмну систему, яка для таблиць із заданими параметрами (кількість рядків, атрибутів, потужність атрибутів), знаходить фактичну кількість виконаних обчислень за кожним із запропонованих алгоритмів та порівнює їх із знайденими теоретичними оцінками (для таблиць), а також знаходить середнє значення фактичної кількості виконаних обчислень для будь-якої серії експериментів. Багаточисленні експерименти підтвердили теоретичні оцінки складності в середньому алгоритмів для таблиць, точність знайдених теоретичних оцінок виявилась достатньо високою, у жодній серії експериментів відхилення не перевищувало 0,25%. У Табл. 1 наведемо дані з двох серій експериментів: перша серія складалася з 500 експериментів з параметрами $n = 10$, $|T_1| = |T_2| = 1000$, $|A_1| = 3$, $|A_2| = \dots = |A_{10}| = 2$, друга – з 2000 експериментів з параметрами $n = 5$, $|T_1| = |T_2| = 100$, $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 3$, $|A_4| = |A_5| = 4$.

Табл 1. Експериментальні значення складності для таблиць.

Алгоритм	Кількість обчислень у серії I			Кількість обчислень у серії II		
	теорет.	експерим.	відх. %	теорет.	експерим.	відх. %
БПТ	1132071,9	1131741,0	0,029	13324,34	13336,58	0,092
ШПТ	771415,3	771135,0	0,036	12205,89	12231,50	0,210
БОТ	1139051,1	1139279,6	0,020	14092,86	14094,35	0,011
ШОТ	771415,3	771304,5	0,014	12205,89	12212,60	0,055
БРТ	1129051,1	1128895,6	0,014	13592,86	13595,13	0,017
ШРТ	767924,7	767386,5	0,070	11820,63	11819,86	0,007

У Табл.1 дані з другого та п'ятого стовпців отримані за допомогою формули (1), дані з третього та шостого стовпців є середнім арифметичним фактичної кількості обчислень, дані з четвертого та сьомого стовпців обчислюються за формулами $\frac{|(2)-(3)|}{(2)} \cdot 100\%$ та $\frac{|(5)-(6)|}{(5)} \cdot 100\%$ відповідно.

У Табл. 2 наведемо дані з двох серій експериментів з мультитаблицями з такими ж самими параметрами даних, як і для таблиць.

Табл 2. Експериментальні значення складності для мультитаблиць.

Алгоритм	Кількість обчислень у серії I	Кількість обчислень у серії II
БПМ	689766,2	10822,1
ШПМ	530267,7	9840,3
БОМ	698374,4	11688,1
ШОМ	530935,3	10173,9
БРМ	691356,5	11141,5
ШРМ	525921,6	9733,5

З даних Табл.1 та Табл.2 можна зробити висновок, що алгоритми ШПТ, ШОТ, ШРТ, ШПМ, ШОМ, ШРМ за швидкістю суттєво перевищують відповідно алгоритми БПТ, БОТ, БРТ, БПМ, БОМ, БРМ причому це перевищення помітно зростає зі зростанням величин значень параметрів вихідних таблиць.

6. Висновки.

У роботі досліджено алгоритми, що реалізують теоретико-множинні операції на таблицях та мультитаблицях. Розглянуто базові, найбільш природні алгоритми, що реалізують ці операції, знайдено модифікації базових алгоритмів, які дозволяють зменшити кількість обчислень. Для усіх розглянутих алгоритмів на таблицях знайдено точну часову складність у середньому, завдяки якій вдалося визначити найшвидші модифікації базових алгоритмів на таблицях. Для експериментального підтвердження теоретичних результатів на таблицях та визначення найшвидших алгоритмів на мультитаблицях розроблено програмну систему, яка обчислює фактичну кількість виконаних обчислень для кожного з запропонованих алгоритмів і порівнює їх із знайденими теоретичними оцінками (для таблиць); проведені експерименти підтвердили знайдені теоретичні оцінки. Результати можуть бути використані для оптимізації запитів у реляційних базах даних та для зменшення часу

обробки інформації у системах управління базами даних. За темою дослідження в подальшому планується дослідити алгоритми, що реалізують інші табличні операції, а також алгоритми, що реалізують теоретико-множинні операції із використанням сортування, індексації, хешування та специфікації таблиць.

Цитована література

1. Codd E.F. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks // Communications of the ACM. – 1970. – 13, No 6. – P. 377–387.
2. Codd E.F. The Relational Model for Database Management: Version 2. – Addison-Wesley, 1990. – 541 p.
3. Red'ko V.N., Bui D.B. Foundations of the theory of relational database models // Cybernetics and Systems Analysis. – 1996. – Vol. 32, Iss. 4. – P. 471–478.
4. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: «Академперіодика», 2001. – 198 с.
5. Буй Д.Б., Скобелев В.Г. Сложность операций в базах данных (обзор) // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. – 2014. – №. 6. – С. 53–59.

References

1. Codd, E.F. (1970). A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. *Communications of the ACM*, 13(6), 377-387.
2. Codd, E.F. (1990). *The Relational Model for Database Management: Version 2*. Addison-Wesley.
3. Red'ko, V.N., Bui, D.B. (1996). Foundations of the theory of relational database models. *Cybernetics and Systems Analysis*, 32(4), 471-478.
4. Red'ko, V.N., Brona, Yu.Y., Bui, D.B., Polyakov, S.A. (2001). *Relational databases: table algebras and SQL-like languages*. Kyiv: Academperiodica (in Ukrainian).
5. Bui, D.B., Skobelev, V.G. (2014). Complexity of operations in database systems (a survey). *Radio-electronic and Computer Systems*, 6, 53-59 (in Russian).

I.S. Kanarskaya

Algorithms, that implement set-theoretic operations on tables and multitables.

The paper is devoted to the research of algorithms implementing intersection, union and difference in tables and multitables. The subject of the work is relevant, since despite the importance and applicability of set-theoretical operations in relational databases, for some reason, the attention of researchers was focused on optimizing other table operations, first of all, the join. Meanwhile, the optimal implementation of set-theoretical operations will lead to a faster execution of the query, which containing at least one of set-theoretical operations, and will significantly reduce the time of processing information in the database management systems. For each set-theoretical operation algorithms that implement them on tables, in which strings are not repeat, and on multi-tables, in which the strings can be repeated, are considered. After that the modifications of the basic algorithms, that we found, which allow to significantly reduce the number of computations are considered. As an average case, we understand the most general case in which the domain of each attribute of the table schema is fixed and known above, and the distribution of values for each attribute in each table is uniform. For each of the six cases (three table operations and three multi-table operations), the fastest algorithms by this criterion were found. For all 6 algorithms considered on the tables (basic and fastest modifications of the basic ones) we found exact complexity on average. The found formulas defining the complexity

of the proposed algorithms do not contain O -asymptotics. For the experimental confirmation of the results we developed the software system, which, for tables with given parameters, finds the actual number of computations performed for each of the proposed algorithms. The experiments carried out confirmed the theoretical estimates found for the tables and identified the fastest algorithms for the multitable. The results of the work can be used both in relational databases theory and in practice in queries optimization and to reduce the processing time in database management systems.

Keywords: *algorithm, complexity, databases.*

ВП «Слов'янський коледж Луганського національного
аграрного університету», Слов'янськ
iren_kanar@ukr.net

Отримано 02.09.19

УДК 004.655

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-9

©2019. Н.Д. Кахута, О.С. Сенченко

ВИКОРИСТАННЯ ПОВНОГО ОБРАЗУ ТА ОБМЕЖЕННЯ В ДОСЛІДЖЕННІ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЕЯКИХ СИГНАТУРНИХ ОПЕРАЦІЙ ТАБЛИЧНИХ АЛГЕБР

У роботі використано властивості повного образу множини відносно бінарного відношення та обмеження бінарного відношення за множиною для дослідження деяких сигнатурних операцій табличних алгебр. Конструкції повного образу та обмеження є загальнозначущими для математики та табличних алгебр, які є сучасним аналогом відомих реляційних алгебр Кодда, що становлять теоретичний фундамент мов запитів сучасних реляційних баз даних. Елементи носія табличних алгебр уточнюють реляційні структури даних, а операції побудовані на базі основних маніпуляцій у SQL-подібних мовах. Одержано такі результати в дослідженні властивостей повного образу та обмеження: знайдено взаємозв'язки між повним образом та обмеженням; доведено монотонність і дистрибутивність повного образу та обмеження відносно об'єднання, критерій їх порожності та взаємозв'язки з першою та другою проекцією відношень; знайдено повний образ композиції відношень та композиція обмежень; встановлено дистрибутивність обмеження відносно перетину множин; наведено оцінки повного образу перетину та різниці множин; знайдено критерії дистрибутивності повного образу відносно перетину та різниці множин. Крім того, наведено зображення деяких сигнатурних операцій табличних алгебр за допомогою повного образу та обмеження. Ці зображення дозволили одержати деякі властивості цих операцій, які прямо впливають з властивостей повного образу та обмеження. В подальшому передбачається отримати аналогічні зображення інших сигнатурних операцій табличних алгебр, а також виділити їх властивості, що впливають з такого зображення. Одержані результати можуть бути використані в теорії табличних алгебр у якості підходу до дослідження властивостей їх сигнатурних операцій, що може бути використованим при оптимізації запитів в реляційних базах даних.

MSC: 68P15.

Ключові слова: повний образ множини, обмеження відношення за множиною, база даних, табличні алгебри.

1. Вступ.

Наразі табличний (реляційний) спосіб зображення даних, математична модель якого була запропонована Е. Коддом [1], залишається одним з найбільш розповсюджених. З математичної точки зору реляційна база даних є скінченим набором скінчених відношень різної розмірності між заздалегідь визначеними множинами елементарних даних – доменами. Табличні алгебри, які було введено В.Н. Редьком та Д.Б. Буєм [2], побудовані на основі реляційних алгебр Е. Кодда та суттєво їх уточнюють. Вони складають теоретичний фундамент мов запитів сучасних табличних баз даних. Елементи носія табличної алгебри уточнюють реляційні структури даних, а сигнатурні операції побудовані на базі основних табличних маніпуляцій у реляційних алгебрах та SQL-подібних мовах.

Дана робота присвячена дослідженню загальнозначущих для математики конструкцій повного образу множини відносно бінарного відношення та обмеження бі-

нарного відношення за множиною. Доводяться деякі загальні теоретико-множинні властивості повного образу та обмеження. Аналогічно результатами, які одержано в [3], розглядається взаємозв'язок між повним образом та операціями перетину, об'єднання і різниці множин. Основним результатом роботи є зображення сигнатурних операцій табличних алгебр – перетину, об'єднання, різниці, проекції і з'єднання – за допомогою конструкцій повного образу і обмеження, а також дослідження властивостей цих операцій з використанням даного зображення.

2. Основні визначення.

Зафіксуємо деякий універсум D . Як завжди, бінарним відношенням на D називається довільна підмножина декартового добутку $D \times D$. Далі в роботі ми розглядаємо тільки бінарні відношення на D , які для стислості викладення будемо називати терміном «відношення». Відношення ρ називається функціональним, якщо з $(x, y) \in \rho$ та $(x, z) \in \rho$ випливає рівність $y = z$, та ін'єктивним, якщо з $(x, y) \in \rho$ та $(z, y) \in \rho$ випливає $x = z$. Проекцією відношення ρ за першою та другою компонентою (в роботі також будемо використовувати терміни «перша проекція» та «друга проекція») будемо відповідно називати множини $pr_1(\rho) = \{x | \exists y((x, y) \in \rho)\}$ та $pr_2(\rho) = \{y | \exists x((x, y) \in \rho)\}$. Композицією відношень ρ і τ назвемо відношення $\rho \circ \tau = \{(x, z) | \exists y((x, y) \in \tau \& (y, z) \in \rho)\}$.

Повним образом множини X відносно бінарного відношення ρ називається множина $\rho[X]$, що складається з елементів y , для яких існує такий $x \in X$, що $(x, y) \in \rho$. Обмеженням відношення ρ за множиною X називається відношення $\rho \upharpoonright X = \rho \cap (X \times D)$. Змістовно кажучи, обмеження ρ за X складається з тих пар ρ , перша компонента яких належить X .

Далі наведемо основні визначення з теорії табличних алгебр у викладенні [4]. Зафіксуємо деяку непорожню множину $A = \{A_1, \dots, A_n\}$, елементи якої називаються атрибутами. Довільну скінченну підмножину $R = \{A'_1, \dots, A'_k\} \subseteq A$ назвемо схемою. Рядком s схеми R називається множина пар $s = \{(A'_1, d_1), \dots, (A'_k, d_k)\}$, проекція якої за першою компонентою дорівнює R . Таблицею схеми R називається скінченна множина рядків схеми R . Через $T_\emptyset$ позначимо таблицю, яка не містить жодного рядка.

На множині всіх таблиць схеми R введено такі параметричні операції: 1) перетин $\bigcap_R$ таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать одночасно всім вихідним таблицям; 2) об'єднання $\bigcup_R$ таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать хоча б одній з вихідних таблиць; 3) різниця $T_1 - T_2$ двох таблиць схеми R – таблиця, що складається з тих і лише тих рядків, які належать таблиці T_1 та не належать таблиці T_2 .

Іншими словами операції перетину, об'єднання і різниці таблиць є обмеженням відповідно теоретико-множинних перетину, об'єднання і різниці на множині таблиць однакової схеми.

Введемо визначення операції проекції. Проекцією за множиною атрибутів $X \subseteq$

R називається унарна параметрична операція π_X , значенням якої є таблиця, що складається з обмежень за X усіх рядків вихідної таблиці: $\pi_X(T) = \{s \parallel X \mid s \in T\}$.

Для визначення операції з'єднання необхідно одне допоміжне поняття. Бінарні відношення ρ і τ називаються сумісними (позначається $\rho \approx \tau$), якщо $\rho \parallel X = \tau \parallel X$, де $X = pr_1(\rho) \cap pr_1(\tau)$. З'єднанням називається бінарна операція $\otimes$, значенням якої є таблиця, що складається з різноманітних об'єднань сумісних рядків вихідних таблиць, тобто $T_1 \otimes T_2 = \{s_1 \cup s_2 \mid s_1 \in T_1 \wedge s_2 \in T_2 \wedge s_1 \approx s_2\}$.

Табличною алгеброю називають часткову алгебру з носієм – множиною всіх таблиць довільної схеми, наведеними вище п'ятьма операціями, а також операціями активного доповнення, селекції, ділення та перейменування атрибутів, які в цій роботі не використовуються.

3. Властивості повного образу множини.

Розглянемо деякі властивості повного образу множини X відносно відношення ρ .

Теорема 1 (властивості повного образу). *Виконуються наступні твердження:*

- 1) з $\rho_1 \subseteq \rho_2$ та $X_1 \subseteq X_2$ випливає $\rho_1[X_1] \subseteq \rho_2[X_2]$ (монотонність за сукупністю аргументів);
- 2) $\rho[\bigcup_{i \in I} X_i] = \bigcup_{i \in I} \rho[X_i]$, $\bigcup_{i \in I} (\rho_i[X]) = (\bigcup_{i \in I} \rho_i)[X]$ (дистрибутивність відносно об'єднання множин та відношень);
- 3) $\rho[\bigcap_{i \in I} X_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} \rho[X_i]$ (верхня оцінка повного образу перетину множин);
- 4) $(\rho_1 \circ \rho_2)[X] = \rho_1[\rho_2[X]]$ (повний образ відносно композиції відношень);
- 5) $\rho[X] = \emptyset \Leftrightarrow X \cap pr_1(\rho) = \emptyset$ (критерій порожності повного образу);
- 6) $\rho[X] = \rho[X \cap pr_1(\rho)]$, $\rho[X] \subseteq pr_2(\rho)$ (взаємозв'язок між повним образом та першою й другою проекціями відношення);
- 7) $\rho[X] - \rho[Y] \subseteq \rho[X - Y] \subseteq \rho[X]$ (оцінки повного образу різниці множин).

Доведення. 1) Нехай $y \in \rho_1[X_1]$. Тоді, за означенням повного образу, $\exists x \in X_1 \mid (x, y) \in \rho_1$. З $X_1 \subseteq X_2$ випливає $x \in X_2$, а з $\rho_1 \subseteq \rho_2$ випливає $(x, y) \in \rho_2$. За означенням повного образу $y \in \rho_2[X_2]$, тобто $\rho_1[X_1] \subseteq \rho_2[X_2]$.

2) Нехай $y \in \rho[\bigcup_{i \in I} X_i]$. Тоді існує такий $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$, що $(x, y) \in \rho$, тому існує такий індекс k , що $x \in X_k$. За означенням повного образу $y \in \rho[X_k]$, тому, $y \in \bigcup_{i \in I} \rho[X_i]$.

Нехай тепер $y \in \bigcup_{i \in I} \rho[X_i]$. Тоді існує такий індекс k , що $y \in \rho[X_k]$. За означенням повного образу існує такий $x \in X_k$, що $(x, y) \in \rho$, тому, $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$, з чого випливає $y \in \rho[\bigcup_{i \in I} X_i]$, що доводить першу рівність пункту.

Нехай $y \in \bigcup_{i \in I} (\rho_i[X])$. Тоді існує такий індекс n , що $y \in \rho_n[X]$, тому, існує такий $x \in X$, що $(x, y) \in \rho_n$. З цього випливає: $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} \rho_i$, що тягне $y \in (\bigcup_{i \in I} \rho_i)[X]$. Нехай тепер $y \in (\bigcup_{i \in I} \rho_i)[X]$. Тоді існують такі $x \in X$ та індекс n , що $y \in \rho_n[X]$. Це

тягне $y \in \bigcup_{i \in I} (\rho_i[X])$, що доводить другу рівність пункту.

3) Нехай $y \in \rho[\bigcap_{i \in I} X_i]$. Тому, існує такий $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$, що $(x, y) \in \rho$. За означенням повного образу для кожного індексу k виконується приналежність $(x, y) \in \rho[X_k]$, тому $y \in \bigcap_{i \in I} \rho[X_i]$, що доводить включення.

4) Нехай $y \in (\rho_1 \circ \rho_2)[X]$. Тоді існує такий $x \in X$, що $(x, y) \in \rho_1 \circ \rho_2$, тому, за означенням композиції відношень, існує такий z , що $(x, z) \in \rho_2$ та $(z, y) \in \rho_1$. З $(x, z) \in \rho_2$ і $x \in X$ за означенням повного образу випливає, що $z \in \rho_2[X]$, звідси, з урахуванням $(z, y) \in \rho_1$, одержимо $y \in \rho_1[\rho_2[X]]$; це доводить включення $(\rho_1 \circ \rho_2)[X] \subseteq \rho_1[\rho_2[X]]$. Доведемо зворотнє включення. Нехай $y \in \rho_1[\rho_2[X]]$. За означенням повного образу існує такий $z \in \rho_2[X]$, що $(z, y) \in \rho_1$. З $z \in \rho_2[X]$ випливає існування такого $x \in X$, що $(x, z) \in \rho_2$. За означенням композиції відношень одержали $(x, y) \in \rho_1 \circ \rho_2$, тоді, з урахуванням $x \in X$, одержимо $y \in (\rho_1 \circ \rho_2)[X]$; це доводить включення $(\rho_1 \circ \rho_2)[X] \supseteq \rho_1[\rho_2[X]]$ та рівність пункту.

5) Нехай $\rho[X] = \emptyset$. Якщо при цьому $X = \emptyset$, то $X \cap pr_1(\rho) = \emptyset$. Якщо ж $X \neq \emptyset$, то нехай $x \in X$. З $\rho[X] = \emptyset$ випливає, що не існує такий y , що $(x, y) \in \rho$, тому, за означенням першої проекції відношення, $x \notin pr_1(\rho)$, тому з $\rho[X] = \emptyset$ випливає $X \cap pr_1(\rho) = \emptyset$. Доведемо зворотню імплікацію. Нехай $X \cap pr_1(\rho) = \emptyset$. Від супротивного, припустимо, що $\rho[X] \neq \emptyset$ та нехай $y \in \rho[X]$. Тоді існує такий $x \in X$, що $(x, y) \in \rho$, звідки випливає, що $x \in X \cap pr_1(\rho)$; це протирічить умові $X \cap pr_1(\rho) = \emptyset$, доводить імплікацію $X \cap pr_1(\rho) = \emptyset \Rightarrow \rho[X] = \emptyset$ та еквівалентність пункту.

6) Доведемо рівність $\rho[X] = \rho[X \cap pr_1(\rho)]$. Нехай $y \in \rho[X]$. Тоді, за означенням повного образу, $\exists x \in X | (x, y) \in \rho$. За означенням першої проекції відношення $(x, y) \in \rho$ тягне $x \in pr_1(\rho)$, тому $x \in X \cap pr_1(\rho)$, що доводить включення $\rho[X] \subseteq \rho[X \cap pr_1(\rho)]$. Нехай тепер $y \in \rho[X \cap pr_1(\rho)]$, тоді $\exists x \in X \cap pr_1(\rho) | (x, y) \in \rho$, тому, $x \in X$, з чого випливає $y \in \rho[X]$; це доводить рівність пункту.

Включення $\rho[X] \subseteq pr_2(\rho)$ безпосередньо випливає з визначень повного образу і другої проекції відношення.

7) Доведемо включення $\rho[X] - \rho[Y] \subseteq \rho[X - Y]$. Якщо $Y = \emptyset$, то $X - Y = X$ та, згідно доведеної в п.6 рівності, $\rho[Y] = \emptyset$, тобто включення перетворюється в рівність $\rho[X] = \rho[X]$. Нехай тепер $Y \neq \emptyset$ та $y \in (\rho[X] - \rho[Y])$. Тоді $y \in \rho[X]$ та $y \notin \rho[Y]$. З $y \in \rho[X]$ за означенням повного образу випливає існування такого $x \in X$, що $(x, y) \in \rho$, а з $y \notin \rho[Y]$ випливає, що для кожного $z \in Y$ $(z, y) \notin \rho$, тому $x \notin Y$, отже, $x \in X - Y$. За означенням повного образу $y \in \rho[X - Y]$, що доводить включення $\rho[X] - \rho[Y] \subseteq \rho[X - Y]$.

Включення $\rho[X - Y] \subseteq \rho[X]$ безпосередньо випливає з очевидного включення $X - Y \subseteq X$ та доведеної в п.1 властивості монотонності повного образу. $\square$

Пункти 3 та 7 теореми 1 природним чином ставлять питання про достатні умови дистрибутивності повного образу відносно перетину і різниці множин.

Теорема 2 (критерій дистрибутивності повного образу відносно пе-

ретину множин). Рівність $\bigcap_{i \in I} \rho[X_i] = \rho[\bigcap_{i \in I} X_i]$ виконується тоді та лише тоді, коли виконується включення

$$\bigcap_{i \in I} \rho[X_i - \bigcap_{i \in I} X_i] \subseteq \rho[\bigcap_{i \in I} X_i](1).$$

Доведення. Нехай виконується рівність $\bigcap_{i \in I} \rho[X_i] = \rho[\bigcap_{i \in I} X_i]$. У цьому випадку включення (1) перетворюється у включення

$$\bigcap_{i \in I} \rho[X_i - \bigcap_{i \in I} X_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} \rho[X_i](2).$$

Нехай k – деякий індекс множини I . Оскільки виконується включення $X_k - \bigcap_{i \in I} X_i \subseteq X_k$, то за доведеною у п.1 теоремі 1 властивості монотонності виконується $\rho[X_k - \bigcap_{i \in I} X_i] \subseteq \rho[X_k]$, отже, виконується включення (2).

Нехай тепер виконується включення (1). З урахуванням доведеного в п.3 теоремі 1 включення $\rho[\bigcap_{i \in I} X_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} \rho[X_i]$ нам достатньо довести включення

$$\bigcap_{i \in I} \rho[X_i] \subseteq \rho[\bigcap_{i \in I} X_i](3).$$

Нехай $\bigcap_{i \in I} \rho[X_i] \neq \emptyset$ та $y \in \bigcap_{i \in I} \rho[X_i]$. Тоді, за означенням повного образу, для кожного індексу $k \in I$ існує такий $x_k \in X_k$, що $(x_k, y) \in \rho$. Якщо при цьому $x_k \in \bigcap_{i \in I} X_i$, то за означенням повного образу виконується $y \in \rho[\bigcap_{i \in I} X_i]$, тобто в цьому випадку включення (3) виконується. Далі розглянемо випадок, коли для кожного індексу $k \in I$ виконється $x_k \notin \bigcap_{i \in I} X_i$. У цьому випадку $x_k \in X_k - \bigcap_{i \in I} X_i$. Тоді за означенням повного образу $y \in \rho[X_k - \bigcap_{i \in I} X_i]$ та, з урахуванням виконання включення (1), $y \in \rho[\bigcap_{i \in I} X_i]$, тобто включення (3) в цьому випадку також виконується. $\square$

Теорема 3 (критерій дистрибутивності повного образу відносно різниці множин). Рівність $\rho[X] - \rho[Y] = \rho[X - Y]$ виконується тоді та лише тоді, коли $\rho[X - Y] \cap \rho[Y] = \emptyset$

Доведення. Нехай виконується рівність $\rho[X] - \rho[Y] = \rho[X - Y]$. Від супротивного, припустимо, що при цьому не виконується рівність $\rho[X - Y] \cap \rho[Y] = \emptyset$, тобто існує такий y , що $y \in \rho[X - Y]$ та $y \in \rho[Y]$. В цьому випадку, зважаючи на $X - Y \subseteq X$ та монотонність повного образу, приналежність $y \in \rho[X - Y]$ тягне $y \in \rho[X]$, у такому випадку y не належить лівій частині рівності $\rho[X] - \rho[Y] = \rho[X - Y]$ та належить правій частині цієї рівності, що суперечить припущенню та доводить рівність $\rho[X - Y] \cap \rho[Y] = \emptyset$.

Нехай тепер виконується рівність $\rho[X - Y] \cap \rho[Y] = \emptyset$. Покажемо, що в цьому випадку повинна виконуватися рівність $\rho[X] - \rho[Y] = \rho[X - Y]$. З урахуванням доведеного в п.7 теореми 1 включення $\rho[X] - \rho[Y] \subseteq \rho[X - Y]$ нам достатньо довести включення $\rho[X - Y] \subseteq \rho[X] - \rho[Y]$. Нехай $\rho[X - Y] \neq \emptyset$ та $y \in \rho[X - Y]$. За означенням повного образу існує такий $x \in X - Y$, що $(x, y) \in \rho$. З приналежності $x \in X - Y$ випливає, що $x \in X$, тому $y \in \rho[X]$. З рівності $\rho[X - Y] \cap \rho[Y] = \emptyset$ випливає, що $y \notin \rho[Y]$, тому $y \in \rho[X] - \rho[Y]$, що доводить шукане включення. $\square$

4. Властивості обмеження.

В даному розділі розглянемо деякі властивості обмеження відношення ρ за множиною X . Спочатку розглянемо взаємозв'язки між обмеженням і повним образом.

Теорема 4 (взаємозв'язки між обмеженням і повним образом). *Виконуються наступні твердження:*

- 1) $\rho[X] = pr_2(\rho\|X)$;
- 2) $(\rho\|X)[Y] = \rho[X \cap Y]$.

Доведення. 1) Нехай $y \in \rho[X]$. Тоді, за означенням повного образу, $\exists x \in X | (x, y) \in \rho$. У цьому випадку, за означенням обмеження, $(x, y) \in \rho\|X$, та за означенням другої проекції відношення $y \in pr_2(\rho\|X)$. Нехай тепер $y \in pr_2(\rho\|X)$. Тоді, за означенням другої проекції, $\exists x \in \rho\|X | (x, y) \in \rho\|X$. З $(x, y) \in \rho\|X$ випливає $(x, y) \in \rho$ та $x \in X$, за означенням повного образу останні дві приналежності тягнуть $y \in \rho[X]$.

2) Нехай $z \in (\rho\|X)[Y]$. Тоді, за означенням повного образу, існує такий $x \in Y$, що $(x, z) \in \rho\|X$. Приналежність $(x, z) \in \rho\|X$ за означенням обмеження тягне $x \in X$, тому, за означенням повного образу, $z \in \rho[X \cap Y]$. Нехай тепер $z \in \rho[X \cap Y]$. Тоді, за означенням повного образу, існує такий $x \in X \cap Y$, що $(x, z) \in \rho$, тобто $x \in X$ та $x \in Y$. З $(x, z) \in \rho$ та $x \in X$ за означенням обмеження випливає $(x, z) \in \rho\|X$, а з $(x, z) \in \rho\|X$ та $x \in Y$ за означенням повного образу випливає $z \in (\rho\|X)[Y]$. $\square$

Далі розглянемо деякі інші властивості обмеження. Через λ позначимо порожнє відношення.

Теорема 5 (властивості обмеження). *Виконуються наступні твердження:*

- 1) з $\rho_1 \subseteq \rho_2$ та $X_1 \subseteq X_2$ випливає $\rho_1\|X_1 \subseteq \rho_2\|X_2$ (монотонність за сукупністю аргументів);
- 2) $\rho\|\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (\rho\|X_i)$, $\bigcup_{i \in I} (\rho_i\|X) = (\bigcup_{i \in I} \rho_i)\|X$ (дистрибутивність відносно об'єднання множин та відношень);
- 3) $\rho\|\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (\rho\|X_i)$, $\bigcap_{i \in I} (\rho_i\|X) = (\bigcap_{i \in I} \rho_i)\|X$ (дистрибутивність відносно перетину множин та відношень);
- 4) $(\rho\|X)\|Y = \rho\|(X \cap Y)$ (композиція обмежень);
- 5) $\rho\|X = \lambda \Leftrightarrow pr_1(\rho) \cap X = \emptyset$ (критерій порожності обмеження);
- 6) $\rho\|X = \rho\|(X \cap pr_1(\rho))$, $\rho = \rho\|pr_1(\rho)$; (взаємозв'язок між обмеженням і першою проекцією відношення)

Доведення. 1) Нехай $(x, y) \in \rho_1\|X_1$. Тоді, за означенням обмеження, $x \in X_1$ та

$(x, y) \in \rho_1$. З $X_1 \subseteq X_2$ випливає $x \in X_2$, а з $\rho_1 \subseteq \rho_2$ випливає $(x, y) \in \rho_2$, тому $(x, y) \in \rho_1 \| X_2$.

2) Нехай $(x, y) \in \rho \| \bigcup_{i \in I} X_i$. Тоді $(x, y) \in \rho$ та $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$, тому для деякого індексу $i \in I$ виконується $x \in X_i$. За означенням обмеження $(x, y) \in \rho \| X_i$, отже, $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} (\rho \| X_i)$, що доводить включення $\rho \| \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq \bigcup_{i \in I} (\rho \| X_i)$. Нехай тепер $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} (\rho \| X_i)$. Тоді існує такий індекс $i \in I$, для якого виконується $(x, y) \in \rho \| X_i$. У цьому випадку $(x, y) \in \rho$ та $x \in X_i$, тому $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$. За означенням обмеження виконується $(x, y) \in \rho \| \bigcup_{i \in I} X_i$, що доводить включення $\bigcup_{i \in I} (\rho \| X_i) \subseteq \rho \| \bigcup_{i \in I} X_i$ та першу рівність пункту.

Нехай $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} (\rho_i \| X)$. Тоді існує такий індекс $i \in I$, для якого виконується $(x, y) \in \rho_i \| X$. У цьому випадку $x \in X$ та $(x, y) \in \rho_i$, тому $(x, y) \in (\bigcup_{i \in I} \rho_i)$. За означенням обмеження виконується $(x, y) \in (\bigcup_{i \in I} \rho_i) \| X$, що доводить включення $\bigcup_{i \in I} (\rho_i \| X) \subseteq (\bigcup_{i \in I} \rho_i) \| X$. Нехай тепер $(x, y) \in (\bigcup_{i \in I} \rho_i) \| X$. Тоді $x \in X$ та $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} \rho_i$, отже, існує такий індекс $i \in I$, для якого виконується $(x, y) \in \rho_i$. У цьому випадку $(x, y) \in \rho_i \| X$, отже, $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} (\rho_i \| X)$, що доводить включення $(\bigcup_{i \in I} \rho_i) \| X \subseteq \bigcup_{i \in I} (\rho_i \| X)$ та другу рівність пункту.

3) Нехай $(x, y) \in \rho \| \bigcap_{i \in I} X_i$. Тоді $(x, y) \in \rho$ та $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$, тому, для кожного індексу $i \in I$ виконується $x \in X_i$. За означенням обмеження $\forall i \in I$ виконується $(x, y) \in \rho \| X_i$, отже, $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} (\rho \| X_i)$, це доводить включення $\rho \| \bigcap_{i \in I} X_i \subseteq \bigcap_{i \in I} (\rho \| X_i)$. Нехай тепер $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} (\rho \| X_i)$. Тоді для всіх індексів $i \in I$ виконується $(x, y) \in \rho \| X_i$, тобто $(x, y) \in \rho$ та, крім того, $x \in X_i$, що тягне $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$. За означенням обмеження виконується $(x, y) \in \rho \| \bigcap_{i \in I} X_i$, що доводить включення $\bigcap_{i \in I} (\rho \| X_i) \subseteq \rho \| \bigcap_{i \in I} X_i$ та першу рівність пункту.

Нехай $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} (\rho_i \| X)$. Тоді, для всіх індексів $i \in I$, виконується $(x, y) \in \rho_i \| X$. У цьому випадку $x \in X$ та $(x, y) \in \rho_i$, тому $(x, y) \in (\bigcap_{i \in I} \rho_i)$. За означенням обмеження виконується $(x, y) \in (\bigcap_{i \in I} \rho_i) \| X$, що доводить включення $\bigcap_{i \in I} (\rho_i \| X) \subseteq (\bigcap_{i \in I} \rho_i) \| X$. Нехай тепер $(x, y) \in (\bigcap_{i \in I} \rho_i) \| X$. Тоді $x \in X$ та $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} \rho_i$, отже, для всіх індексів $i \in I$ виконується $(x, y) \in \rho_i$, тобто $(x, y) \in \rho_i \| X$, отже, $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} (\rho_i \| X)$; це доводить включення $(\bigcap_{i \in I} \rho_i) \| X \subseteq \bigcap_{i \in I} (\rho_i \| X)$ та другу рівність пункту.

4) Нехай $(x, y) \in (\rho \| X) \| Y$. Тоді, за означенням обмеження, $x \in Y$ та, крім того, $(x, y) \in \rho \| X$, що тягне $x \in X$ та $(x, y) \in \rho$, тому $x \in X \cap Y$. За означенням обмеження виконується приналежність $(x, y) \in \rho \| (X \cap Y)$, це доводить

включення $(\rho \| X) \| Y \subseteq \rho \| (X \cap Y)$. Нехай тепер $(x, y) \in \rho \| (X \cap Y)$. Тоді $(x, y) \in \rho$ та $x \in X \cap Y$, що тягне $x \in X$ та $x \in Y$. За означенням обмеження в цьому випадку виконуються приналежності $(x, y) \in \rho \| X$ та $(x, y) \in (\rho \| X) \| Y$, що доводить рівність пункту.

5) Нехай $\rho \| X = \lambda$. Від супротивного, припустимо, що $pr_1(\rho) \cap X \neq \emptyset$, тоді існує такий x , що $x \in pr_1(\rho) \cap X$. У цьому випадку $x \in X$ та за означенням першої проекції відношення існує такий y , що $(x, y) \in \rho$. З цього за означенням обмеження випливає $(x, y) \in \rho \| X$, що суперечить $\rho \| X = \lambda$; це доводить імплікацію $\rho \| X = \lambda \Leftarrow pr_1(\rho) \cap X = \emptyset$. Нехай тепер $X \cap pr_1(\rho) = \emptyset$. Від супротивного, припустимо, що $\rho \| X = \lambda$, тобто $\exists x, y | (x, y) \in \rho \| X$. За означенням обмеження це тягне $x \in X$ та $(x, y) \in \rho$, звідки, за означенням першої проекції відношення, випливає приналежність $x \in pr_1(\rho)$, тобто $x \in pr_1(\rho) \cap X$; це суперечить припущенню $X \cap pr_1(\rho) = \emptyset$ та доводить еквівалентність пункту.

6) Нехай $(x, y) \in \rho \| X$. Тоді, за означенням обмеження, $x \in X$ та $(x, y) \in \rho$, звідки, за означенням першої проекції відношення, випливає $x \in pr_1(\rho)$. Тому $x \in X \cap pr_1(\rho)$, отже, $(x, y) \in \rho \| (X \cap pr_1(\rho))$, це доводить включення $\rho \| X \subseteq \rho \| (X \cap pr_1(\rho))$. Нехай тепер $(x, y) \in \rho \| (X \cap pr_1(\rho))$. Тоді, за означенням обмеження, $(x, y) \in \rho$ та $x \in X \cap pr_1(\rho)$, отже, $x \in X$, що за означенням обмеження тягне $(x, y) \in \rho \| X$ та доводить першу рівність пункту.

Нехай $(x, y) \in \rho$. За означенням першої проекції відношення виконується $x \in pr_1(\rho)$, тому $(x, y) \in \rho \| pr_1(\rho)$, що доводить включення $\rho \subseteq \rho \| pr_1(\rho)$. Зворотнє включення справедливо через включення $\forall X (\rho \| X \subseteq \rho)$; це доводить другу рівність пункту. $\square$

5. Дослідження властивостей табличних операцій за допомогою повного образу та обмеження.

Перейдемо тепер до зображення операцій табличних алгебр за допомогою вказаних вище конструкцій.

Операції перетину, об'єднання і різниці таблиць (схеми R) можуть бути зображеними як бінарні параметричні (в ролі параметра виступає схема) операції, отримані обмеженням відповідно теоретико-множинних перетину, об'єднання і різниці на множину таблиць схеми R .

Операція проекції $\pi_X(T)$, згідно її визначення, зображається як обмеження рядків таблиці T за множиною атрибутів X : $\pi_X(T) = \{s \| X | s \in T\}$.

Операція з'єднання таблиці T_1 схеми R_1 та таблиці T_2 схеми R_2 , згідно до її визначення, зображається як множина всіляких об'єднань сумісних рядків вихідних таблиць, відношення сумісності задається через обмеження, тобто $T_1 \otimes T_2 = \{s_1 \cup s_2 | s_1 \in T_1 \wedge s_2 \in T_2 \wedge s_1 \| (R_1 \cap R_2) = s_2 \| (R_1 \cap R_2)\}$.

Перейдемо тепер до дослідження властивостей операцій за допомогою конструкцій повного образу і обмеження. Властивості перетину, об'єднання та різниці таблиць детально показано в [3], тому в даній роботі ми їх не розглядаємо. У наступній теоремі розглянемо властивості проекції та з'єднання таблиць, які безпосередньо впливають із зображення цих операцій за допомогою конструкцій повного образу і обмеження.

Теорема 6 (властивості проєкції та з'єднання таблиць). Виконуються наступні твердження:

- 1) $3 T_1 \subseteq T'_1$ и $T_2 \subseteq T'_2$ впливає $\pi_X(T_1) \subseteq \pi_X(T'_1)$ та $T_1 \otimes T_2 \subseteq T'_1 \otimes T'_2$ (монотонність);
- 2) $\pi_X(\bigcup_{i \in I} T_i) = \bigcup_{i \in I} \pi_X(T_i)$; якщо схеми таблиць T_i є однаковими, то $T \otimes (\bigcup_{i \in I} T_i) = \bigcup_{i \in I} (T \otimes T_i)$ (дистрибутивність відносно об'єднання таблиць);
- 3) $\pi_X(T) = T_\emptyset \Leftrightarrow T = T_\emptyset$; $T \otimes T_\emptyset = T_\emptyset \otimes T = T_\emptyset$ (збереження $T_\emptyset$);
- 4) $\pi_X(\bigcap_{i \in I} T_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} \pi_X(T_i)$ (верхня границя проєкції перетину таблиць);
- 5) $\pi_X(\pi_Y(T)) = \pi_{X \cap Y}(T)$ (композиція проєкцій).

6. Висновки.

У роботі досліджено властивості повного образу множини відносно відношення та обмеження відношення за множиною. Також наведено зображення деяких сигнатурних операцій табличних алгебр за допомогою повного образу і обмеження. Такі зображення дозволили отримати деякі властивості операцій, які прямо впливають з властивостей повного образу і обмеження. У подальшому передбачається отримати аналогічні зображення інших сигнатурних операцій табличних алгебр, а також виділити їх властивості, що впливають з такого зображення. Одержані результати можуть бути використані в теорії табличних алгебр у якості підходу до дослідження властивостей їх сигнатурних операцій, також результати можна буде використовувати для оптимізації запитів в реляційних базах даних.

Цитована література

1. Codd E.F. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks // Communications of the ACM. – 1970. – 13, No 6. – P. 377–387.
2. Red'ko V.N., Bui D.B. Foundations of the theory of relational database models // Cybernetics and Systems Analysis. – 1996. – Vol. 32, Iss. 4. – P. 471–478.
3. Сенченко А.С. Взаимосвязи между пересечением, объединением и другими сигнатурными операциями в табличных алгебрах // Праці ПІММ НАН України. – 2018. – Т. 32. – С. 121–132.
4. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: «Академперіодика», 2001. – 198 с.

References

1. Codd, E.F. (1970). A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. *Communications of the ACM*, 13(6), 377-387.
2. Red'ko, V.N., Bui, D.B. (1996). Foundations of the theory of relational database models. *Cybernetics and Systems Analysis*, 32(4), 471-478.
3. Senchenko, A.S. (2018). The interrelations between intersection, union and other signature operations in table algebra. *Proc. IAMM NASU*, 32, 121-132 (in Russian).
4. Red'ko, V.N., Brona, Yu.Y., Bui, D.B., Polyakov, S.A. (2001). *Relational databases: table algebras and SQL-like languages*. Kyiv: Academperiodica (in Ukrainian).

N.D. Kakhuta, A.S. Senchenko

Using the whole image and restrictions in the research of properties of some signature operations in Table Algebra.

The features of the whole image relative to many binary relation, and restrictions on a binary relation on the set for some of the signature operations of Table Algebra are used in the work. Constructions of the whole image and restrictions are of general interest for Mathematics, and Table Algebra is a modern analogue of Codd's well-known Relational Algebra. It forms the theoretical foundation of modern query language databases. Elements of the carrier of Table Algebra specify relational table data structures, and signature operations are based on the basic table manipulations in Relational Algebra and SQL-like languages. The following results in the research of the features of the whole image were obtained: interconnections between the whole image and restrictions were found; the monotony and distribution of the whole image and restrictions on unions, a criterion of their emptiness and interconnections with first and second projection relations were proved; the whole image of the composition of relations and composition restrictions were found; the distribution of restriction on intersection of sets was set; the estimates of the distribution of the whole image of intersection and difference of sets were given; criteria for distribution of the whole image relative to the intersection and differences of sets were found. In addition, the clues were provided with the help of the whole image and restrictions on some of the signature operations of Table Algebra: intersection, union, difference, projection and joining. These representations allowed us to obtain some features of these operations, which derive directly from the features of the whole image and restrictions. It is supposed to get similar views on other signature operations of Table Algebras and to allocate their features arising from such representation. The obtained results can be used in the theory of Table Algebra as an approach to the research of the features of their signature operations, this can be used in query optimization in relational databases.

Keywords: *whole image of set, restriction a relation on set, databases, table algebra.*

Університет економіки та права «КРОК», Київ
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
NadezhdaK@krok.edu.ua, Senchenko.a76@gmail.com

Отримано 01.09.19

УДК 531.36, 531.38

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-10

©2019. Ю. М. Кононов, В.Ю. Василенко

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ ДЗИГІ ЛАГРАНЖА З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ В СЕРЕДОВИЩІ, ЩО ЧИНИТЬ ОПІР

Розглянуто обертання навколо нерухомої точки важкого динамічно симетричного твердого тіла з довільною осесиметричною порожниною, цілком заповненою ідеальною нестисливою рідиною. Досліджено стійкість рівномірного обертання дзиги Лагранжа з рідиною в середовищі, що чинить опір, з урахуванням заданого постійного моменту. Представлено рівняння обуреного руху дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною. Доведено, що для еліпсоїдальної порожнини асимптотична стійкість рівномірного обертання має місце тільки для стиснутої еліпсоїдальної порожнини. Відмічено, що в більшості практично важливих випадках, основний ефект впливу рідини на рух твердого тіла можна врахувати, розглядаючи тільки основний тон коливання рідини. Отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі, що чинить опір, під дією постійного моменту дзиги Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною, що містить ідеальну рідину. Ці умови стійкості виведені з урахуванням основного і додаткового тонів коливань рідини. Важке тверде тіло має нерухому точку і знаходиться під дією постійного моменту в інерціальній системі координат. Проведено аналітичні та чисельні дослідження впливу основного і додаткового тонів коливань рідини, перекидального, відновлюючого, дисипативного і постійного моментів на умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною. Зазначено, що з урахуванням основного тону коливань рідини, представлені в роботі кубічна і квадратна нерівності є умовами асимптотичної стійкості. На прикладі еліпсоїдальної порожнини проведені чисельні дослідження областей стійкості. Встановлено, що зі збільшенням екваторіального моменту інерції твердого тіла область стійкості зменшується, а зі збільшенням осового моменту інерції твердого тіла вони збільшуються.

MSC: 70E50.

Ключові слова: асимптотична стійкість, постійний момент, дзига Лагранжа, ідеальна рідина, середовище, що чинить опір.

1. Вступ.

В роботі [1] розглянуто задачу про стійкість обертання навколо нерухомої точки важкого симетричного твердого тіла під дією дисипативного і постійного моменту в інерціальній системі координат. В [2–3] узагальнена ця задача на випадок рівномірного обертання несиметричного твердого тіла навколо третьої головної осі в припущенні, що центр мас твердого тіла знаходиться на цій осі. У роботах [4–5] були розпочаті дослідження стійкості обертання в середовищі з опором дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною. У статті [6] досліджується задача, розглянута в [1], на випадок наявності ідеальної рідини в порожнині твердого тіла. У цій статті, з урахуванням основного тону коливань рідини, отримані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання дзиги Лагранжа з рідиною. У цьому повідомлен-

Дослідження виконані в рамках програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки, проект № 0119U100042.

ні узагальнюються результати статті [6] на випадок урахування додаткових тонів коливань ідеальної рідини в довільній осесиметричній порожнині.

2. Постановка задачі.

Розглянемо обертання навколо нерухомої точки важкого динамічно симетричного твердого тіла з довільною осесиметричною порожниною, цілком заповненою ідеальною нестисливою рідиною. Припустимо, що на нього, крім сили тяжіння, діє дисипативний момент $\vec{M}_d = -D\vec{\omega}$ ($D = \text{diag}(D_1, D_1, D_3)$, $D_i > 0$, $i = \overline{1, 2}$), що моделює опір середовища, і постійний в інерціальній системі координат момент $\vec{M}_p = P\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}$ – одиничний вектор висхідної вертикалі, P довільна стала.

Дослідимо стійкість рівномірного обертання дзиги Лагранжа із рідиною в середовищі з опором з урахуванням заданого постійного моменту, вважаючи, що в незбуреному русі тверде тіло і рідина обертаються навколо вертикалі як одне ціле з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.

Рівняння збуреного руху дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною мають вигляд [5–6]

$$\begin{aligned} A\dot{\Omega}_1 + (C - A)\omega\Omega_2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot{S}_{1n} - \omega S_{2n}) &= \pm P\gamma_1 - D_1\Omega_1 + \Gamma\gamma_2 \\ A\dot{\Omega}_1 - (C - A)\omega\Omega_1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot{S}_{2n} + \omega S_{1n}) &= \pm P\gamma_2 - D_1\Omega_2 + \Gamma\gamma_1, \\ N_n^2(\dot{S}_{1n} - \tilde{\lambda}_n S_{2n}) + a_n\dot{\Omega}_1 &= 0, \quad N_n^2(\dot{S}_{2n} + \tilde{\lambda}_n S_{1n}) + a_n\dot{\Omega}_2 = 0, \\ \dot{\gamma}_1 &= \omega\gamma_2 - \Omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = -\omega\gamma_1 + \Omega_1 \\ C\dot{\Omega}_3 &= \pm P\delta - D_3(\Omega_3 + \omega), \\ \dot{\delta} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$; $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – одиничний вектор напрямку сили тяжіння, $\gamma_3 = \pm 1 + \delta$; A і C – відповідно головний екваторіальний і осьовий моменти інерції твердого тіла і рідини; $\Gamma = gmd$, m – маса механічної системи, d – відстань від центру мас системи до нерухомої точки; $\tilde{\lambda}_n = 2\omega/\kappa_n$, κ_n – власні числа, які всюди щільно заповнюють область дійсної осі $|\kappa| \geq 1$; визначення величин a_n і N_n^2 дано в роботах [5–7].

Система рівнянь (1)–(2) розділяється і допускає рішення

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \omega = P/D_3, \quad S_{1n} = S_{2n} = 0, \quad (3)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -1, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \omega = -P/D_3, \quad S_{1n} = S_{2n} = 0, \quad (4)$$

які відповідають рівномірним обертанням твердого тіла з кутовою швидкістю ω навколо вертикалі. При цьому рішенню (3) відповідає випадок “сплячої дзиги” (центр мас твердого тіла знаходиться вище нерухомої точки, тобто $d > 0$), на який діє перекидаючий момент ($\Gamma > 0$), момент $\vec{M}_p$, а рішенню (4) – випадок статично

стійкої “дзиги” (центр мас знаходиться нижче нерухомої точки ($d < 0$), на який діє відновлювальний момент ($\Gamma < 0$) і момент $-\dot{M}_p$.

Перше рівняння в (2) має дійсний від’ємний корінь $\Omega_3 = -D_3/C$. Характеристичне рівняння, що відповідає системі (1)–(2), завжди має один нульовий корінь, обумовлений наявністю геометричного інтеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

3. Асимптотична стійкість рішення (3).

У нових комплексних змінних $\Omega = \Omega_1 - i\Omega_2$, $\gamma = \gamma_1 - i\gamma_2$, $S_n = S_{1n} - iS_{2n}$ система (1) запишеться наступним чином

$$\begin{cases} A\dot{\Omega} + [i(C - A)\omega + D_1]\Omega + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot{S}_n - i\omega S_n) = (i\Gamma + P)\gamma, \\ N_n^2(\dot{S}_n - i\omega \lambda_n S_n) + a_n\dot{\Omega} = 0, \\ \dot{\gamma} = i(\omega\gamma - \Omega). \end{cases} \quad (5)$$

Тут $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n/\omega$.

Характеристичне рівняння для збуреного руху (5) матиме вигляд

$$A + \frac{iC\omega + D_1}{\lambda - i\omega} - \frac{\Gamma - iP}{(\lambda - i\omega)^2} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\lambda - i\omega\lambda_n} = 0, \quad (6)$$

де $E_n = 2a_n^2/N_n^2 > 0$.

З урахуванням основного і додаткового тону коливань рідини ($n = 1, 2$) рівняння (6) набуде вигляду

$$a_4\lambda^4 + (a_3 + ib_3)\lambda^3 + (a_2 + ib_2)\lambda^2 + (a_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} a_4 &= A - E_1 - E_2 = A^* > 0, \\ a_3 &= D_1 > 0, \quad b_3 = [C - A(\lambda_1 + \lambda_2) - 2A^* + E_1\lambda_2 + E_2\lambda_1]\omega, \\ a_2 &= [C - A^* + (C - 2A)(\lambda_1 + \lambda_2) - A\lambda_1\lambda_2 + 2(E_1\lambda_2 + E_2\lambda_1)]\omega^2 - \Gamma, \\ b_2 &= P - (1 + \lambda_1 + \lambda_2)D_1\omega, \\ a_1 &= [(\lambda_1 + \lambda_2)(P - D_1\omega) - \lambda_1\lambda_2D_1\omega]\omega, \\ b_1 &= \{(\lambda_1 + \lambda_2)\Gamma + [(2A - C)\lambda_1\lambda_2 + (A - C)(\lambda_1 + \lambda_2) - (E_1\lambda_2 + E_2\lambda_1)]\omega^2\}\omega \\ a_0 &= [\Gamma + (A - C)\omega^2]\lambda_1\lambda_2\omega^2, \quad b_0 = (D_1\omega - P)\lambda_1\lambda_2\omega^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Для існування асимптотично стійких рішень системи (5) необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, складена з коефіцієнтів многочлена (7)

$$\Delta_7 = \begin{pmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

була іннорно-позитивною [9]. Тобто були позитивно визначені матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 і Δ_7 :

$$|\Delta_1| = a_3 = D_1 > 0,$$

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad |\Delta_7| > 0. \quad (9)$$

Підставивши (8) в (9), отримаємо з урахуванням $A^* > 0$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma/D_3^2$, $x = D_1/D_3$:

$$-(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - 1)^2(\lambda_2 - 1)^2 E_1 E_2 \lambda_1 \lambda_2 \omega^8 (\Gamma_{71} \tilde{\Gamma} + \Gamma_{70}) > 0, \quad (10)$$

$$-(\Gamma_{52} \tilde{\Gamma}^2 + \Gamma_{51} \tilde{\Gamma} + \Gamma_{50}) \omega^2 > 0, \quad (11)$$

$$\Gamma_{31} \tilde{\Gamma} + \Gamma_{30} > 0, \quad (12)$$

де

$$\Gamma_{71} = [(\lambda_1 - 1)x + 1][(\lambda_2 - 1)x + 1]x^2,$$

$$\Gamma_{70} = \{[(\lambda_2 - 1)x + 1](x - 1)E_1 + [(\lambda_1 - 1)x + 1](x - 1)E_2 +$$

$$[(\lambda_1 - 1)x + 1][(\lambda_2 - 1)x + 1](A - Cx)\}P,$$

$$\Gamma_{52} = \lambda_1 \lambda_2 x^4,$$

$$\Gamma_{51} = x(g_1 x^2 + g_2 x + \lambda_1 \lambda_2 A^*)P^2$$

$$g_1 = \lambda_1(\lambda_1 - 1)^3 E_1 + \lambda_2(\lambda_2 - 1)^3 E_2 + (A^* - C)\lambda_1 \lambda_2,$$

$$g_2 = \lambda_1(\lambda_1 - 1)^3 E_1 + \lambda_2(\lambda_2 - 1)^3 E_2 - C^* \lambda_1 \lambda_2, \quad C^* = C - E_1 - E_2,$$

$$\Gamma_{50} = \{\lambda_1 \lambda_2 f_1 x^3 + f_2 x^2 P + f_3 x P^2 + f_4 A^* P^3\}P,$$

$$f_1 = (C - A)[E_1 \lambda_1(\lambda_1 - 1) + E_2 \lambda_2(\lambda_2 - 1)] - (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 E_1 E_2,$$

$$f_2 = [(A - C)\lambda_1 \lambda_2 - C(\lambda_1 - 1)^3]E_1 \lambda_1 + [(A - C)\lambda_1 \lambda_2 - C(\lambda_2 - 1)^3]E_2 \lambda_2 +$$

$$+(\lambda_1 + \lambda_2 - 2)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_1 \lambda_2 E_1 E_2,$$

$$f_3 = \lambda_1(\lambda_1 - 1)^2 E_1^2 + \{[(\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2]\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1(\lambda_1 - 1)^3 - \lambda_2(\lambda_2 - 1)^3\}E_1 E_2 +$$

$$+\lambda_2(\lambda_2 - 1)^2 E_2^2, \quad f_4 = \lambda_1(\lambda_1 - 1)^2 E_1 + \lambda_2(\lambda_2 - 1)^2 E_2,$$

$$\Gamma_{31} = -x^2, \quad \Gamma_{30} = [\lambda_1(\lambda_1 - 1)E_1 + \lambda_2(\lambda_2 - 1)E_2]x^2 +$$

$$+(C - E_1 \lambda_1 - E_2 \lambda_2)xP - A^* P^2.$$

Таким чином, умови асимптотичної стійкості рішення (3) визначаються трьома нерівностями (10)–(12), а рішення (4) будуть також визначатися трьома нерівностями (10)–(12), якщо в них замінити P на $-P$. Отже, умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання дзиги Лагранжа з довільною осесиметричною

порожниною, що містить ідеальну рідину, з урахуванням основного і додаткового тонів коливання рідини, зводяться до трьох нерівностей (10)–(12).

Нерівність (10) не виконується в разі кратних власних частот ($\lambda_1 = \lambda_2$) або для $\lambda_1 = 1$, або $\lambda_2 = 1$. Будемо вважати, що $\omega \neq 0$ ($P \neq 0$). В роботах [7-8] показано, що нестійкість може виникнути тільки при позитивних значеннях λ_n . Тому, якщо припустити, що $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_n \neq 1, \lambda_n > 0$ і $\omega \neq 0$, то система нерівностей (10)–(12) спрощується:

$$\Gamma_{71}\tilde{\Gamma} + \Gamma_{70} < 0, \quad (13)$$

$$\Gamma_{52}\tilde{\Gamma}^2 + \Gamma_{51}\tilde{\Gamma} + \Gamma_{50} < 0, \quad (14)$$

$$-x^2\tilde{\Gamma} + \Gamma_{30} < 0, \quad (15)$$

У випадку відсутності відносного руху рідини в порожнині твердого тіла ($E_1 = E_2 = 0$) характеристичне рівняння (6) буде квадратним рівнянням

$$a_2\lambda^2 + (a_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (16)$$

Тут

$$a_2 = A > 0, \quad a_1 = D_1 > 0, \quad b_2 = (C - 2A)\omega,$$

$$a_1 = (C - A)\omega^2 - \Gamma, \quad b_1 = P - D_1\omega.$$

Умови асимптотичної стійкості рівняння (16), тобто рішення (3) ($\omega = P/D_3$), визначаються нерівностями

$$|\Delta_1| = a_1 = D_1/A > 0, \quad |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_2 & -b_1 & -a_0 \\ 0 & a_1 & -b_0 \\ a_1 & -b_0 & -a_0 \end{vmatrix} > 0$$

або нерівністю

$$(CD_1 - AD_3)P^2 - D_1^2D_3\Gamma > 0 \quad (17)$$

Умова асимптотичної стійкості рішення (4) ($\omega = -P/D_3$) має вигляд

$$(CD_1 + AD_3)P^2 + D_1^2D_3\Gamma < 0. \quad (18)$$

Нерівності (17)–(18) слідує також з нерівності (15) відповідно при $\omega = -P/D_3$ і $\omega = P/D_3$, якщо в ньому покласти $E_1 = E_2 = 0$ і $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і співпадають з нерівностями роботи [1]. У більшості практично важливих випадках, основний ефект впливу рідини на рух твердого тіла можна врахувати, розглядаючи тільки основний тон коливання рідини ($n = 1$) [6]. Так, наприклад, в разі еліпсоїдальної порожнини з нескінченного спектра власних значень λ_n на рух твердого тіла впливає тільки основна гармоніка λ_1 . Тому окремо розглянемо випадок $n = 1$. В цьому випадку характеристичне рівняння (6) буде кубічним рівнянням

$$a_3\lambda^3 + (a_2 + ib_2)\lambda^2 + (a_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= A - E_1 = A^* > 0, \quad a_2 = D_1 > 0, \quad b_2 = (C - A\lambda_1 - 2A^*)\omega, \\ a_1 &= [C - A^* + (C - 2A)\lambda_1]\omega^2 - \Gamma, \quad b_1 = P - (1 + \lambda_1)D_1\omega \\ a_0 &= (P - D_1\omega)\lambda_1\omega, \quad b_0 = [\Gamma - (C - A)\omega^2]\lambda_1\omega \end{aligned} \quad (20)$$

Умови асимптотичної стійкості рівняння (19), тобто рішення (3) ($\omega = P/D_3$), визначаються нерівностями

$$|\Delta_1| = a_2 = D_1 > 0, \quad |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_2 & -b_1 \\ a_2 & -b_1 & -a_0 \end{vmatrix} > 0, \quad |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & a_2 & -b_1 & -a_0 & 0 \\ a_2 & -b_1 & -a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (21)$$

Підставивши (20) в (21), отримаємо

$$(\lambda_1 - 1)\tilde{\Gamma}x^3 + [\tilde{\Gamma} - C(\lambda_1 - 1)P^2]x^2 - (C + A^* - A\lambda_1)P^2x + A^*P^2 < 0. \quad (22)$$

$$[\tilde{\Gamma} - \lambda_1(\lambda_1 - 1)E_1P^2]x^2 - (C - E_1\lambda_1)xP^2 + A^*P^2 < 0. \quad (23)$$

Нерівності (22)–(23) не залежать від знака величини P і тому також є умовами асимптотичної стійкості рішення (4) ($\omega = -P/D_3$).

Слід зазначити, що коефіцієнти (19) можна отримати з (8), якщо в них покласти $E_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$ і вважати $a_3 = a_4$, $a_2 = a_3$, $b_2 = b_3$, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$. Нерівності (22)–(23) також слідують з (11)–(12), якщо в останніх покласти $E_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Таким чином, при врахуванні основного тону коливань рідини ($n = 1$) кубічна і квадратна нерівності (22)–(23) є умовами асимптотичної стійкості.

У разі вільного обертання дзиги Лагранжа ($\Gamma = 0$) нерівності (22)–(23) при $P \neq 0$ приймуть вигляд

$$\begin{cases} E_1\lambda_1(\lambda_1 - 1)x^2 + (C - E_1\lambda_1)x - A^* > 0, \\ C(\lambda_1 - 1)x^2 + (A^* - A\lambda_1 + C)x - A^* > 0. \end{cases} \quad (24)$$

І якщо при $\Gamma \neq 0$ умови асимптотичної стійкості $P \neq 0$ не залежали від знака величини P , то при $\Gamma = 0$ ці умови вже не залежать від величини P ($P \neq 0$) і зводяться до двох квадратних нерівностей (24) відносно змінної x .

На прикладі еліпсоїдальної порожнини проведемо дослідження системи нерівностей (24). Введемо безрозмірні змінні

$$A = A_0 + mL^2 + \frac{1}{5}(1 + \beta^2), \quad C = C_0 + \frac{2}{5}\beta, \quad E_1 = \frac{4}{5} \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}, \quad \lambda_1 = \frac{2}{1 + \beta^2}$$

$m = 4\beta/3$, $\beta = c/a$, c і a – напіввісі еліпсоїдальної порожнини (напіввісь c направлена по осі обертання). Розмірні величини моментів інерції A , C , E_1 віднесені до $\pi r a^5$, а маса m – до $\pi r a^3$.

На рис. 1–4 наведені графіки границь областей стійкості (24) (залежності $x = D_1/D_3$ від β) для $L = 0$, $a = 1$, $I = 1$. Области стійкості лежать вище даних кривих. Значенням $A_0 = 0$ і $C_0 = 0$ (невагоме тверде тіло) на рис. 1,3 відповідає нижній графік, а на рис. 2,4 – верхній. На рис. 1 і 3 $C_0 = 0$, а A_0 відповідно дорівнюють 0, 0.02, 0.04 і 0, 0.01, 0.01, а на рис. 2 і 4 $A_0 = 0$, а C_0 відповідно дорівнюють 0, 0.02, 0.04 і 0, 0.01, 0.01.

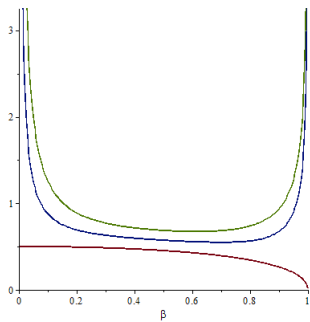


Рис. 1. Границя областей стійкості для $A_0 = 0, 0.02, 0.04$ при $C_0 = 0$

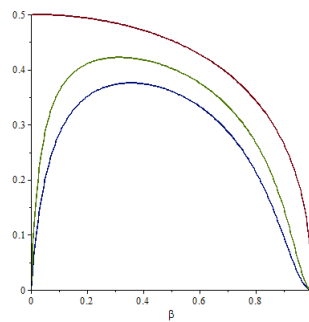


Рис. 2. Границя областей стійкості для $C_0 = 0, 0.02, 0.04$ при $A_0 = 0$

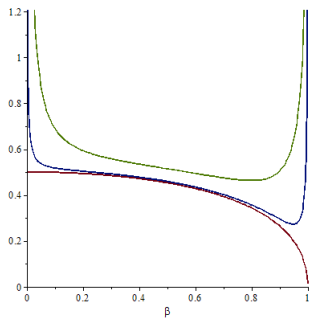


Рис. 3. Границя областей стійкості для $A_0 = 0, 0.01, 0.01$ при $C_0 = 0$

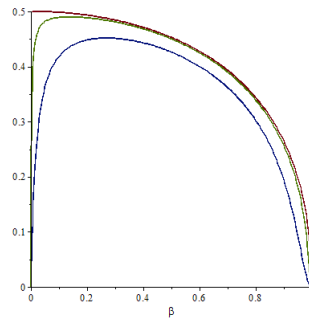


Рис. 4. Границя областей стійкості для $C_0 = 0, 0.01, 0.01$ при $A_0 = 0$

З наведених рисунків випливає, що асимптотична стійкість рівномірного обертання буде тільки в разі піджатої еліпсоїдальної порожнини $\beta < 1$, а також те, що зі збільшенням екваторіального моменту інерції твердого тіла область стійкості зменшується, а зі збільшенням осьового моменту інерції твердого тіла вона збільшується.

На підставі проведених аналітичних і чисельних досліджень можна зробити наступні висновки:

1. З урахуванням основного ($n = 1$) і додаткового ($n = 1, 2$) тонів коливань ідеальної рідини асимптотична стійкість рівномірного обертання під дією постійного і дисипативного моментів дзиґи Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною визначається трьома нерівностями. При подальшому збільшенні числа тонів коливань рідини число нерівностей збільшується на одиницю.

2. Для еліпсоїдальної порожнини асимптотична стійкість рівномірного обертання має місце тільки для піджатої еліпсоїдальної порожнини.

3. В середовищі з опором умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання невідомої дзиґи Лагранжа з ідеальною рідиною ($\Gamma \neq 0$) при $n = 1$ визначаються кубічним і квадратним нерівностями відносно x ($x = D_1/D_3 > 0$ і не залежать від знака величини P , а для вільної дзиґи Лагранжа ($\Gamma = 0$) ці умови визначаються вже двома квадратними нерівностями і не залежать від величини P ($P \neq 0$).

4. При $n = 1$ показано, що зі збільшенням екваторіального моменту інерції твердого тіла області стійкості зменшуються, а зі збільшенням осевого моменту інерції твердого тіла вони збільшуються.

Цитована література

1. Карапетян А.В., Лагутіна І.С. Лекції по інтегруванню уравнень движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1998. – №5. – С. 29–33.
2. Kononov Yu.M., Vasylenko V.Yu., Proskuriakov V.O. Stability of asymmetrical rigid body rotation with consideration of dissipative and constant moments // Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, November 9–11, 2016, Kyiv, Ukraine. – Vinnytsia, 2016. – P. 84–86.
3. Kononov Yu.M., Vasylenko V.Yu. Stability of the Rigid Body Rotation with the Element of Excitation in the Resistant Environment // International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications, October 17–19, 2017, Cherkasy, Ukraine. Book of Abstracts. – Vinnytsia: Vasyl'Stus Donetsk National University, 2017. – P. 33–35.
4. Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В. Об асимптотической устойчивости вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью, содержащей жидкость // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. – 2006. – №1. – С. 389–391.
5. Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В. Об устойчивости вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкость // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. – 2007. – №1. – С. 48–51.
6. Кононов Ю.Н., Киселёва Н.В. Влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с идеальной жидкостью // Вісник Харківського нац. університету ім. В.Н. Каразіна. Сер. “Математика, прикладна математика і механіка”. – 2009. – № 850. – С. 52–56.
7. Докучаев Л.В., Рвалов Р.В. Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. СССР. Механика твёрдого тела. – 1973. – №2. – С. 6–14.
8. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
9. Джурі Э. Инновы и устойчивость динамических систем. – М.: Наука, 1979. – 304 с.

References

1. Karapetyan, A.V., Lagutina, I.S. (1998). O vliyaniy dissipativnogo i postoyannogo momentov na vid i ustoychivost' statsionarnykh dvizheniy volchka Lagranzha. *Mekhanika tvordogo tela*, 5, 29-33 (in Russian).
2. Kononov, Yu.M., Vasylenko, V.Yu (2016). Stability of asymmetrical rigid body rotation with consideration of dissipative and constant moments. *Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky*, 6, 84-86 (in English).
3. Kononov, Yu.N., Vasylenko, V. (2017). Stability of the Rigid Body Rotation with the Element of Excitation in the Resistant Environment. *Book of Abstracts of International Conference Differential Equations, Mathematical Physics and Applications*, 1, 33-35 (in English).
4. Kononov, Yu.N., Kiselova, N.V. (2006). Ob asimptoticheskoy ustoychivosti vrashcheniya v soprotivlyayushcheysya srede volchka Lagranzha s polost'yu, soderzhashchey zhidkost'. *Bulletin of Donetsk Univ-ty*, 1, 389-391 (in Russian).
5. Kononov, Yu.N., Kiselova, N.V. (2007). Ob ustoychivosti vrashcheniya v soprotivlyayushcheysya srede volchka Lagranzha s polost'yu, soderzhashchey idealnuyu zhidkost'. *Bulletin of Donetsk Univ-ty*, 1, 48-51 (in Russian).
6. Kononov, Yu.N., Kiselova, N.V. (2009). Vliyaniye dissipativnogo i postoyannogo momentov na ustoychivost' ravnomernogo vrashcheniya v soprotivlyayushcheysya srede volchka Lagranzha s ideal'noy zhidkost'yu. *Bulletin of Kharkiv National University named after V.N. Karazina*, 850, 52-56 (in Russian).
7. Dokuchayev, L.V., Rvalov, R.V. (1973). Ob ustoychivosti statsionarnogo vrashcheniya tvordogo tela s polost'yu, soderzhashchey zhidkost'. *Mekhanika tvordogo tela*, 2, 6-14 (in Russian).
8. Dokuchayev, L.V. (1987). *Nelineynaya dinamika letatel'nykh apparatov s deformiruyemyimi elementami*. Moskva : Mashinostroyeniye (in Russian)
9. Dzhuri, E. (1979). *Innory i ustoychivost' dinamicheskikh sistem*. Moskva : Nauka (in Russian).

Yu. M. Kononov, V. Yu. Vasylenko

On the Stability of the rotation under the action of constant momentum Lagrangian top with perfect fluid in a resisting medium.

The rotation around a fixed point of a heavy dynamically symmetric solid body with an arbitrary asymmetric cavity completely filled with an ideal in-compressible liquid is considered. The stability of a uniform rotation of a Lagrang' top with the ideal liquid in a resisting medium under condition of a given constant moment is investigated. The equation of the perturbed motion of the Lagrang' top with the ideal liquid is presented. It is proved the follow-ing: the asymptotic stability of uniform rotation for an ellipsoidal cavity will be only for a compressed ellipsoidal cavity. It has been observed that most practically important cases consider the main effect of the ideal liquid influence on the motion of a solid can be researched by means of considering only the fundamental tone of the liquid oscillation. Conditions of uniform rotation asymptotic stability in a resistive medium under the action of the Lagrange top' constant moment with an arbitrary axisymmetric cavity containing an ideal liquid are obtained. Stability conditions are derived with provisions for the main and additional tones of liquid oscillations. The heavy solid body with the fixed-point value is ex-posed to the action of a constant moment in the inertial coordinate system. Analytic and numerical investigations of the main and additional tones of liquid oscillations influence, over-turning, restoring, dissipative and constant moments on the conditions of the asymptotic stability of the uniform rotation of the Lagrange top with an ideal liquid are carried out. It is stated the following: cubic and square inequalities presented in the

paper are conditions of asymptotic stability if the basic tone of liquid fluctuations will be mentioned. Stability region numerical studies have been carried out on the example of an ellipsoidal cavity. It is presented that increasing of the equatorial moment of inertia of the solid body de-creases its stability region as well as the increasing of the solid body inertia axial moment in-creases the last one.

Keywords: *asymptotic stability, constant moment, Lagrange top, ideal liquid, resistive medium.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
Донецький національний університет імені Василя Стуса,
Вінниця
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
v.vasilenko@donnu.edu.ua

Отримано 25.04.19

УДК 531.36, 531.38

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-11

©2019. Ю.М. Кононов, Я.І. Святенко

ВПЛИВ ДИСИПАТИВНОГО І ПОСТІЙНОГО МОМЕНТІВ НА СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНОГО ОБЕРТАННЯ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ВІЛЬНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА

Отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі з опірком двох вільних гіроскопів Лагранжа, пов'язаних пружним сферичним шарніром. Обертання кожного гіроскопа підтримується постійними моментами в інерціальній системі координат. Розглянуто випадки виродження пружного сферичного шарніра в сферично непружний, циліндричний і універсальний пружний шарнір (шарнір Гука). Показано, що при досить великій жорсткості шарніра умови асимптотичної стійкості визначаються тільки однією нерівністю, яка збігається з нерівністю, отриманою для випадку циліндричного шарніра. При збігу кутових швидкостей власних обертань гіроскопів ця нерівність збігається з відомою умовою для одного гіроскопа.

MSC: 70E55.

Ключові слова: динамічно симетричні тверді тіла, пружний сферичний шарнір, середовище з опірком, рівномірне обертання, асимптотична стійкість.

1. Вступ.

Система пружно зв'язаних твердих тіл (СПЗТТ) займає проміжне положення між абсолютно твердим і пружним тілом, що дає можливість моделювати рух пружних тіл в досить широких межах. Так, наприклад, в роботі [1] пружний корпус ракети моделюється системою двох твердих тіл, пов'язаних пружним шарніром, а роботах [2–3] — пружним стрижнем і системою двох твердих тіл, з'єднаних пружним шарніром. У цих роботах відзначається хороший збіг результатів розрахунків з експериментальними даними. Надалі подібні дослідження були продовжені в роботах [4–5] та інших. Завдання про рух СПЗТТ має і самостійне наукове і прикладне значення, тому що багато об'єктів сучасної ракетно-космічної, авіаційної, морської, залізничної та ін. техніки може бути представлена у вигляді СПЗТТ. Виконання об'єктів космічної, авіаційної і морської техніки в вигляді СПЗТТ намітилося в 60-і роки минулого століття. СПЗТТ описують гіроскопічні системи, роботи, маніпулятори і мн. ін. Рух СПЗТТ скінченим кінцевим числом нелінійних ОДР. У зв'язку з цим СПЗТТ набуває все більшого прикладного значення як модель керованої механічної системи і все більшого теоретичного значення, тому що в такій системі виникають коливання досить складного вигляду. Найбільш загальні рівняння руху системи зв'язаних твердих тіл були отримані П.В. Харламовим [6] і досліджені в роботах його учнів [7–10] і багатьох інших. Вплив дисипації на

Дослідження виконані в рамках програми фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки, проект № 0119U100042.

стійкість обертання твердого тіла було розглянуто в багатьох статтях. Досить хороший огляд цих статей і методів досліджень можна знайти, наприклад, в роботах [11–13]. У статті [14] розглянуто задачу про рух важкого динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки, що знаходиться під дією дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі координат. Показано, що ці моменти можуть надавати істотно дестабілізуючий вплив на стійкість рівномірного обертання твердого тіла. У цій статті узагальнено результати на випадок рівномірного обертання двох вільних пружно зв'язаних динамічно симетричних твердих тіл. Розглянуто випадки виродження пружного сферичного шарніра в сферично непружний, циліндричний і універсальний пружний шарнір (шарнір Гука). Показано, що при досить великій жорсткості шарніра умови асимптотичної стійкості визначаються тільки однією нерівністю, яка збігається з нерівністю, отриманою для випадку циліндричного шарніра. При співпадінні кутових швидкостей власних обертань гіроскопів ця нерівність збігається з відомою умовою для одного гіроскопа [14].

2. Постановка задачі і метод вирішення.

Розглянемо вільне обертання в середовищі з опором двох пружно зв'язаних динамічно симетричних твердих тіл S_i ($i = 1, 2$). Тверді тіла S_1 і S_2 зв'язані в точці O пружним відновлюючим сферичним шарніром $\vec{L} = k\vec{c}_1 \times \vec{c}_2 / (|\vec{c}_1| |\vec{c}_2|)$, $k \geq 0$ [8–9]. Тверде тіло S_i знаходиться під дією дисипативного моменту $\vec{M}_{id} = -D_i \vec{\omega}_i$ ($D_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3})$), який моделює середовище з опором і постійного моменту в інерціальній системі координат $\vec{M}_{ip} = P_i \vec{\nu}$. Тут $\vec{c}_1 = \overline{C_1 O}$, $\vec{c}_2 = \overline{O C_2}$; C_i і $\vec{\omega}_i$ відповідно центр мас і кутова швидкість тіла S_i ; D_{i1}, D_{i1}, D_{i3} і P_i – сталі ($D_{i1} > 0, D_{i3} > 0$), $i = 1, 2$; $\vec{\nu}$ – одиничний вектор, спрямований по спільній осі власних обертань гіроскопів Лагранжа в незбуреному русі, для визначеності будемо вважати по вектору $\vec{c}_1 = \overline{C_1 O}$ (рис. 1).

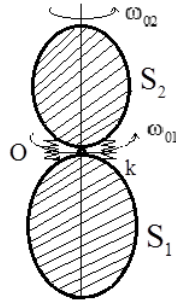


Рис. 1.

Рівняння обертання двох вільних, пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, з урахуванням дисипативного і постійного моментів, матимуть вигляд аналогічний [7–10]

$$\begin{aligned} (J_1 \cdot \vec{\omega}_1)^\bullet + m_2 \vec{c}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{c}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{c}_2)^\bullet &= -\vec{L} + P_1 \vec{\nu} - D_1 \vec{\omega}_1, \\ (J_2 \cdot \vec{\omega}_2)^\bullet + m_2 \vec{c}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{c}_1)^\bullet &= \vec{L} + P_2 \vec{\nu} - D_2 \vec{\omega}_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де J_i – тензор інерції тіла S_i відносно його центра мас C_i , а m_i – маса цього тіла ($i = 1, 2$), точкою позначена абсолютна похідна.

Зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\bar{e}_1^i \bar{e}_2^i \bar{e}_3^i$ з вершиною в точці O , осі якого направимо по головних осях тензора інерції J_i ($\bar{c}_i = c_i \bar{e}_3^i$) і введемо нерухомий базис $\bar{e}_1^0 \bar{e}_2^0 \bar{e}_3^0$, вектор $\bar{e}_3^0$ якого збігається з векторами $\bar{e}_3^i$ в незбуреному русі.

Величини $\alpha_{\mu k}^{ij} = \bar{e}_\mu^i \cdot \bar{e}_k^j$ ($i, j = \overline{0, n}$; $\mu, k = 1, 2, 3$) визначають орієнтацію базису $\bar{e}_1^i \bar{e}_2^i \bar{e}_3^i$ в $\bar{e}_1^j \bar{e}_2^j \bar{e}_3^j$

$$\bar{e}_\mu^i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{\mu k}^{ij} \bar{e}_k^j. \quad (1.2)$$

Коефіцієнти $\alpha_{\mu k}^{ij}$ можна виразити через $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$ і $\alpha_{\mu\sigma}^{j0}$ [9]

$$\alpha_{\mu k}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^3 \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{k\sigma}^{j0}. \quad (1.3)$$

Векторні рівняння (1.1) в проекціях на осі рухомого базису $\bar{e}_1^i \bar{e}_2^i \bar{e}_3^i$ приймуть вигляд

$$\begin{aligned} A'_1 \dot{p}_1 + (C_1 - A'_1) q_1 r_1 + \mu [(\dot{p}_2 - q_2 r_2) \alpha_{22}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2 r_2) \alpha_{21}^{11} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{23}^{11}] = \\ = -k(\alpha_{31}^{20} \alpha_{21}^{10} + \alpha_{32}^{20} \alpha_{22}^{10} + \alpha_{33}^{20} \alpha_{23}^{10}) - D_{11} p_1 + \alpha_{13}^{10} P_1, \\ A'_1 \dot{q}_1 - (C_1 - A'_1) p_1 r_1 - \mu [(\dot{p}_2 - q_2 r_2) \alpha_{12}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2 r_2) \alpha_{11}^{11} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{13}^{11}] = \\ = k(\alpha_{31}^{20} \alpha_{11}^{10} + \alpha_{32}^{20} \alpha_{12}^{10} + \alpha_{33}^{20} \alpha_{13}^{10}) - D_{11} q_1 + \alpha_{23}^{10} P_1, \\ C_1 \dot{r}_1 = -D_{13} r_1 + \alpha_{33}^{10} P_1 \\ A'_2 \dot{p}_2 + (C_2 - A'_2) q_2 r_2 + \mu [(\dot{p}_1 - q_1 r_1) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1 r_1) \alpha_{12}^{12} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{32}^{12}] = \\ = -k(\alpha_{31}^{10} \alpha_{21}^{20} + \alpha_{32}^{10} \alpha_{22}^{20} + \alpha_{33}^{10} \alpha_{23}^{20}) - D_{21} p_1 + \alpha_{13}^{20} P_2, \\ A'_2 \dot{q}_2 - (C_2 - A'_2) p_2 r_2 - \mu [(\dot{p}_1 - q_1 r_1) \alpha_{21}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1 r_1) \alpha_{11}^{12} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{31}^{12}] = \\ = k(\alpha_{31}^{10} \alpha_{21}^{20} + \alpha_{32}^{10} \alpha_{12}^{20} + \alpha_{33}^{10} \alpha_{13}^{20}) - D_{21} q_2 + \alpha_{23}^{20} P_2, \\ C_2 \dot{r}_2 = -D_{23} r_2 + \alpha_{33}^{20} P_2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

До системи рівнянь (1.4) потрібно додати рівняння для напрямних косинусів [9]

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{11}^{i0} &= -q_i \alpha_{31}^{i0} + r_i \alpha_{21}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{21}^{i0} = p_i \alpha_{31}^{i0} - r_i \alpha_{11}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{12}^{i0} &= -q_i \alpha_{32}^{i0} + r_i \alpha_{22}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{22}^{i0} = p_i \alpha_{32}^{i0} - r_i \alpha_{12}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{13}^{i0} &= -q_i \alpha_{33}^{i0} + r_i \alpha_{23}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = p_i \alpha_{33}^{i0} - r_i \alpha_{13}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{31}^{i0} &= -p_i \alpha_{21}^{i0} + q_i \alpha_{11}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{32}^{i0} = -p_i \alpha_{22}^{i0} + q_i \alpha_{12}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{33}^{i0} &= -p_i \alpha_{23}^{i0} + q_i \alpha_{13}^{i0}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Тут p_i, q_i, r_i — проекції вектора кутової швидкості $\bar{\omega}_i$ твердого тіла S_i^0 на осі рухомого базису $\bar{e}_1^i \bar{e}_2^i \bar{e}_3^i$; $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$, $A'_i = A_i + \nu c_i^2$, $\mu = \nu c_1 c_2$, $\nu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.

3. Вивід рівнянь збуреного руху в середовищі з опором двох вільних пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа.

Припустимо, що в незбуреному русі тіло S_i обертається з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_{0i}$ навколо вектора $\bar{c}_i$. Нехай $\bar{\omega}_{0i} = \omega_{0i} \bar{e}_3^i$.

Система рівнянь (1.4)–(1.5) допускає частний розв'язок

$$\begin{aligned} p_i &= q_i = 0, \quad r_i = \omega_{0i} = \frac{P_i}{D_{i3}} \\ \alpha_{11}^{i0} &= \cos \omega_{0i} t, \quad \alpha_{12}^{i0} = \sin \omega_{0i} t, \quad \alpha_{13}^{i0} = 0, \\ \alpha_{21}^{i0} &= -\sin \omega_{0i} t, \quad \alpha_{22}^{i0} = \cos \omega_{0i} t, \quad \alpha_{23}^{i0} = 0, \\ \alpha_{31}^{i0} &= 0, \quad \alpha_{32}^{i0} = 0, \quad \alpha_{33}^{i0} = 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

котрі відповідають рівномірним обертанням тіл S_i навколо осей $\bar{c}_i$.

Дослідимо стійкість рішення (2.1) в частині змінних, які визначають положення осей $\bar{s}_i$ в просторі і кутові швидкості твердих тіл. Для цього в збуреному русі покладемо $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{0i} + \bar{\Omega}_i$, де $|\bar{\Omega}_i|$ є величиною першого порядку малості в порівнянні з $|\bar{\omega}_{0i}|$.

Зберігаючи колишні позначення, запишемо рівняння збуреного руху

$$\begin{aligned} A'_i \dot{p}_i + (C_i - A'_i) \omega_{0i} q_i + s_1 a_2 [(\dot{p}_j - \omega_{0j} q_j) \alpha_{22}^{1i} - (\dot{q}_j + \omega_{0j} p_j) \alpha_{ji}^{1i}] &= \\ &= (a_i g - k) \alpha_{23}^{i0} - D_{i1} p_i - \alpha_{31}^{0i} P_i \\ A'_i \dot{q}_i - (C_i - A'_i) \omega_{0i} p_i - s_1 a_2 [(\dot{p}_j - \omega_{0j} q_j) \alpha_{ij}^{1i} - (\dot{q}_j + \omega_{0j} p_j) \alpha_{11}^{1i}] &= \\ &= (a_1 g - k) \alpha_{13}^{i0} - D_{11} q_i - \alpha_{32}^{0i} P_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$C_i \dot{r}_i = -D_{i3} r_i, \quad (2.3)$$

$$\dot{\alpha}_{13}^{i0} = \omega_{0i} \alpha_{23}^{i0} - q_i, \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = -\omega_{0i} \alpha_{13}^{i0} + p_i. \quad (2.4)$$

Тут $i, k = 1, 2, j = 3 - i$, $\alpha_{11}^{ik} = \cos \varphi_{ki}$, $\alpha_{12}^{ik} = -\sin \varphi_{ki}$, $\alpha_{21}^{ik} = \sin \varphi_{ki}$, $\alpha_{22}^{ik} = \cos \varphi_{ki}$, $\varphi_{ki} = \varphi_k - \varphi_i$, $\varphi_i = \omega_{0i} t$.

Рівняння (2.3) відокремлюється від інших рівнянь і його характеристичне рівняння має один дійсний від'ємний корінь.

Перейдемо до нових змінних $p'_i, q'_i, \alpha_{13}^i, \alpha_{23}^i$ [9]

$$\begin{aligned} p'_i &= p_i \sin \varphi_i + q_i \cos \varphi_i, \quad q'_i = p_i \cos \varphi_i - q_i \sin \varphi_i, \\ \alpha_{13}^i &= \alpha_{31}^{i0} \sin \varphi_i + \alpha_{32}^{i0} \cos \varphi_i, \quad \alpha_{23}^i = \alpha_{31}^{i0} \cos \varphi_i - \alpha_{32}^{i0} \sin \varphi_i. \end{aligned}$$

і покладемо $\Omega_i = q'_i - i p'_i$, $\gamma_i = \alpha_{13}^i + i \alpha_{23}^i$, тоді в нових змінних система рівнянь (2.2) і (2.4) запишеться так

$$A'_i \ddot{\gamma}_i + (i C_i \omega_{0i} + D_{i1}) \dot{\gamma}_i + \mu \ddot{\gamma}_j = -(k + i P_i) \gamma_i, \quad (i = 1, 2, j = 3 - i). \quad (2.5)$$

Тут і далі слід відрізняти нижній індекс $i = 1, 2$ від уявної одиниці.

Рівняння (2.5) визначаються чотирма ступенями вільності і описують рух лінійної механічної системи, що знаходиться під дією дисипативних, потенційних, гіроскопічних і циркуляційних сил.

4. Асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох вільних пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа.

Представивши шукані функції у вигляді $ae^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (2.8) у вигляді

$$\begin{vmatrix} F_1 & k - \mu\lambda^2 \\ k - \mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

або

$$\lambda^4 + (a_3 + ib_3)\lambda^3 + (\tilde{a}_2 + ib_2)\lambda^2 + (\tilde{a}_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0, \quad (3.2)$$

де

$$\begin{aligned} F_i &= A'_i \lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_{i1})\lambda + k + iP_i, \quad \tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}. \\ a_3 &= \frac{A'_1 D_{21} + A'_2 D_{11}}{a_4} > 0, \quad b_3 = \frac{A'_1 \tilde{C}_2 + A'_2 \tilde{C}_1}{a_4}, \\ \tilde{a}_2 &= \frac{D_{11} D_{21} - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + (A'_1 + A'_2 + 2\mu)k}{a_4}, \\ b_2 &= \frac{\tilde{C}_1 D_{21} + \tilde{C}_2 D_{11} + A'_1 P_2 + A'_2 P_1}{a_4}, \quad \tilde{a}_1 = \frac{(D_{11} + D_{21})k - \tilde{C}_1 P_2 - \tilde{C}_2 P_1}{a_4}, \\ b_1 &= \frac{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)k + P_1 D_{21} + P_2 D_{11}}{a_4}, \quad a_0 = -\frac{P_1 P_2}{a_4}, \quad b_0 = \frac{k(P_1 + P_2)}{a_4}, \\ a_4 &= A'_1 A'_2 - \mu^2 = A_1 A_2 + \nu(A_1 c_2^2 + A_2 c_1^2) > 0, \quad \tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Дослідження характеристичного рівняння (3.2) будемо проводити за допомогою інваріантного підходу. Згідно з критерієм Ляпунова–Шіпара [15], для існування асимптотично стійких рішень необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, складена з коефіцієнтів многочлена (3.2) була інваріантно-позитивною, тобто були позитивно визначені матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 і Δ_7 :

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 = \frac{A'_1 D_{21} + A'_2 D_{11}}{a_4} > 0, \quad (3.4)$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.5)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & b_0 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.6)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -\tilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.7)$$

Так як $a_3 > 0$ ($I_1 > 0$), то асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох гіроскопів Лагранжа, зв'язаних пружним сферичним шарніром, визначається трьома нерівностями (3.5)–(3.7).

З нерівності (3.4) випливає, що при відсутності часткової дисипації ($D_{11} = D_{21} = 0$) коефіцієнт $a_3 = 0$ і асимптотична стійкість рівномірних обертань неможлива.

Вихідна механічна система є багатопараметричною. У зв'язку з цим розглянемо ряд окремих випадків, які мають і самостійний науковий інтерес.

Вплив жорсткості шарніра на умови стійкості. Нехай $\kappa = 1/k \ll 1$. З точністю до величин першого порядку малості відносно κ випишемо нерівності (3.5)–(3.7):

$$I_{31}\kappa + I_{30} > 0, \quad I_{51}\kappa + I_{50} > 0, \quad I_{71}\kappa + I_{70} > 0. \quad (3.8)$$

Тут

$$\begin{aligned} I_{31} = & -(A'_1 A'_2 - \mu^2 \left[(\tilde{C}_1 D_{21} + A'_2 P_1)^2 + (\tilde{C}_2 D_{11} + A'_1 P_2)^2 + \right. \\ & + 2(\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 D_{11} D_{21} + A'_1 A'_2 P_1 P_2) + (\tilde{C}_1 P_2 - \tilde{C}_2 P_1)(A'_1 D_{21} - A'_2 D_{11}) \left. \right] + \\ & + (A'_1 D_{21} + A'_2 D_{11}) \left[(\tilde{C}_1^2 + D_{11}^2) A'_2 D_{21} + (\tilde{C}_2^2 + D_{21}^2) A'_1 D_{11} \right], \\ I_{30} = & (A'_1 D_{21} + A'_2 D_{11}) \left[(A'_2 + \mu)^2 D_{21} + (A'_1 + \mu)^2 D_{11} \right] > 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$I_{50} = D_1 \left[(A'_2 + \mu)^2 D_{21} + (A'_1 + \mu)^2 D_{11} \right]^2 > 0,$$

$$I_{70} = \left[(A'_2 + \mu)^2 D_{21} + (A'_1 + \mu)^2 D_{11} \right]^2 (D_1 \tilde{C} - P \tilde{a}_{21}) P,$$

$$\tilde{a}_{21} = A'_1 + A'_2 + 2\mu > 0, \quad D_1 = D_{11} + D_{21}, \quad \tilde{C} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2, \quad P = P_1 + P_2.$$

Величини I_{51} і I_{71} у зв'язку з їхньою громіздкістю не наведені.

Із (3.8)–(3.9) випливає, що при досить великій жорсткості (досить малому κ) умова стійкості визначається однією нерівністю

$$(D_1 \tilde{C} - P \tilde{a}_{21}) P > 0, \quad (3.10)$$

яке розпадається на дві нерівності і з урахуванням введених позначень має вигляд:

$$\begin{aligned} C_1 P_1 D_{23} + C_2 P_2 D_{13} & > \tilde{a}_{21} P D_{13} D_{23} / D_1 \quad (P > 0), \\ C_1 P_1 D_{23} + C_2 P_2 D_{13} & < \tilde{a}_{21} P D_{13} D_{23} / D_1 \quad (P < 0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Випадок не пружного сферичного шарніра ($k = 0$). В цьому випадку в коефіцієнтах характеристичного рівняння (3.2) треба покласти $k = 0$. Нерівність (3.4) не змінюється, а нерівності (3.5)–(3.7) незначно спрощуються (коефіцієнт $b_0 = 0$). Згідно (3.8) ці нерівності приймуть вигляд

$$I_{31} > 0, I_{51} > 0, I_{71} > 0. \quad (3.12)$$

Випадок циліндричного шарніра ($k = \infty$). У цьому випадку рівняння (3.2) запишеться так

$$\lambda^2 + (\tilde{a}_1 + ib_1)\lambda + ib_0 = 0, \quad (3.13)$$

де

$$\tilde{a}_1 = \frac{D_1}{\tilde{a}_2}, b_1 = \frac{\tilde{C}}{\tilde{a}_2}, b_0 = \frac{P}{\tilde{a}_2}, \tilde{a}_2 = \tilde{a}_{21} > 0,$$

і для існування асимптотично стійких рішень рівняння (3.13) також необхідно і достатньо, щоб були позитивно визначені матриці Δ_1 і Δ_3 :

$$I_1 = \tilde{a}_1 > 0, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -b_3 & -\tilde{a}_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 \end{vmatrix} = a_3(a_3\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1) + b_2(a_3b_3 - b_2) > 0. \quad (3.14)$$

Так як $\tilde{a}_1 > 0$ ($I_1 > 0$), то асимптотична стійкість визначається нерівністю (3.14), яка збігається з нерівністю (3.10).

Таким чином, в разі циліндричного шарніра, асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох гіроскопів Лагранжа, з урахуванням постійних моментів, визначається нерівністю (3.10).

Слід зазначити, що при $\omega_{01} = \omega_{02}$ ($P_1D_{23} = P_2D_{13}$), $C = C_1 + C_2$, $A = A_1 + A_2$, $c = c_1 + c_2$ нерівність (3.10) збігається з нерівністю роботи [14].

Випадок універсального пружного шарніра (шарніра Гука) ($k \neq 0, \omega_{01} = \omega_{02} = \omega$). В цьому випадку, поклавши в коефіцієнтах (3.3) ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega$) ($P_1D_{23} = P_2D_{13}$), отримаємо:

$$\begin{aligned} b_3 &= b_{31}\omega, b_{31} = \frac{A'_1\tilde{C}_2 + A'_2\tilde{C}_1}{a_4}, \tilde{a}_1 = \tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{12}\omega, \tilde{a}_2 = \tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{22}\omega^2, \\ \tilde{a}_{11} &= \frac{C_1P_2 + C_2P_1}{a_4}, \tilde{a}_{21} = \frac{D_{11} + D_{21}}{a_4}k, \\ \tilde{a}_{22} &= \frac{D_{11}D_{21} + (A'_1 + A'_2 + 2\mu)k}{a_4}, \tilde{a}_{22} = \frac{C_1C_2}{a_4}, b_2 = b_{21}\omega + b_{22}, \\ b_{21} &= \frac{C_1D_{21} + C_2D_{11}}{a_4}, b_{22} = \frac{A'_1P_2 + A'_2P_1}{a_4}, b_1 = b_{11}\omega + b_{12}, b_{11} = \frac{C_1 + C_2}{a_4}k \end{aligned}$$

Коефіцієнти a_0 , a_3 не змінюються, а перша нерівність $I_3 > 0$ матиме вигляд квадратної нерівності відносно ω

$$(a_3 b_{31} - b_{21}) b_{21} \omega^2 - (a_3^2 \tilde{a}_{22} - a_3 \tilde{a}_{11} - a_3 b_{22} b_{31} + 2 b_{21} b_{22}) \omega - \tilde{a}_{12} a_3 + a_3^2 \tilde{a}_{21} - b_{22}^2 > 0$$

невиконання якої веде до асимптотичної нестійкості.

5. Висновки.

Умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі з опором двох вільних гіроскопів Лагранжа, зв'язаних пружним сферичним шарніром, визначаються трьома нерівностями. Обертання кожного гіроскопа підтримується постійним моментом в інерціальній системі координат. Розглянуто випадки виродження пружного сферичного шарніра в сферичний непружний, циліндричний і універсальний пружний шарнір (шарнір Гука). Показано, що при досить великій жорсткості шарніра умови стійкості визначаються тільки однією нерівністю, яка збігається з нерівністю, отриманою для випадку циліндричного шарніра. При співпадінні кутових швидкостей власних обертань гіроскопів ця нерівність збігається з відомою умовою для одного гіроскопа.

Цитована література

1. *Reis G.F., Sundberg W.J.* Calculations of the aeroelastic bending of a sounding rocket based on flight data // AIAA Sound. – New York, 1967. – P. 402–422.
2. *Cochran J.E., Christensen D.E.* Post-launch effect of transverse bending of a spinning free-flight rocket during the guidance phase // AIAA: Atmos. Flight Mech. Conf.: Future Space Syst. N.Y., s.a., 1979. – P. 324–325.
3. *Cochran J.E., Christensen D.E.* Free-Flight rocket attitude motion due to transverse vibration // J. Spacecraft and Rockets. – 1980. – 17, № 5. – P. 425–431.
4. *Dornheim M.* New Path to Space. Aviation // Week & Space Technology. – 2005. – № 24. – P. 26–30.
5. *Леутин А.П.* Моделирование движения связанных тел // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2012. – №1. – С. 27–44.
6. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
7. *Савченко А.Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. – К.: Наук. думка, 1977. – 160 с.
8. *Светличная Н.В.* Устойчивость равномерных вращений системы двух гироскопов Лагранжа, связанных упругим сферическим шарниром // Механика твердого тела. – 1985. – Вып. 17. – С. 77–79.
9. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 166 с.
10. *Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А.* Динамика систем связанных твердых тел. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. – ИПММ НАН Украины, Том 9. – К.: Наукова Думка, 2012. – 395 с.
11. *Лещенко Д.Д.* Эволюция вращения твердого тела, близких к случаю Лагранжа // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. – 1998. – 2(6). – С. 32–37.
12. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция движения твердого тела относительно центра масс. – М. Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. – 308 с.

13. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass. – Springer International Publishing AG, 2017. – 243 p.
14. Карапетян А.В., Лагутина И.С. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1998. – №5. – С. 29–33.
15. Джурри Э. Инноры и устойчивость динамических систем. – М.: Наука, 1979. – 304 с.

References

1. Reis, G.F., Sundberg, W.J (1967). Calculations of the aeroelastic bending of a sounding rocket based on flight data. *AIAA Sound*, N.Y., 402-422.
2. Cochran, J.E., Christensen, D.E. (1979). Post-launch effect of transverse bending of a spinning free-flight rocket during the guidance phase. *AIAA: Atmos. Flight Mech. Conf.: Future Space Syst.* N.Y., 324-325.
3. Cochran J.E., Christensen D.E. (1980). Free-Flight rocket attitude motion due to transverse vibration. *J. Spacecraft and Rockets*, 17(5), 425-431.
4. Dornheim, M. (2005). New Path to Space. Aviation. *Week & Space Technology*, 24, 26-30.
5. Leutin, A.P. (2012). Modeling the Motion of Connected Bodies. *Mechanics of Solids*, 47(1), 19-33.
6. Harlamov, P.V. (1972). Ob uravneniyah dvizheniya sistemyi tverdyih tel. *Mehanika tverdogo tela*, 4, 52-73 (in Russian).
7. Savchenko, A.Ya. (1977). *Ustoychivost statsionarnykh dvizheniy mekhanicheskikh sistem*. K.: Nauk. dumka (in Russian).
8. Svetlichnaya, N.V. (1985). Ustoychivost ravnomernykh vrascheniy sistemyi dvukh giroskopov Lagranzha, svyazannykh uprugim sfericheskim sharnirom. *Mehanika tverdogo tela*, 17, 77-79 (in Russian).
9. Savchenko, A.Ya., Bolgrabskaya, I.A., Kononyihin, G.A. (1991). *Ustoychivost dvizheniya sistem svyazannykh tvyordykh tel*. K.: Nauk. dumka (in Russian).
10. Bolgrabskaya, I.A., Lesina, M.E., Chebanov, D.A. (2012). *Dinamika sistem svyazannykh tvyordykh tel. Seriya "Zadachi i metody: matematika, mehanika, kibernetika"*, V. 9. K.: Nauk. Dumka (in Russian).
11. Leschenko, D.D. (1998). Evolyutsiya vrascheniya tverdogo tela, blizkikh k sluchayu Lagranzha. *Aktualnyye problemy aviatsionnykh i aerokosmicheskikh sistem: protsessyi, modeli, eksperiment*, 2(6), 32-37 (in Russian).
12. Chernousko, F.L., Akulenko, L.D., Leschenko, D.D. (2015). *Evolutsiya dvizheniya tverdogo tela otnositelno tsentra mass*. M. Izhevsk: Izhevskiy institut kompyuternykh issledovaniy (in Russian).
13. Chernousko, F.L., Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. (2017). *Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass*. Springer International Publishing AG.
14. Karapetyan, A.V., Lagutina, I.S. (1998). O vliyaniy dissipativnogo i postoyannogo momentov na vid i ustoychivost statsionarnykh dvizheniy volchka Lagranzha. *Izv. RAN. Mehanika tvyordogo tela*, 5, 29-33 (in Russian).
15. Dzhuri, E. (1979). *Innoryi i ustoychivost dinamicheskikh sistem*. M.: Nauka (in Russian).

Yu.M. Kononov, Ya.I. Sviatenko

On the subject of influence of dissipative and permanent momentums on stability of uniform rotations of two elastically connected free gyroscopes of Lagrange.

In many works, there are studies of the asymptotic stability of rotation of a free Lagrange gyroscope in a resisting medium. This article generalizes this problem to the case of uniform rotations of two free Lagrange gyroscopes connected by an elastic restoring spherical hinge. The rotation of each gyroscope is maintained by a constant moment in an inertial coordinate system. The characteristic equation of the perturbed motion is presented in the form of an algebraic equation of the fourth degree with complex

coefficients. Based on the inner approach, conditions of asymptotic stability are obtained in the form of a system of three inequalities. The left-hand side of these inequalities is represented, respectively, in the form of determinants of the third, fifth, and seventh orders. Up to first-order values of smallness, relative to the reciprocal of the stiffness coefficient, a study is made of the effect of the joint stiffness on stability conditions. From the conditions of positivity of the highest coefficients in three inequalities, it is shown that for a sufficiently large rigidity, the stability conditions are determined by only one inequality. Cases of degeneration of an elastic spherical joint into a spherical inelastic, cylindrical, and universal elastic joint (Hooke's joint) are considered. In the case of an inelastic spherical joint, the system of three inequalities is slightly simplified. The greatest simplification arises in the case of a cylindrical hinge. In this case, the characteristic equation is represented as a quadratic equation with complex coefficients. According to the inner approach, the conditions of asymptotic stability are written in the form of a single inequality, the left side of which is presented in the form of third-order determinants. It is shown that this inequality coincides with the inequality obtained earlier for the case of a sufficiently large rigidity of the hinge. If the angular velocities of the proper rotations of the gyroscopes coincide, the inequality obtained for the cylindrical hinge coincides with the well-known inequality for one gyroscope. In the case of a universal elastic hinge (Hooke's hinge), the first inequality is represented as a square inequality with respect to the angular velocity of proper rotation.

Keywords: *dynamically symmetric rigid bodies, ball-and-socket elastic and cylindrical hinge, resisting environment, uniform rotations, asymptotic stability.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
Донецький національний університет імені Василя Стуса,
Вінниця
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
filioeee@gmail.com

Отримано 04.05.19

УДК 517.95

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-12

©2019. М.В. Краснощок

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ З ПАМ'ЯТТЮ

М. Капуто було запропоновано модифікований закон Дарсі, в якому швидкість руху рідини в пористому середовищі залежить не тільки від градієнту тиску, але також від його дробової похідної. Дане явище пов'язане з тим, що в певних середовищах проникність залежить від попередніх значень тиску в рідині. У даній роботі розглянуто відповідну задачу фільтрації з пам'яттю. Подібні задачі виникають також при моделюванні руху узагальненої рідини другого порядку. За допомогою методу Галеркіна доведено існування і єдиність узагальненого розв'язку першої початково-крайової задачі. Також вивчено задачу оптимального керування, в якій функціонал вартості має класичний вигляд і складається із суми квадратичної норми різниці між станом керованої системи і заданим елементом та регуляризуючим інтегралом Тихонова. Мета роботи полягає в тому, щоби

- (i) отримати умови існування глобального мінімуму функціонала вартості,
- (ii) отримати необхідні і достатні умови існування єдиного мінімізатора,
- (iii) скласти конструктивний алгоритм знаходження апроксимацій оптимального керування.

MSC: 49K20.

Ключові слова: оптимальне керування, похідна Капуто, простори Соболева.

Вступ. Фізична модель.

Класичний закон Дарсі має вигляд

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (1)$$

де $\vec{v}$ – швидкість фільтрації, k – коефіцієнт проникності, μ – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини, p – тиск. В роботах М. Капуто [7–9] запропоновано моделі, в яких проникність залежить від попередніх за часом значень градієнту тиску і потоку. Це явище, яке математично представлено за допомогою формалізму пам'яті, спостерігається при видобутку нафти в геотермальних районах, а також в лабораторних умовах.

Перейдемо до опису конкретної моделі [9]. Надалі, для скорочення запису, всі фізичні константи дорівнюють одиниці. Рідину вважаємо однорідною, тому рівняння стану і модифікований закон Дарсі запишемо у вигляді

$$\rho(x, t) = p(x, t), \quad \vec{v}(x, t) = -\nabla p(x, t) - D_t^\sigma \nabla p(x, t),$$

де ρ – густина рідини і

$$D_t^\sigma p(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^t \frac{p_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\sigma} d\tau \quad (2)$$

похідна Капуто порядку $\sigma \in (0, 1)$. Позначимо через $q(x, t)$ масову швидкість перетікання рідини в одиниці об'єму породи. З урахуванням рівняння нерозривності

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = q \quad (3)$$

дістаємо лінеарізовану модель

$$p_t(x, t) - \operatorname{div}(\nabla p(x, t)) - \operatorname{div}(D_t^\sigma \nabla p(x, t)) = q(x, t). \quad (4)$$

З цього приводу, див. також роботу [11] і монографію [2, розділ 1, §4].

Із загальними положеннями теорії диференціальних і інтегральних рівнянь дробового порядку можна ознайомитися за монографіями [10, 13]. Питання розв'язності крайових задач для рівнянь дробового порядку з частинними похідними вивчалася різними методами в роботах [1, 3–5, 17, 25]. Задачі оптимального керування для таких рівнянь були предметом досліджень у публікаціях [12, 14, 18, 26]. Загальну теорію оптимального керування системами викладено, наприклад, в монографіях [6, 22].

Структура статті така. У першому розділі сформульовано задачу оптимального керування. Другий розділ містить вихідні положення теорії рівнянь з похідними дробового порядку і основний результат даної роботи – Теорему 1. У третьому розділі доведено існування узагальненого розв'язку задачі (P_u) . Четвертий і п'ятий розділи присвячено доведенню Теорема 1 – існування розв'язку та обґрунтування умови оптимальності відповідно. У шостому розділі показано, що до задачі, що досліджується, може бути застосовано результати робіт [23, 24], де для розв'язання задачі оптимального керування було запропоновано використати метод спряжених градієнтів і отримано деякі результати стосовно його збіжності.

1. Формулювання задачі.

Нехай $Q \subseteq \mathbb{R}^N$, $(N \geq 1)$ – обмежена область з регулярною межею S . Позначимо $Q_T = Q \times (0, T)$, $S_T = S \times (0, T)$.

Основним об'єктом даної роботи виступає задача оптимального керування для рівняння (див. (3), (4))

$$y_t(x, t) - \operatorname{div}(\nabla y(x, t)) - \operatorname{div}(D_t^\sigma \nabla y(x, t)) = u(x, t), \quad (5)$$

за умов

$$y(x, 0) = \phi(x), \quad x \in Q, \quad (6)$$

$$y(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T. \quad (7)$$

У подальшому будемо називати задачу (5)–(7) задачею (P_u) .

Введемо функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_Q |y_u(x, t) - z_d(x)|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \iint_{Q_T} |u(x, t)|^2 dt dx, \quad (8)$$

де $z_d \in L_2(Q)$ і $\alpha > 0$ є заданими, а y_u – узагальнений розв'язок задачі (P_u) (див. пункт 2, Означення 1).

Розглянемо задачу: знайти керування $v \in L_2(Q_T)$ таке, що

$$J(v) = \inf_{u \in L_2(Q_T)} J(u). \quad (9)$$

2. Основні позначення та факти.

Позначимо через

$$(u \cdot v) = \int_Q u(x)v(x) dx, \quad (u \cdot v)_T = \iint_{Q_T} u(x,t)v(x,t) dt dx,$$

скалярні добутку у просторах $L_2(Q)$ і $L_2(Q_T)$ відповідно, а згортку за часовою змінною через

$$(u * v)(t) = \int_0^t u(t-s)v(s) ds.$$

Для будь-якого $t > 0$ позначимо

$$\omega_\beta(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad \beta > 0, \quad (10)$$

тоді означення похідної Капуто (2) набуває вигляду

$$D_t^\sigma p(t) = (\omega_{1-\sigma} * p_t)(t). \quad (11)$$

Лема 1. Для довільної абсолютно неперервної функції $\rho(t)$ маємо

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \omega_\beta(\tau-s)\rho_s(s) ds = \int_0^t \omega_\beta(\tau-s)\rho(s) ds - \rho(0)\omega_{1+\beta}(t), \quad (12)$$

$$\rho(t)D_t^\sigma \rho(t) \geq \frac{1}{2}D_t^\sigma \rho^2(t), \quad (13)$$

$$(\omega_\sigma * D_t^\sigma \rho)(t) = \rho(t) - \rho(0). \quad (14)$$

Доведення. Дійсно

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \int_0^\tau \omega_\beta(\tau-s)\rho_s(s) ds &= \int_0^t \rho_s(s) ds \int_s^t \omega_\beta(\tau-s) d\tau = \\ &= \int_0^t \rho_s(s)\omega_{1+\beta}(t-s) ds = -\rho(0)\omega_{1+\beta}(t) + \int_0^t \omega_\beta(t-s)\rho(s) ds. \end{aligned}$$

Таким чином, має місце тотожність (12). Нерівність (13) доведено в роботі [1]. Властивість (14) є результатом теореми 3.8 монографії [10]. $\square$

Також нам знадобиться нерівність

$$\int_0^t (\omega_{1-\beta} * u)(\tau)u(\tau) d\tau \geq 0, \quad \beta \in (0,1), \quad (15)$$

справедлива для довільної функції $u \in L_2(0, T)$ і будь-якого $t > 0$ (див. [13, твердження 16.3.1]).

Введемо ліву і праву похідні Рімана-Ліувелля порядку $\sigma \in (0, 1)$ (див. [15, формули (2.1.8), (2.1.9)])

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^\sigma w(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{w(x, \tau)}{(t-\tau)^\sigma} d\tau, \\ {}_T\mathcal{D}_t^\sigma w(x, t) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \frac{w(x, \tau)}{(\tau-t)^\sigma} d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Зазначимо, що заміна змінної $t \rightarrow T-s$ переводить праву похідну Рімана-Ліувелля в ліву, тобто для довільних $w, \bar{w}$ таких, що $\bar{w}(x, s) = w(x, T-s)$, $s \in (0, T)$ маємо

$$\begin{aligned} {}_T\mathcal{D}_t^\sigma w(x, t) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{T-t} \frac{w(x, T-\rho)}{(T-t-\rho)^\sigma} d\rho \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^s \frac{\bar{w}(x, \rho)}{(s-\rho)^\sigma} d\rho = \mathcal{D}_s^\sigma \bar{w}(x, s). \end{aligned} \quad (17)$$

Для достатньо регулярних функцій $w(x, t)$, $\hat{w}(x, t)$ за допомогою інтегрування частинами отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{D}_t^\sigma w(x, t) \hat{w}(x, t) dt &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^T w_s(x, s) \int_s^T \frac{\hat{w}(x, t)}{(t-s)^\sigma} dt ds \\ &= \left\{ \frac{w(x, s)}{\Gamma(1-\sigma)} \int_s^T \frac{\hat{w}(x, t)}{(t-s)^\sigma} dt \right\} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{w(x, t)}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial s} \int_s^T \frac{\hat{w}(x, t)}{(t-s)^\sigma} dt ds, \end{aligned}$$

отже

$$\int_0^T \mathcal{D}_t^\sigma w(x, t) \hat{w}(x, t) dt = \int_0^T w(x, t) {}_T\mathcal{D}_t^\sigma \hat{w}(x, t) dt, \text{ якщо } w(x, 0) = 0. \quad (18)$$

Через

$$\|v\| = \left(\int_Q v^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_T = \left(\iint_{Q_T} v^2(x, t) dt dx \right)^{1/2}$$

позначимо норми в $L_2(Q)$ і $L_2(Q_T)$ відповідно. Також, для скорочення запису, використовуємо наступні позначення

$$\|v\|_1 = \left(\sum_{i=1}^n \int_Q |v_{x_i}(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_{1,T} = \left(\sum_{i=1}^n \iint_{Q_T} |v_{x_i}(x, t)|^2 dt dx \right)^{1/2}.$$

Введемо гільбертови простори Соболева $H^k(Q)$, ($k = 1, 2$) функцій, які мають слабкі похідні порядку k з $L_2(Q)$ (див. [20, розділ I]). Замикання множини $C_0^\infty(\bar{Q})$ за нормою простору $H^1(Q)$

$$\|p\|_{H^1(Q)} = (\|p\|^2 + \|p\|_1^2)^{1/2}$$

позначимо через $H_0^1(Q)$. Зазначимо, що, внаслідок нерівності Пуанкаре, як норму у просторі $H_0^1(Q)$ можна взяти $\|\cdot\|_1$. Крім того, нам знадобиться простір

$$W^\sigma(0, T) = \{p \in L_\infty(0, T; H_0^1(Q)) : p_t \in L_2(Q_T), D_t^\sigma p \in L_2(0, T; H_0^1(Q))\},$$

з нормою

$$\|p\|_{W^\sigma(0, T)} = \sup_{t \in (0, T)} \|p(\cdot, t)\|_1 + \|p_t\|_T + \|D_t^\sigma p\|_{1, T}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Зазначимо, що $W^\sigma(0, T) \subseteq C([0, T]; L_2(Q))$ (див., наприклад, [20, лема 7.3]) і

$$\|y\|_{C([0, T]; L_2(Q))} \leq C\|y\|_{1, T}. \quad (19)$$

ОЗНАЧЕННЯ 1. Будемо називати функцію $y \in W^\sigma(0, T)$ узагальненим розв'язком задачі (P_u) , якщо для довільної функції $\bar{y} \in L_2(0, T; H_0^1(Q))$ виконується варіаційне рівняння

$$(y_t \cdot \bar{y})_T + (\nabla y \cdot \nabla \bar{y})_T + ((D_t^\sigma \nabla y) \cdot \nabla \bar{y})_T = (u \cdot \bar{y})_T$$

і відповідна початкова умова $y(x, 0) = \phi(x)$.

Для того, щоб сформулювати необхідну умову оптимальності основної задачі (9) розглянемо “спряжену задачу” до (P_u)

$$\begin{aligned} p_t(x, t) + \operatorname{div}(\nabla p(x, t)) + \operatorname{div}({}_T \mathcal{D}_t^\sigma \nabla p(x, t)) &= 0, \quad (x, t) \in Q_T, \\ p(x, T) &= y(x, T) - z_d(x), \quad x \in Q, \quad p(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (20)$$

Введемо простори

$$\begin{aligned} V(0, T) &= C([0, T]; L_2(Q)) \cap C([0, T]; H^2(Q) \cap H_0^1(Q) \cap L_2(0, T; H^1(Q))), \\ W^\sigma(0, T) &= \{\bar{p} \in L_2(0, T; H_0^1(Q)) : \bar{p}_t \in L_2(Q_T), D_t^\sigma \bar{p} \in L_2(0, T; H_0^1(Q)), \bar{p}(x, 0) = 0\}. \end{aligned}$$

ОЗНАЧЕННЯ 2. Будемо називати функцію $p(x, t) \in V(0, T)$ узагальненим розв'язком задачі (20), якщо $p \in V(0, T)$, і для всіх $\bar{p} \in W^\sigma(0, T)$ виконується варіаційна рівність

$$((y(\cdot, T) - z_d) \cdot \bar{p}(\cdot, T)) - (p \cdot \bar{p}_t)_T - (\nabla \cdot \nabla \bar{p})_T + (\nabla p \cdot D_t^\sigma \nabla \bar{p})_T = 0. \quad (21)$$

Враховуючі (17), до задачі (20) можна застосувати результати робіт [4, 5], де розглядалася задача

$$\begin{aligned} p_t(x, t) - \operatorname{div}(\nabla p(x, t)) - \operatorname{div}(\mathcal{D}_t^\sigma \nabla p(x, t)) &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \\ p(x, 0) &= \psi(x), \quad x \in Q, \quad p(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (22)$$

Зокрема, теорему існування та єдиності розв'язку задачі (20), в сенсі Означення 2 див. [5, Теорема 2.1]. Зазначимо, що при $\psi = 0$, $f \in L_2(Q_T)$ розв'язок задачі (22) є більш гладким у порівнянні з випадком $\psi \neq 0$, $f = 0$, а саме (див. [4, §5])

$$\|p_t\|_T + \|\Delta p\|_T + \|\mathcal{D}_t^\sigma \Delta p\|_T \leq C\|f\|_T.$$

Основний результат даної роботи міститься в наступній теоремі.

Теорема 1. *Задача (9) має єдиний розв'язок – оптимальне керування v , яке характеризується наступним чином*

$$v(x, t) = -\frac{1}{\alpha} p(x, t), \quad (x, t) \in Q_T,$$

де p – узагальнений розв'язок спряженої задачі (20).

3. Ров'язність задачі (P_u) .

Теорема 2. *Нехай $u \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in H_0^1(Q)$. Тоді задача (P_u) має єдиний узагальнений розв'язок. До того ж справедлива оцінка*

$$\|y\|_{W^\sigma(0,T)} \leq C(\|\varphi\|_1 + \|u\|_T). \quad (23)$$

Доведення. Нехай $\{\lambda_k, w_k\}_{k=1}^\infty$ система власних значень і функцій оператора Лапласа

$$\begin{aligned} -\Delta w_k &= \lambda_k w_k, \quad x \in Q, \\ w_k(x) &= 0, \quad x \in S, \end{aligned} \quad (24)$$

причому

- i) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \rightarrow \infty$, якщо $k \rightarrow \infty$;
- ii) $w_k \in H^2(Q) \cap H_0^1(Q)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$;
- iii) послідовність $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ утворює ортонормований базис в $L_2(Q)$.

Зазначимо також, що

$$\begin{aligned} (\nabla w_k \cdot \nabla w_l) &= -(w_k \cdot \Delta w_l) = \lambda_l (w_k \cdot w_l) = \lambda_l \delta_{kl}, \\ (\Delta w_k \cdot \Delta w_l) &= \lambda_k \lambda_l (w_k \cdot w_l) = \lambda_k \lambda_l \delta_{kl}, \end{aligned} \quad (25)$$

де δ_{kl} – символ Кронекера, і, як наслідок,

$$\lambda_k \int_Q w_k^2(x) dx = \int_Q |\nabla w_k|^2 dx = \|w_k\|_1, \quad \lambda_k^2 \int_Q w_k^2(x) dx = \int_Q |\Delta w_k|^2 dx. \quad (26)$$

Шукаємо розв'язок задачі (P_u) у вигляді

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (y(\cdot, t), w_k) w_k(x).$$

Позначимо $y_k(t) = (y(\cdot, t), w_k)$, $u_k(t) = (u(\cdot, t), w_k)$, $\phi_k = (\phi, w_k)$. Із (25), (26) бачимо, зокрема, що

$$\|y(\cdot, t)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y_k^2(t). \quad (27)$$

Для невідомих $\{y_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ одержимо систему

$$y'_k(t) + \lambda_k y_k(t) + \lambda_k D_t^\sigma y_k(t) = u_k(t), \quad y_k(0) = \phi_k. \quad (28)$$

Із загальної теорії (див, наприклад, [20, теорема 1.44]) випливає існування абсолютно неперервного розв'язку задачі (28) в малому за часом. Рівняння такого вигляду досліджувалося, наприклад, в роботах [3, 17]. В [3], за допомогою перетворення Лапласа в [3] було побудовано відповідні функції Гріна та досліджено їх властивості. Зокрема було доведено, що вони є абсолютно монотонними функціями.

Помножимо кожне рівняння (28) відповідно на $y_k(t)$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} y_k^2(t) + \lambda_k y_k^2(t) + \lambda_k D_t^\sigma y_k(t) \cdot y_k(t) = u_k(t) y_k(t), \quad (29)$$

далі використаємо (13) і проінтегруємо за змінною t , тоді

$$\frac{y_k^2(\tau)}{2} + \lambda_k \int_0^\tau y_k^2(t) dt + \frac{\lambda_k}{2} \int_0^\tau D_t^\sigma (y_k^2(t)) dt \leq \frac{\phi_k^2}{2} + \int_0^\tau u_k(t) y_k(t) dt. \quad (30)$$

Враховуючі (11), у третьому доданку в лівій частині (30) можна використати рівність (12). Отже

$$\begin{aligned} \frac{y_k^2(\tau)}{2} + \lambda_k \int_0^\tau y_k^2(t) dt + \frac{\lambda_k}{2} \int_0^\tau \omega_{1-\sigma}(\tau - t) y_k^2(t) dt \\ \leq \frac{\phi_k^2}{2} + \frac{\lambda_k}{2} \phi_k^2 + \int_0^\tau u_k(t) y_k(t) dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Далі ми помножимо (30) на $w_k^2(x)$. Інтегрування за змінною x та додавання за індексом k приводять до нерівності

$$\|y(\cdot, \tau)\|^2 + c_1 \|y\|_{1,\tau}^2 + c_2 (\omega_{1-\sigma} * \|y\|_1^2)(\tau) \leq \|\phi\|^2 + c_3 \|\phi\|_1^2 + c_4 \|u\|_\tau^2. \quad (32)$$

Якщо (28) помножити на $y'_k(t)$, тоді, із урахуванням (15), (11), одержимо

$$|y'_k(t)|^2 + \frac{\lambda_k}{2} \frac{d}{dt} [y_k(t)]^2 \leq |u_k(t)| |y_k(t)|.$$

Знову помножимо на $w_k^2(x)$, проінтегруємо за змінними t, x . У підсумку маємо

$$\|y_t\|_\tau^2 + c_5 \|y(\cdot, \tau)\|_1^2 \leq c_6 \|\phi\|_1^2 + c_7 \|u\|_\tau^2. \quad (33)$$

На наступному кроці одержимо оцінку $\|D_t^\sigma \nabla y\|_\tau$. Із цією метою помножимо (28) на $D_t^\sigma y_k$, і, за допомогою (13), одержимо

$$D_t^\sigma (y_k^2)(t) + \lambda_k D_t^\sigma (y_k^2)(t) + 2\lambda_k |D_t^\sigma (y_k)(t)|^2 \leq 2|u_k(t)| |D_t^\sigma (y_k)(t)|.$$

Помножимо обидві частини цієї нерівності на $\omega_\sigma(\tau - t)$. Зазначимо, що

$$\omega_\sigma(\tau - t) \geq \eta_* \equiv \frac{T^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \text{ при } 0 < t < \tau \leq T. \quad (34)$$

На підставі (34) і нерівності Коші–Буняковського, бачимо, що

$$\begin{aligned} \omega_\sigma(\tau - t) D_t^\sigma(y_k^2)(t) + \lambda_k \omega_\sigma(\tau - t) D_t^\sigma(y_k^2)(t) + 2\lambda_k \eta_* |D_t^\sigma(y_k)(t)|^2 \\ \leq \frac{1}{\varepsilon \lambda_k} |\omega_\sigma(\tau - t) u_k(t)|^2 + \varepsilon \lambda_k |D_t^\sigma(y_k)(t)|. \end{aligned}$$

Нехай $\varepsilon = \eta_*$. Після інтегрування одержаної нерівності за змінною t із застосуванням співвідношення (14) до лівої частини і теореми Янга до першого доданку в правій частині, маємо

$$\begin{aligned} y_k^2(\tau) + \lambda_k y_k^2(\tau) + \lambda_k \eta_* \int_0^\tau |D_t^\sigma(y_k)(t)|^2 dt \\ \leq y_k^2(0) + \lambda_k y_k^2(0) + c_8 \int_0^\tau \omega_\sigma(t) dt \int_0^\tau |u_k(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Повторюючи наведені вище міркування, маємо

$$\|y(\cdot, \tau)\|^2 + \|y(\cdot, \tau)\|_1^2 + \eta_* \|D_t^\sigma \nabla y\|_\tau^2 \leq \|\phi\|^2 + \|\phi\|_1^2 + c_9 \|u\|_\tau^2. \quad (35)$$

З оцінок (32), (33), (35) випливає

$$\sup_{t \in (0, T)} \|y(\cdot, t)\| + \sup_{t \in (0, T)} \|y(\cdot, t)\|_1 + \|y_t\|_T + \|D_t^\sigma \nabla y\|_T \leq C (\|\phi\| + \|\phi\|_1 + \|u\|_T). \quad (36)$$

Єдиність розв'язку задачі (P_u) можна встановити за допомогою нерівності (13). $\square$

4. Існування розв'язку задачі оптимального керування.

З теореми 1.2 розділу 3 та леми 2.2 розділу 4 монографії [6] випливає, що для доведення Теореми необхідно переконатися у правильності таких тверджень

- 1) якщо $\|u\|_T \rightarrow \infty$, тоді $J(u) \rightarrow +\infty$;
- 2) функціонал $J(u)$ є строго опуклим;
- 3) функціонал $J(u)$ є слабо напівперервним знизу.

Властивість 1) випливає безпосередньо з вигляду функціоналу $J(u)$.

Для того, щоб переконатися у правильності 2), достатньо помітити, що для довільних $\gamma \in (0, 1)$, $u_1, u_2 \in L_2(Q_T)$, для відповідних розв'язків задач $(P)_{u_1}, (P)_{u_2}, (P)_{\gamma u_1 + (1-\gamma)u_2}$, маємо $y_{\gamma u_1 + (1-\gamma)u_2} = \gamma y_{u_1} + (1-\gamma)y_{u_2}$, а потім скористатися строгою опуклістю квадратичної функції.

Остання властивість 3) є наслідком неперервності і опуклості функціонала J (див. теорему 2.12 монографії [22]).

5. Умова оптимальності першого порядку.

Спочатку виконаємо деякі формальні обчислення. Нехай $u, \bar{u} \in L_2(Q_T)$. Позначимо

$$w_u \langle \bar{u} \rangle (x, t) = \frac{1}{\lambda} (y_{u+\lambda \bar{u}}(x, t) - y_u(x, t)), \quad \lambda \neq 0.$$

Функція $w_u\langle\bar{u}\rangle$ є, очевидно, розв'язком задачі

$$\begin{aligned} w_t(x, t) - \operatorname{div}(\nabla w(x, t)) - \operatorname{div}(D_t^\sigma \nabla w(x, t)) &= \bar{u}(x, t), \\ w(x, 0) &= 0, \quad x \in Q, \quad w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (37)$$

Для відповідних значень функціоналу J маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}(J(u + \lambda\bar{u}) - J(u)) &= \int_Q w_u\langle\bar{u}\rangle \left(\frac{y_{u+\lambda\bar{u}}(x, T) + y_u(x, T)}{2} - z_d(x) \right) dx \\ &+ \alpha \iint_{Q_T} \left(u(x, t) + \frac{\lambda}{2}\bar{u}(x, t) \right) \bar{u}(x, t) dt dx. \end{aligned} \quad (38)$$

Позначимо через $\delta J_u\langle\bar{u}\rangle$ похідну Гато функціоналу J в точці u в напрямку $\bar{u}$. Внаслідок оцінок (19), (36) фінальне значення $y_u(x, T)$ розв'язку задачі (P_u) неперервно в $L_2(Q)$ залежить від $u \in L_2(Q_T)$, тому

$$\delta J_u\langle\bar{u}\rangle = \int_Q w_u\langle\bar{u}\rangle(x, T)(y_u(x, T) - z_d(x)) dx + \alpha \iint_{Q_T} u(x, t)\bar{u}(x, t) dt dx. \quad (39)$$

Якщо $v \in L_2(Q_T)$ є точкою мінімуму функціоналу J , тоді для довільних функцій $\bar{u} \in L_2(Q_T)$ і $\lambda > 0$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\lambda}(J(v + \lambda\bar{u}) - J(v)) \geq 0.$$

При $\lambda \rightarrow 0$ бачимо, що $\delta J_v\langle\bar{u}\rangle \geq 0$, і, так само, $\delta J_v\langle-\bar{u}\rangle \geq 0$, тобто якщо v є мінімайзером J , тоді для всіх $\bar{u} \in L_2(Q_T)$ маємо $\delta J_v\langle\bar{u}\rangle = 0$. З урахуванням (39), остання умова набуває вигляду

$$\delta J_v\langle\bar{u}\rangle = \int_Q w_v\langle\bar{u}\rangle(x, T)(y_v(x, T) - z_d(x)) dx + \alpha \iint_{Q_T} v(x, t)\bar{u}(x, t) dt dx = 0. \quad (40)$$

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Зазначимо, що необхідна умова оптимальності (40) є і достатньою, внаслідок опуклості функціоналу J . Дійсно, для довільних $v, \bar{v} \in L_2(Q_T)$, $\lambda \in (0, 1)$ маємо

$$\begin{aligned} J((1 - \lambda)v + \lambda\bar{v}) &\leq (1 - \lambda)J(v) + \lambda J(\bar{v}), \\ \frac{1}{\lambda}(J(v + \lambda(\bar{v} - v)) - J(v)) &\leq J(\bar{v}) - J(v). \end{aligned} \quad (41)$$

Отже, якщо $\delta_v J\langle\bar{u}\rangle = 0$ для всіх $\bar{u} \in L_2(Q_T)$, тоді, очевидно, $\delta_v J\langle\bar{v} - v\rangle = 0$ для всіх $\bar{v} \in L_2(Q_T)$. При $\lambda \rightarrow 0$ в нерівності (41) маємо $J(\bar{v}) - J(v) \geq 0 = \delta_v J\langle\bar{v} - v\rangle$. Таким чином, функція v , яка задовольняє необхідну умову оптимальності, є точкою мінімуму функціоналу J .

Для довільного $p \in L_2(0, T; H_0^1(Q))$ одержимо

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \bar{u}(x, t) p(x, t) dt dx &= \iint_{Q_T} \frac{\partial w_v \langle \bar{u} \rangle}{\partial t}(x, t) p(x, t) dx dt \\ &+ \iint_{Q_T} (\nabla w_v \langle \bar{u} \rangle(x, t) \cdot \nabla p(x, t) + (D_t^\sigma \nabla w_v \langle \bar{u} \rangle(x, t)) \cdot \nabla p(x, t)) dt dx. \end{aligned}$$

Якщо p є розв'язком задачі (20), тоді

$$\iint_{Q_T} \bar{u}(x, t) p(x, t) dt dx = \int_Q w_u \langle \bar{u} \rangle(x, T) (y_u(x, T) - z_d(x)) dx. \quad (42)$$

Отже з (39), (42) випливає, що для всіх $\bar{u} \in L_2(Q_T)$

$$\iint_{Q_T} (p(x, t) + \alpha v(x, t)) \bar{u}(x, t) dt dx = 0. \quad (43)$$

Це означає, що

$$v(x, t) = -\frac{1}{\alpha} p(x, t) \text{ майже всюди в } Q_T. \quad (44)$$

Підсумовуючи наведені вище міркування, робимо висновок, що для того, щоб функція $v \in L_2(Q_T)$ була розв'язком задачі оптимального керування необхідно і достатньо виконання (44) та наступних умов

$$(y_t \cdot \bar{y})_T + (\nabla y \cdot \nabla \bar{y})_T + ((D_t^\sigma \nabla y) \cdot \nabla \bar{y})_T = -\frac{1}{\alpha} (p \cdot \bar{y})_T, \quad y(x, 0) = \phi(x), \quad (45)$$

$$((y(\cdot, T) - z_d) \cdot \bar{p}(\cdot, T)) - (p \cdot \bar{p}_t)_T - (\nabla p \cdot \nabla \bar{p})_T + (\nabla p \cdot D_t^\sigma \nabla \bar{p})_T = 0, \quad (46)$$

де $\bar{y} \in L_2(0, T; H_0^1(Q))$, $\bar{p} \in \mathcal{W}^\sigma(0, T)$.

6. Метод спряжених градієнтів.

Надалі використовуємо методи роботи [23].

По-перше, для довільного $\hat{h} \in L_2(Q)$ розглянемо допоміжну систему

$$(\hat{y}_t \cdot \bar{y})_T + (\nabla \hat{y} \cdot \nabla \bar{y})_T + ((D_t^\sigma \nabla \hat{y}) \cdot \nabla \bar{y})_T = \frac{1}{\alpha} (\hat{p} \cdot \bar{y})_T, \quad \hat{y}(x, 0) = 0, \quad (47)$$

$$(\hat{h} \cdot \bar{p}(\cdot, T)) - (\hat{p} \cdot \bar{p}_t)_T - (\nabla \hat{p} \cdot \nabla \bar{p})_T + (\nabla \hat{p} \cdot D_t^\sigma \nabla \bar{p})_T = 0, \quad (48)$$

де $\bar{y} \in L_2(0, T; H_0^1(Q))$, $\bar{p} \in \mathcal{W}^\sigma(0, T)$.

З Теорем 1, 2 випливає, що (47) має єдиний розв'язок $\hat{y} \in W^\sigma(0, T)$, $\hat{p} \in V(0, T)$. Таким чином, визначено оператор $R : h \rightarrow \hat{y}(\cdot, T)$, що неперервно діє з $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$. Треба довести, що $\hat{y} \in C([0, T]; H_0^1(Q))$.

Лема 2. Нехай $q \in L_2(0, T; H^1(Q))$ і r – узагальнений розв'язок задачі

$$\begin{aligned} r_t(x, t) - \operatorname{div}(\nabla r(x, t)) - \operatorname{div}(D^\sigma \nabla r(x, t)) &= q(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \\ r(x, 0) &= 0, \quad x \in Q, \quad r(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_T, \end{aligned} \quad (49)$$

тоді $r \in C((0, T]; H^1(Q))$.

Доведення. Знову шукаємо розв'язок r у вигляді $r(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)w_k(x)$. Для знаходження r_k отримаємо систему

$$r'_k(t) + \lambda_k r_k(t) + \lambda_k D_t^\sigma r_k(t) = q_k(t), \quad r_k(0) = 0.$$

За допомогою перетворення Лапласу

$$\tilde{r}_k(s) = \int_0^\infty \exp(-st) r_k(t) dt$$

спочатку виводимо, що

$$\tilde{r}_k(s) = \tilde{U}_k(s) \tilde{q}_k(s), \quad \tilde{U}_k(s) = \frac{1}{s + \lambda_k + \lambda_k s^\sigma},$$

а потім

$$r_k(t) = (U_k * q_k)(t). \quad (50)$$

Властивості функцій U_k досліджувалися в роботі [5] (див. Теорему 2.2 вказаної роботи), де доведено, що справедливі наступні оцінки

$$0 < U_k(t) \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (51)$$

і тому

$$\lambda_k |r_k^2(t)| \leq \lambda_k \int_0^t U_k^2(\tau) d\tau \int_0^t q_k^2(\tau) d\tau \leq T \int_0^t \lambda_k q_k^2(\tau) d\tau. \quad (52)$$

Очевидно, що $r_k(t)w_k(x) \in C([0, T]; H_0^1(Q))$ для всіх натуральних k . З оцінки (52) бачимо, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)w_k(x)$ збігається в $H_0^1(Q)$ рівномірно по t на відрізку $[0, T]$, якщо $q \in L_2(0, T; H^1(Q))$. З теореми про неперервність ряду, що рівномірно збігається, випливає, що $r \in C([0, T]; H_0^1(Q))$. Лему доведено. $\square$

Більше того, оператор R є позитивним і самоспряженим, тобто

$$(R\hat{h} \cdot h') = (Rh' \cdot \hat{h}) \text{ для довільних } h', \hat{h} \in L_2(Q), \quad (53)$$

$$(R\hat{h} \cdot \hat{h}) \geq 0 \text{ для всіх } \hat{h} \in L_2(Q). \quad (54)$$

Насправді, нехай $h', \hat{h}$ відповідають розв'язки системи (47) позначені через (u', p') та $(\hat{u}, \hat{p})$, тоді

$$\begin{aligned} (\hat{y}_t \cdot p')_T + (\nabla \hat{y} \cdot \nabla p')_T + ((D_t^\sigma \nabla \hat{y}) \cdot \nabla p')_T &= \frac{1}{\alpha} (\hat{p} \cdot p')_T, \\ (h' \cdot \hat{y}(\cdot, T)) - (p' \cdot \hat{y}_t)_T - (\nabla p' \cdot \nabla \hat{y})_T - (\nabla p' \cdot D_t^\sigma \nabla \hat{y})_T &= 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Якщо до першого рівняння додати друге, отримаємо

$$(h' \cdot \hat{y}(\cdot, T)) = \frac{1}{\alpha} (\hat{p} \cdot p')_T, \text{ де за означенням } \hat{y}(\cdot, T) = R\hat{h}. \quad (56)$$

За аналогією маємо

$$(\hat{h} \cdot y'(\cdot, T)) = \frac{1}{\alpha}(\hat{p} \cdot p')_T, \text{ де за означенням } y'(\cdot, T) = Rh'. \quad (57)$$

Властивості (53), (54) впливають безпосередньо з (56), (57).

На другому кроці ми переформулюємо співвідношення (45) в термінах оператора R .

Нехай пара функцій (y, p) є розв'язком системи. Позначимо $h^* = p(\cdot, T)$. Представимо y у вигляді $y(x, t) = \eta(x, t) - y^*(x, t)$, де функція η знаходиться із розв'язання наступної задачі наступних задач

$$(\eta_t \cdot \bar{y})_T + (\nabla \eta \cdot \nabla \bar{y})_T + ((D_t^\sigma \nabla y) \cdot \nabla \bar{y})_T = 0, \quad \eta(x, 0) = \phi(x),$$

а для знаходження y^* розглядається система типу (47)

$$(y_t^* \cdot \bar{y})_T + (\nabla y^* \cdot \nabla \bar{y})_T + ((D_t^\sigma \nabla y^*) \cdot \nabla \bar{y})_T = \frac{1}{\alpha}(p^* \cdot \bar{y})_T, \quad y^*(x, 0) = 0, \quad (58)$$

$$(h^* \cdot \bar{p}(\cdot, T)) - (p^* \cdot \bar{p}_t)_T - (\nabla p^* \cdot \nabla \bar{p})_T + (\nabla p^* \cdot D_t^\sigma \nabla \bar{p})_T = 0, \quad (59)$$

де $\bar{y} \in L_2(0, T; H_0^1(Q))$, $\bar{p} \in W^\sigma(0, T)$. З отриманих співвідношень бачимо, що з одного боку

$$u(x, T) - z_d(x) = p(x, T) \equiv h^*(x)$$

і з іншого

$$u(x, T) = \eta(x, T) - u^*(x, T) \equiv \eta(x, T) - Rh^*(x).$$

Таким чином

$$h^*(x) + z_d(x) = \eta(x, T) - Rh^*(x). \quad (60)$$

Якщо ж позначити $f(x) = \eta(x, T) - z_d(x)$, тоді (60) (а значить і систему (47)) можна записати у вигляді операторного рівняння

$$(I + R)h^* = f. \quad (61)$$

Наслідуючи роботу [23], використаємо метод спряжених градієнтів до рівняння (61). Позначимо

$$\begin{aligned} e_n &= h^* - h_n, \quad r_n = (I + R)e_n = f - (I + R)h_n, \\ h_{n+1} &= h_n + \alpha_n s_n, \quad \alpha_n = \|h_n\|^2 / (h_n, (I + R)s_n), \\ s_{n+1} &= r_{n+1} + \beta_n s_n, \quad s_0 = r_0, \quad \beta_n = \|r_{n+1}\|^2 / \|r_n\|^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Безпосередньо з Теорема 4.1 роботи [23] впливає (суперлінійна) оцінка збіжності ітераційного процесу (62):

$$\|e_n\| \leq (c_n)^n \|e_0\|, \quad (63)$$

де послідовність $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Цитована література

1. *Alikhanov A.A.* A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations // *Differential Equations*. – 2010. – V. 46. – P. 660–666.
2. *Баренблатт Г.И., Енттов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
3. *Bazhlekova E.* Properties of the fundamental and impulse-response solutions of multi-term fractional differential equations // *Complex Analysis and Applications'13 (Proc. Intern. Conf., Sofia, 2013)*. – Bulg. Acad. Sci., Sofia, 2013.
4. *Bazhlekova E.* Subordination principle for a class of fractional order differential equations // *Mathematics*. – 2015. – V. 2. – P. 412–427.
5. *Bazhlekova E., Jin B., Lazarov R., Zhou Z.* An analysis of the Rayleigh–Stokes problem for a generalized second-grade fluid // *Numer. Math.* – 2015. – V. 131, № 1. – P. 1–31.
6. *Cea J.* Lectures on optimization—theory and algorithms. – Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978. – 236 p.
7. *Caputo M.* Models of flux in porous media with memory // *Water Resour. Res.* – 2000. – V. 36. – P. 693–705.
8. *Caputo M., Plastino W.* Diffusion in porous layers with memory // *Geophys J. Int.* – 2004. – V. 158. – P. 385–396.
9. *Iaffaldano G., Caputo M., and Martino S.* Experimental and theoretical memory diffusion of water in sand // *Hydrol. Earth Sys. Sci. Discuss.* – 2005. – V. 2. – P. 1329–1357.
10. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations. – Springer-Verlag, Berlin, 2010. – 248 p.
11. *Deseri L., Zingales M.* A mechanical picture of fractional-order Darcy equation // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* – 2015. – V. 20. – P. 940–949.
12. *Dorville R., Mophou G.M., Valmorin V.S.* Optimal control of a nonhomogeneous Dirichlet boundary fractional diffusion equation // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2011. – V. 62. – P. 1471–1481.
13. *Gripenberg G., Londen S.O., Staffans O.* Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge etc., Cambridge University Press, 1990. XXII. – 701 p.
14. *Janno J., Kinash N.* Reconstruction of an order and asource term in a fractional diffusion equation from final measurements // *Inverse problems*. – 2018. – V. 34. – 025007.
15. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. – North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. – 523 p.
16. *Лопушанська Г.П., Лопушанський А.О., М'яус О.М.* Класичний розв'язок оберненої задачі для рівняння дробової дифузії при інтегральній за часам умові перевизначення // *Математичні студії*. – 2015. – Т. 44, № 2. – С. 215–220.
17. *Luchko Y.* Initial boundary-value problem for the generalized time-fractional diffusion equations // *J. Math. Anal. Appl.* – 2011. – V. 374. – P. 538–548.
18. *Mophou G.M.* Optimal control of fractional diffusion equation // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2011. – V. 61. – P. 68–78.
19. *Mophou G.M.* Optimal Control for Fractional Diffusion Equations with Incomplete Data // *J. Optim. Theory Appl.* – 2017. – V. 174. – P. 176–196.
20. *Roubiček T.* Nonlinear Partial Differential Equations with Applications. – Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 2005. – 404 p.
21. *Sakamoto K., Yamamoto M.* Initial value boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications applications to some inverse problems // *J. Math. Anal. Appl.* – 2011. – V. 382. – P. 426–447.
22. *Tröltzsch, F.* Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. – Graduate Studies in Mathematics, 112. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. – 399 p.

23. Winther R. Initial value methods for parabolic control problems // Mathematics of Computation. – 1980. – V. 34. – P. 115–125.
24. Winther R. Some superlinear convergence results for the conjugate gradient method // SIAM J. Numer. Anal. – 1980. – V. 17. – P. 14–17.
25. Zacher R. Weak solutions of abstract evolutionary integro-differential equations in Hilbert spaces // Funcialaj Ekvacioj. – 2009. – V. 52. – P. 1–18.
26. Zhou, Y., Peng, L. (2017). Weak solution of the tome-fractional Navier–Stokes equations and optimal control. *Computers and Mathematics*, 73(6), 1016–1027.

References

1. Alikhanov, A.A. (2010). A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations. *Differential Equations*, 46, 660–666.
2. Barenblatt, G.I., Entov, V.M., Ryzhik, V.M. (1984). *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*. M.: Nedra (in Russian).
3. Bazhlekova, E. (2013). Properties of the fundamental and impulse-response solutions of multi-term fractional differential equations. *Complex Analysis and Applications'13 (Proc. Intern. Conf., Sofia, 2013)*, Bulg. Acad. Sci., Sofia.
4. Bazhlekova, E. (2015). Subordination principle for a class of fractional order differential equations. *Mathematics*, 3(2), 412–427.
5. Bazhlekova, E., Jin, B., Lazarov, R., Zhou, Z. (2015). An analysis of the Rayleigh–Stokes problem for a generalized second-grade fluid. *Numer. Math.*, 131(1), 1–31.
6. Cea, J. (1978). *Lectures on optimization—theory and algorithms*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 236 p.
7. Caputo, M. (2000). Models of flux in porous media with memory. *Water Resour. Res.*, 36(3), 693–705.
8. Caputo, M., Plastino, W. (2004). Diffusion in porous layers with memory. *Geophys J. Int.*, 158, 385–396.
9. Iaffaldano, G., Caputo, M., Martino, S. (2005). Experimental and theoretical memory diffusion of water in sand. *Hydrol. Earth Sys. Sci. Discuss*, 2(4), 1329–1357.
10. Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin.
11. Deseri, L., Zingales, M. (2015). A mechanical picture of fractional-order Darcy equation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 20(3), 940–949.
12. Dorville, R., Mophou, G.M., Valmorin, V.S. (2011). Optimal control of a nonhomogeneous Dirichlet boundary fractional diffusion equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(3), 1471–1481.
13. Gripenberg, G., Londen, S.O., Staffans, O. (1990). *Volterra Integral and Functional Equations*. Cambridge etc., Cambridge University Press, XXII.
14. Janno, J., Kinash, N. (2018). Reconstruction of an order and asource term in a fractional diffusion equation from final measurements. *Inverse problems*, 34, 025007.
15. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam.
16. Lopushans'ka, G.P., Lopushansky, A.O., M'yaus, O. M. (2015). Classical solution of an inverse problem for a fractional diffusion equation under a time-integral over-determination condition. *Mat. Stud.*, 44(2), 215–220 (in Ukrainian).
17. Luchko, Y. (2011). Initial boundary-value problem for the generalized time-fractional diffusion equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 374(2), 538–548.
18. Mophou, G.M. (2011). Optimal control of fractional diffusion equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(1), 68–78.
19. Mophou, G.M. (2017). Optimal Control for Fractional Diffusion Equations with Incomplete Data. *J. Optim. Theory Appl.*, 174(1), 176–196.

20. Roubiřek, T. (2005). *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin.
21. Sakamoto, K., Yamamoto, M. (2011). Initial value boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications applications to some inverse problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 382(1), 426–447.
22. Tröltzsch, F. (2010). *Optimal control of partial differential equations*. Theory, methods and applications. Graduate Studies in Mathematics, 112. American Mathematical Society, Providence, RI.
23. Winther, R. (1980). Initial value methods for parabolic control problems. *Mathematics of Computation*, 34(149), 115–125.
24. Winther, R. (1980). Some superlinear convergence results for the conjugate gradient method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 17(1), 14–17.
25. Zacher, R. (2009). Weak solutions of abstract evolutionary integro-differential equations in Hilbert spaces. *Funcialaj Ekvacioj*, 52(1), 1–18.
26. Zhou, Y., Peng, L. (2017). Weak solution of the tome-fractional Navier–Stokes equations and optimal control. *Computers and Mathematics*, 73(6), 1016–1027.

M.V. Krasnoshchok

Optimal control problem for an equation of filtration with memory.

Fractional diffusion models are generalization to the diffusion models with integer derivatives. There has been great interest in the study of this models because of their appearance in modeling various applications in the physical sciences, medicine and biology. We consider a filtration model with nonclassical Darcy’s constitutive equation. Resulting equation states that the flux of fluid is proportional to not only gradient pressure but it’s Riemann–Liouville fractional derivative also. This model was proposed by M. Caputo and allows the permeability varies with time depending on the previous pressure gradient. These phenomena, which we will represent mathematically with memory formalisms, have often been observed qualitatively in oil extraction, in geothermal areas and in the laboratory. Similar problems arises in the study of flow of generalized second grade fluid. Existence results of initial and boundary value problems for partial fractional differential equations have been studied by E. Bazhlekova, K. Diethelm, J. Janno, A.N. Kochubei, G.P. Lopushans’ka, R. Zacher and others. Fractional optimal control problems have attracted for example R.Dorville, G.M. Mophou, V.S. Valmorin, Y. Zhou, L. Peng and many techniques have been developed for solving such problems. We consider the problem of minimization of the standard cost functional $J(u)$ which is determined in the terms of generalized solution of initial-boundary problem of time-fractional differential equation under considerations. We consider a control via right hand term u and an observation on the whole domain in L_2 norm with a Tikhonov regularizer term. First we introduce functional spaces and establish some auxiliary properties of fractional integrals and fractional derivatives. Second we prove an existence and uniqueness result for the state problem. We remind that we deals with an equation of filtration with memory. Our objectives are: a) to prove that there exists a minimizer u of the cost functional J ; b) to obtain necessary and sufficient conditions for u to be an extremum; c) to obtain constructive algorithm amenable to computations for approximations of the optimal control. An unique solvability of state and conjugate problem is established by the help of Galerkin method and corresponding a priori estimates. Then we prove that the cost functional is coercive, convex and weakly lower semicontinuous. We show the existence of the optimal solution by proving the existence of the weakly convergent minimization sequence satisfying the state equation. The uniqueness follows directly from the strong convexity of

the cost functional. This gives us the item a). The item b) is obtained from the first order optimality condition. We justify also the conjugated gradient method to search the optimal control function. On this way we use some results of R. Winther, which allows us to use the conjugate gradient method in our situation and prove its superlinear convergence.

Keywords: *optimal control, Caputo derivative, Sobolev spaces.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
iamm012@ukr.net

Отримано 12.11.19

UDC: 517.5

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-13

©2019. A. Pogorui, T. Kolomiets

SOME ALGEBRAIC PROPERTIES OF COMPLEX SEGRE QUATERNIONS

This paper deals with the basic properties the algebra of Segre quaternions over the field of complex numbers. We study idempotents, ideals, matrix representation and the Peirce decomposition of this algebra. We also investigate the structure of zeros of a polynomial in Segre complex quaternions by reducing it to the system of four polynomial equations in the complex field. In addition, Cauchy–Riemann type conditions are obtained for the differentiability of a function on the complex Segre quaternionic algebra.

MSC: 16H05.**Keywords:** *quaternions; Segre algebra; Pierce decomposition; polynomials.*

Introduction

The algebra of Segre quaternions or bicomplex numbers was introduced and studied by Italian mathematician C. Segre in 1892 [1]. The advantage of this real four-dimensional algebra, or two-dimensional algebra over complex numbers, is its commutativity, which makes it more applicable to a variety of important problems. For example, in contrast to quaternions, it is not necessary to consider the right and left derivatives of a function separately or to study polynomials with coefficients on special positions. Basic properties of bicomplex numbers and their applications were studied in [2].

In the early of 80-th of the 20-th century, it was understood the possible applications of bicomplex numbers to problems of inertial navigation [3]. A detailed analysis of the algebraic and geometric properties of bicomplex numbers is presented in [4]. In papers [6, 7] the authors developed the theory of monogenic functions in the algebra of Segre quaternions. In [5] a method for solving polynomial equations over bicomplex numbers was developed. At present time the algebra of bicomplex numbers is still the subject of interest of mathematicians.

The main object of the study of this paper is the algebra of Segre complex quaternions, which is a generalization of bicomplex numbers to the algebra of Segre quaternions over the field of complex numbers, similar to the complex generalization of quaternions, which is well studied and has a number of applications in mathematical physics [10]. We study the main algebraic properties of this algebra such as idempotents, ideals, Peirce decomposition and matrix representation. We also develop a method for solution of polynomial equations in Segre complex quaternions and study the Cauchy–D’Alambert

This work was supported, in part, by the state budget project “The geometrical and topological problems of the modern theory of mappings”.

type conditions for differential functions in this algebra. This algebra has already arisen in our research in the study of solutions of partial differential equations and we believe that it will find its application in study of differential equations of mathematical physics.

1. The basic properties of the algebra of Segre quaternions.

The algebra of Segre quaternions over real numbers is defined as follows

$$\mathbb{B}(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 f\},$$

where a_i are real numbers and i, j, f are imaginary units of the algebra such that $i^2 = j^2 = f^2 = -1$, $ij = ji = f$, $if = fi = -j$, $jf = fj = -i$. From these conditions it follows that algebra $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ is commutative. In addition, algebra $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ has exactly two nontrivial idempotents $f_+ = \frac{1+f}{2}$ and $f_- = \frac{1-f}{2}$, which satisfies the following properties $f_+ + f_- = 1$ and $f_+ f_- = 0$.

Algebra $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ can be decomposed in the direct sum of principal ideals $I(f_+)$ and $I(f_-)$, which are generated by f_+ and f_- respectively (the Peirce decomposition)

$$\mathbb{B}(\mathbb{R}) = I(f_+) \oplus I(f_-).$$

Elements of the ideals are zero-divisors of the algebra $\mathbb{B}(\mathbb{R})$. The algebra of Segre quaternions $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ has the exact regular representation by 4×4 matrices over the field of real numbers as follows

$$\mathcal{B}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & -x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_2 & x_3 & -x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & -x_1 & x_0 \end{bmatrix}, x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

that is, we have the following isomorphism of $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ onto $\mathcal{B}_4$

$$\mathbb{B}(\mathbb{R}) \ni x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 f \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & -x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_2 & x_3 & -x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & -x_1 & x_0 \end{bmatrix} \in \mathcal{B}_4.$$

2. The algebra of Segre quaternions over complex numbers.

Let us consider the algebra of bicomplex numbers with complex coefficients, that is, the four-dimensional Segre algebra over the field of complex numbers

$$\mathbb{B}(\mathbb{C}) = \{c_0 + c_1 j + c_2 k + c_3 f\},$$

where c_0, c_1, c_2, c_3 are complex numbers and j, k, f are imaginary units of the algebra which are defined by their properties $j^2 = k^2 = f^2 = -1$, $jk = kj = f$, $jf = fj = -k$, $kf = fk = -j$. In addition, j, k, f commute with the complex imaginary unit $i \in \mathbb{C}$. It is easily verified that $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ is a commutative algebra, which is said to be Segre quaternions over complex numbers.

Similarly to the case of bicomplex numbers, the algebra $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ is conveniently considered as the algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ over real numbers, that is

$$\mathbb{B}_8(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} + a_4 \mathbf{f} + a_5 \mathbf{p} + a_6 \mathbf{q} + a_7 \mathbf{r}\},$$

where $a_l, l = 0, 1, \dots, 7$ are real numbers and products of the imaginary units are defined by the following Cayley table

	1	i	j	k	f	p	q	r
1	1	i	j	k	f	p	q	r
i	i	-1	p	q	r	-j	-k	-f
j	j	p	-1	f	-k	-i	r	-q
k	k	q	f	-1	-j	r	-i	-p
f	f	r	-k	-j	1	-q	-p	i
p	p	-j	-i	r	-q	1	-f	k
q	q	-k	r	-i	-p	-f	1	j
r	r	-f	-q	-p	i	k	j	-1

PROPOSITION 1. The $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ is 8-dimensional commutative algebra over $\mathbb{R}$.

Proof. The commutativity of the multiplication follows directly from the Cayley table for imaginary units. Associativity and distributivity are verified by direct calculations. $\square$

Idempotents of algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$. Let us consider the following elements of $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \frac{1 - \mathbf{f} + \mathbf{p} + \mathbf{q}}{4}; & \mathbf{i}_2 &= \frac{1 + \mathbf{f} - \mathbf{p} + \mathbf{q}}{4}; \\ \mathbf{i}_3 &= \frac{1 + \mathbf{f} + \mathbf{p} - \mathbf{q}}{4}; & \mathbf{i}_4 &= \frac{1 - \mathbf{f} - \mathbf{p} - \mathbf{q}}{4}. \end{aligned} \quad (1)$$

Lemma 1. The elements $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4$ satisfy the following conditions

1.

$$\mathbf{i}_1^2 = \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2^2 = \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3^2 = \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4^2 = \mathbf{i}_4. \quad (2)$$

That is, $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4$ are idempotents of $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$.

2. For $k \neq l$

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{i}_k = 0, \quad k, l = 1, 2, 3, 4. \quad (3)$$

3.

$$\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_4 = 1. \quad (4)$$

Proof.

1. By using the Cayley table, we obtain

$$\begin{aligned} i_1^2 &= \left(\frac{1 - \mathbf{f} + \mathbf{p} + \mathbf{q}}{4} \right)^2 = \\ \frac{1}{16} (1 + \mathbf{f}^2 + \mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2 - 2\mathbf{f} + 2\mathbf{p} + 2\mathbf{q} - 2\mathbf{fp} - 2\mathbf{fq} + 2\mathbf{pq}) &= \\ \frac{1}{16} (4 - 4\mathbf{f} + 4\mathbf{p} + 4\mathbf{q}) &= \frac{1 - \mathbf{f} + \mathbf{p} + \mathbf{q}}{4} = i_1. \end{aligned}$$

Much in the same way we can consider the rest of cases of Eqs. (2).

2.

$$\begin{aligned} i_1 \cdot i_2 &= \frac{1 - \mathbf{f} + \mathbf{p} + \mathbf{q}}{4} \cdot \frac{1 + \mathbf{f} - \mathbf{p} + \mathbf{q}}{4} = \\ \frac{1}{16} (1 + \mathbf{f} - \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{f} - \mathbf{f}^2 + \mathbf{fp} - \mathbf{fq} + \mathbf{p} + \mathbf{pf} - \mathbf{p}^2 + \mathbf{pq} + \mathbf{q} + \mathbf{qf} - \mathbf{qp} + \mathbf{q}^2) &= \\ \frac{1}{16} (1 + \mathbf{f} - \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{f} - 1 - \mathbf{q} + \mathbf{p} + \mathbf{p} - \mathbf{q} - 1 - \mathbf{f} + \mathbf{q} - \mathbf{p} + \mathbf{f} + 1) &= i_2 \cdot i_1 = 0. \end{aligned}$$

Similarly we can prove the rest of Eqs. (3).

3.

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 + i_4 &= \\ \frac{1 - \mathbf{f} + \mathbf{p} + \mathbf{q}}{4} + \frac{1 + \mathbf{f} - \mathbf{p} + \mathbf{q}}{4} + \frac{1 + \mathbf{f} + \mathbf{p} - \mathbf{q}}{4} + \frac{1 - \mathbf{f} - \mathbf{p} - \mathbf{q}}{4} &= 1. \end{aligned}$$

□

Principal ideals of algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$. Consider an element $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} + x_4\mathbf{f} + x_5\mathbf{p} + x_6\mathbf{q} + x_7\mathbf{r}$ of algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$. Let us recall that a linear subspace

$$I(\mathbf{x}) = \{\mathbf{yx} : \mathbf{y} \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})\} = \mathbb{B}_8(\mathbb{R}) \mathbf{x} \subset \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$$

is called the principal ideal of algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ generated by $\mathbf{x}$.

Denote by $I(\mathbf{i}_1)$, $I(\mathbf{i}_2)$, $I(\mathbf{i}_3)$, $I(\mathbf{i}_4)$ the principal ideals of algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ generating by respective idempotents (1) as follows

$$I(\mathbf{i}_k) = \mathbb{B}_8(\mathbb{R}) \mathbf{i}_k = \{\mathbf{yi}_k, \mathbf{y} \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})\}, k = 1, 2, 3, 4.$$

PROPOSITION 2. If $\mathbf{x} \in I(\mathbf{i}_l)$, $\mathbf{y} \in I(\mathbf{i}_m)$, where $l \neq m$, then

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Proof. Since $\mathbf{x} \in I(\mathbf{i}_l)$, $\mathbf{y} \in I(\mathbf{i}_m)$ there exist $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ such that $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \mathbf{i}_l$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \mathbf{i}_m$. Taking into account that algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ is commutative and Lemma 1, we have $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = 0$. $\square$

Theorem 1. *Algebra*

$$\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$$

can be written as the following direct sum (The Peirce decomposition)

$$\mathbb{B}_8(\mathbb{R}) = I(\mathbf{i}_1) \oplus I(\mathbf{i}_2) \oplus I(\mathbf{i}_3) \oplus I(\mathbf{i}_4).$$

Proof. Since as linear subspaces of space $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ ideals $I(\mathbf{i}_1)$, $I(\mathbf{i}_2)$, $I(\mathbf{i}_3)$, $I(\mathbf{i}_4)$ are orthogonal and $I(\mathbf{i}_k) \cap I(\mathbf{i}_l) = 0, k \neq l$ considering Eq. (4) we conclude the proof of the theorem. $\square$

Taking into account properties of idempotents it is easily seen that elements of ideals are zero-divisors of $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$.

Theorem 2. $I(\mathbf{i}_l) = \mathbb{C}\mathbf{i}_l, l = 1, 2, 3, 4$.

Proof. Let $\mathbf{y} \in I(\mathbf{i}_1)$. Then there exist $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, 7$ such that

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (y_0 + y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k} + y_4 \mathbf{f} + y_5 \mathbf{p} + y_6 \mathbf{q} + y_7 \mathbf{r}) \mathbf{i}_1 = \\ &= \frac{1}{4} (y_0 + y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k} + y_4 \mathbf{f} + y_5 \mathbf{p} + y_6 \mathbf{q} + y_7 \mathbf{r}) - \\ &= \frac{1}{4} (y_0 \mathbf{f} + y_1 \mathbf{r} - y_2 \mathbf{k} - y_3 \mathbf{j} + y_4 - y_5 \mathbf{q} - y_6 \mathbf{p} + y_7 \mathbf{i}) + \\ &= \frac{1}{4} (y_0 \mathbf{p} - y_1 \mathbf{j} - y_2 \mathbf{i} + y_3 \mathbf{r} - y_4 \mathbf{q} + y_5 - y_6 \mathbf{f} + y_7 \mathbf{k}) + \\ &= \frac{1}{4} (y_0 \mathbf{q} - y_1 \mathbf{k} + y_2 \mathbf{r} - y_3 \mathbf{i} - y_4 \mathbf{p} - y_5 \mathbf{f} + y_6 + y_7 \mathbf{j}) = \\ &= (y_0 - y_4 + y_5 + y_6) \mathbf{i}_1 + \frac{1}{4} (y_1 - y_2 - y_3 - y_7) (\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} - \mathbf{r}) = \\ &= ((y_0 - y_4 + y_5 + y_6) + (y_1 - y_2 - y_3 - y_7) \mathbf{i}) \mathbf{i}_1 = c \mathbf{i}_1, \end{aligned}$$

where $c = y_0 - y_4 + y_5 + y_6 + (y_1 - y_2 - y_3 - y_7) \mathbf{i}$ is complex. $\square$

Similarly we can prove the cases $l = 2, 3, 4$.

Theorem 1 makes it possible to reduce polynomial equations in $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ to systems of polynomial equations in the field of complex numbers as follows.

Let us consider a polynomial $p_m(w) = a_m w^m + a_{m-1} w^{m-1} + \dots + a_0$, where $w, a_k \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, \dots, m$. Our purpose is to study zeros of

$$p_m(w) = 0. \tag{5}$$

In accordance with Theorem 1, we consider the following decomposition

$$\begin{aligned} a_r &= a_r^{(1)} + \dots + a_r^{(4)}, r = 0, 1, \dots, m, \\ w &= w_1 + \dots + w_4, \end{aligned} \tag{6}$$

where $a_r^{(p)}, w_p \in I(i_p)$. It should be noted that $w_i w_j = 0$ and $a_r^{(i)} a_r^{(j)} = 0$ for $i \neq j$.

Substituting (6) into (5), we obtain the following system of polynomial equations

$$\begin{aligned} a_m^{(1)} w_1^m + a_{m-1}^{(1)} w_1^{m-1} + \dots + a_0^{(1)} &= 0, \\ a_m^{(2)} w_2^m + a_{m-1}^{(2)} w_2^{m-1} + \dots + a_0^{(2)} &= 0, \\ a_m^{(3)} w_3^m + a_{m-1}^{(3)} w_3^{m-1} + \dots + a_0^{(3)} &= 0, \\ a_m^{(4)} w_4^m + a_{m-1}^{(4)} w_4^{m-1} + \dots + a_0^{(4)} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Considering Theorem 2, we have $a_r^{(s)} = c_r^{(s)} i_s$, $w_s^r = z_s^r i_s$, where $c_r^{(s)}, z_s \in \mathbb{C}$.

Thus, taking i_s out of the s -th equation $s = 1, 2, 3, 4$ of the system, we obtain the system of four equations in $\mathbb{C}$ as follows

$$\begin{aligned} c_m^{(1)} z_1^m + c_{m-1}^{(1)} z_1^{m-1} + \dots + c_0^{(1)} &= 0, \\ c_m^{(2)} z_2^m + c_{m-1}^{(2)} z_2^{m-1} + \dots + c_0^{(2)} &= 0, \\ c_m^{(3)} z_3^m + c_{m-1}^{(3)} z_3^{m-1} + \dots + c_0^{(3)} &= 0, \\ c_m^{(4)} z_4^m + c_{m-1}^{(4)} z_4^{m-1} + \dots + c_0^{(4)} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Hence, we proved the following theorem

Theorem 3. Let $\{r_1^{(l)}, r_2^{(l)}, \dots, r_m^{(l)}\}$ be the set of complex zeros of $c_m^{(l)} z_l^m + c_{m-1}^{(l)} z_l^{m-1} + \dots + c_0^{(l)} = 0$, $l = 1, 2, 3, 4$.

Then the set $S = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4$, where $S_k = \{r_1^{(k)} i_k, r_2^{(k)} i_k, \dots, r_m^{(k)} i_k\}$, $k = 1, 2, 3, 4$ is the set of solutions of Eq. (5).

It is easily verified that Eq. (5) has m^4 zeros.

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
T_1	T_1	$-T_0$	T_5	T_6	T_7	$-T_2$	$-T_3$	$-T_4$
T_2	T_2	T_5	$-T_0$	T_4	$-T_3$	$-T_1$	T_7	$-T_6$
T_3	T_3	T_6	T_4	$-T_0$	$-T_2$	T_7	$-T_1$	$-T_5$
T_4	T_4	T_7	$-T_3$	$-T_2$	T_0	$-T_6$	$-T_5$	T_1
T_5	T_5	$-T_2$	$-T_1$	T_7	$-T_6$	T_0	$-T_4$	T_3
T_6	T_6	$-T_3$	T_7	$-T_1$	$-T_5$	$-T_4$	T_0	T_2
T_7	T_7	$-T_4$	$-T_6$	$-T_5$	T_1	T_3	T_2	$-T_0$

The result of multiplication is the same as for basis elements (identity and imaginary units) of algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$.

Let us introduce 8-dimensional matrix algebra over $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_8 = \left\{ \sum_{j=0}^7 x_j T_j, x_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

Theorem 4. *Algebra $\mathcal{B}_8$ is the exact regular representation of $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$.*

Proof. Define the mapping $\tau(\cdot)$ of $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ onto $\mathcal{B}_8$ by the formula

$$\tau(\mathbf{x}) = x_0 T_0 + x_1 T_1 + x_2 T_2 + x_3 T_3 + x_4 T_4 + x_5 T_5 + x_6 T_6 + x_7 T_7 \quad (9)$$

for $\mathbf{x} = x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} + x_4 \mathbf{f} + x_5 \mathbf{p} + x_6 \mathbf{q} + x_7 \mathbf{r}$.

Let us show that the mapping $\tau(\cdot)$ defines an isomorphism of algebras $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ and $\mathcal{B}_8$. For $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ we have

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= (x_0 + y_0)T_0 + (x_1 + y_1)T_1 + (x_2 + y_2)T_2 + (x_3 + y_3)T_3 + (x_4 + y_4)T_4 + \\ &\quad (x_5 + y_5)T_5 + (x_6 + y_6)T_6 + (x_7 + y_7)T_7 = \\ &\quad \sum_{j=0}^7 x_j T_j + \sum_{j=0}^7 y_j T_j = \tau(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{y}). \\ \tau(\mathbf{x}) \cdot \tau(\mathbf{y}) &= \left(\sum_{j=0}^7 x_j T_j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^7 y_j T_j \right) = \\ &\quad (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 + x_6 y_6 - x_7 y_7)T_0 + \\ &\quad (x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_5 - x_3 y_6 + x_4 y_7 - x_5 y_2 - x_6 y_3 + x_7 y_4)T_1 + \\ &\quad (x_0 y_2 - x_1 y_5 + x_2 y_0 - x_3 y_4 - x_4 y_3 - x_5 y_1 + x_6 y_7 + x_7 y_6)T_2 + \\ &\quad (\dots)T_3 + (\dots)T_4 + (\dots)T_5 + (\dots)T_6 + (\dots)T_7 = \tau(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}). \end{aligned}$$

It is easily seen that matrices $T_j, j = 0, 1, \dots, 7$ are linear independent. This implies that $\tau(\mathbf{x}) = 0$ if $\mathbf{x} = 0$ and the kernel of homomorphism $\tau(\cdot)$ is trivial, that is $\tau(\cdot)$ is the isomorphism. $\square$

Denote by $\Delta(\mathbf{x}) = \det(\tau(\mathbf{x}))$. It is easily seen that $\mathbf{x}$ is a zero divisor if and only if $\det(\tau(\mathbf{x})) = 0$.

4. Differentiation in $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$. Cauchy–D’Alamber conditions.

Let $\mathbf{f} : \mathbb{B}_8(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ is as follows

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x})\mathbf{i} + u_2(\mathbf{x})\mathbf{j} + u_3(\mathbf{x})\mathbf{k} + u_4(\mathbf{x})\mathbf{f} + u_5(\mathbf{x})\mathbf{p} + u_6(\mathbf{x})\mathbf{q} + u_7(\mathbf{x})\mathbf{r},$$

where $u_k(\mathbf{x}) = u_k(x_0, x_1, \dots, x_7)$ are some real functions of eight variables $x_j, j = 0, 1, \dots, 7$.

DEFINITION 1. The function $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ is called differential at $\mathbf{x} \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ if there exists the limit

$$\lim_{\Delta(\mathbf{h}) \neq 0, |\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}),$$

and $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ does not depend on $\mathbf{h}$.

DEFINITION 2. A function $\mathbf{f} : \mathbb{B}_8(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ is called differential if it is differential at every point $\mathbf{x} \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$.

Note that the differentiability of a function under consideration differs from the concept of a monogenic function, which is studied in [6–9].

Theorem 5. A function

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x})\mathbf{i} + u_2(\mathbf{x})\mathbf{j} + u_3(\mathbf{x})\mathbf{k} + u_4(\mathbf{x})\mathbf{f} + u_5(\mathbf{x})\mathbf{p} + u_6(\mathbf{x})\mathbf{q} + u_7(\mathbf{x})\mathbf{r}$$

is differential if and only if functions $u_k(\mathbf{x})$ have continuous partial derivatives $\frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ for all $j, k = 0, 1, \dots, 7$ and the following Cauchy–D’Alamber type conditions hold

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x_0} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = \frac{\partial u_5}{\partial x_5} = \frac{\partial u_6}{\partial x_6} = \frac{\partial u_7}{\partial x_7}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_0} &= -\frac{\partial u_0}{\partial x_1} = \frac{\partial u_5}{\partial x_2} = \frac{\partial u_6}{\partial x_3} = \frac{\partial u_7}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_5} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_6} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_7}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_0} &= \frac{\partial u_5}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_0}{\partial x_2} = \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_5} = \frac{\partial u_7}{\partial x_6} = -\frac{\partial u_6}{\partial x_7}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_0} &= \frac{\partial u_6}{\partial x_1} = \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_0}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_4} = \frac{\partial u_7}{\partial x_5} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_6} = -\frac{\partial u_5}{\partial x_7}, \\ \frac{\partial u_4}{\partial x_0} &= \frac{\partial u_7}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_0}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_6}{\partial x_5} = \frac{\partial u_5}{\partial x_6} = \frac{\partial u_1}{\partial x_7}, \\ \frac{\partial u_5}{\partial x_0} &= -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_7}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_6}{\partial x_4} = \frac{\partial u_0}{\partial x_5} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_6} = \frac{\partial u_3}{\partial x_7}, \\ \frac{\partial u_6}{\partial x_0} &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_7}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_5}{\partial x_4} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_5} = \frac{\partial u_0}{\partial x_6} = \frac{\partial u_2}{\partial x_7}, \\ \frac{\partial u_7}{\partial x_0} &= -\frac{\partial u_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_6}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_5}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_4} = \frac{\partial u_3}{\partial x_5} = \frac{\partial u_2}{\partial x_6} = -\frac{\partial u_0}{\partial x_7}. \end{aligned} \tag{10}$$

Proof. Let a function $\mathbf{f}$ be differentiable in the above sense.

Denote by $\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \dots, \mathbf{e}_7 = \mathbf{r}$. To obtain Conditions (10) we consider the following limits

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_l) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t\mathbf{e}_l} = \sum_{i=0}^7 \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l^{-1}. \quad (11)$$

Since the right-hand side of Eq. (11) does not depend on the index l we have

$$\sum_{i=0}^7 \frac{\partial u_i}{\partial x_0} \mathbf{e}_i = \sum_{i=0}^7 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_1^{-1} = \dots = \sum_{i=0}^7 \frac{\partial u_i}{\partial x_7} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_7^{-1}. \quad (12)$$

Taking into account that $\mathbf{e}_1^{-1} = \mathbf{i}^{-1} = -\mathbf{i}, \dots, \mathbf{e}_4^{-1} = \mathbf{f}^{-1} = \mathbf{f}, \dots, \mathbf{e}_7^{-1} = \mathbf{r}^{-1} = -\mathbf{r}$ it follows from Eqs. (12) conditions (10).

On the contrary, let the functions $u_i, i = 0, 1, \dots, 7$ have continuous firsts partial derivatives and satisfy Cauchy-D'Alembert type conditions (10). Then for every $j = 0, 1, \dots, 7$, we have

$$u_j(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - u_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^7 \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} h_i + o(|\mathbf{h}|), \quad (13)$$

where $\frac{o(|\mathbf{h}|)}{|\mathbf{h}|} \rightarrow 0$ as $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$.

Let us put $c_k = \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_0}$. Considering Cauchy-D'Alembert type conditions (10) it follows from Eq. (13) that

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=0}^7 (u_j(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - u_j(\mathbf{x})) \mathbf{e}_j = \sum_{j=0}^7 \sum_{i=0}^7 \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} h_i \mathbf{e}_j + o(|\mathbf{h}|) \\ &= \left(\sum_{j=0}^7 \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_0} \mathbf{e}_j \right) \left(\sum_{i=0}^7 h_i \mathbf{e}_i \right) + o(|\mathbf{h}|). \end{aligned}$$

Thus,

$$\lim_{\Delta(\mathbf{h}) \neq 0, |\mathbf{h}| \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} = \sum_{j=0}^7 \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_0} \mathbf{e}_j = \sum_{j=0}^7 c_j \mathbf{e}_j = \mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

□

References

1. Segre, C. (1892). Le rappresentazioni reali delle forme complesse a gli enti iperalgebrici. *Mathematische Annalen*, 40(3), 413-467.

2. Lyush, V.V. (1936). The theory of universal numbers and its application to the solution of algebraic equations. *Proceedings of the II All-Union Math. Congress. Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR*, 2, 49-55 (in Russian).
3. Onishchenko, S.M. (1983). *Application of hypercomplex numbers in the theory of inertial navigation. Autonomous systems*. Kyiv: Nauk. Dumka (in Russian).
4. Turbin, A.F. (1999). Hypercomplex analysis in Lyush's algebra. Problems of analytical mechanics and its applications. *Proceedings of the Mathematical Institute of the NAS of Ukraine*, 26, 387-406.
5. Pogorui, A.A., Rodríguez-Dagnino, R.M. (2006). On the set of zeros of bicomplex polynomials. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 51(7), 725-730.
6. Pogorui, A.A. (2007). Hyperholomorphic functions on commutative algebras. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 52(12), 1155-1159.
7. Plaksa S.A., Pukhtaievych, R.P. (2014). Constructive description of monogenic functions in n -dimensional semi-simple algebra. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 22(1), 221-235.
8. Pukhtaievych, R., Plaksa, S. (2019). Some properties of a Cauchy type integral in a three-dimensional commutative algebra with one-dimensional radical. *Monatshefte für Mathematik*, 189(3), 523-548.
9. Shpakivskyi, V.S. (2015). Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 4, 23-28.
10. Kravchenko, V.V., Shapiro, M.V. (1996). *Integral representations for spatial models of mathematical physics*. Longman, Harlow.

А.О. Погоруй, Т.Ю. Коломієць

Деякі алгебраїчні властивості комплексних кватерніонів Сегре.

Алгебра кватерніонів Сегре чи бікомплексних чисел Сегре була введена та вперше вивчалась італійським математиком К. Сегре в 1892 році. Перевага цієї чотиривимірної алгебри над полем дійсних чисел, або двовимірної алгебри Кліффорда над комплексними числами, полягає у комутативності множення її елементів, що сприяє її застосуванню до дослідження різноманітних важливих проблем математики, фізики, навігації тощо. Наприклад, на відміну від кватерніонів, не потрібно розглядати окремо праві та ліві похідні функції чи окремо вивчати поліноми з коефіцієнтами на спеціальних місцях.

Основним об'єктом дослідження цієї роботи є алгебра комплексних кватерніонів Сегре, що є узагальненням бікомплексних чисел до алгебри кватерніонів Сегре над полем комплексних чисел за аналогією узагальнення кватерніонів до комплексних кватерніонів, яке добре вивчене і має ряд застосувань у математичній фізиці. У статті розглянуто основні алгебраїчні та аналітичні властивості алгебри кватерніонів Сегре над полем комплексних чисел $\mathbb{B}(\mathbb{C})$. Показується, що ця алгебра має зображення у вигляді восьмивимірної комутативної алгебри $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ над полем дійсних чисел. Для алгебри $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ складена таблиця множення базисних елементів (таблиця Келі). Знайдені ідемпотенти алгебри та наведені їх основні властивості. За допомогою головних ідеалів, побудованих на ідемпотентах, розглянуто розклад Пірса та визначено дільники нуля алгебри як елементи ідеалів.

Досліджено структуру нулів многочлена в комплексних кватерніонах Сегре шляхом зведення його до системи чотирьох поліноміальних рівнянь над полем комплексних чисел. Для цього доведено теорему про зображення головних ідеалів у вигляді добутку довільного комплексного числа на відповідний ідемпотент алгебри. У статті наводиться ізоморфне матричне подання $\mathcal{B}_8$ алгебри $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$. Для цього кожен базисний елемент алгебри записаний відповідною восьмивимірною матрицею та таблиця Келі множення цих елементів.

Також у роботі досліджуються умови диференційованості функції на алгебрі $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, а саме, отримані умови типу Коші–Рімана, які є достатніми для того, щоб функція на алгебрі комплексних кватерніонів Сегре була диференційованою.

Ключові слова: кватерніони, алгебра Сегре, розклад Пірса, поліноми.

Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr
pogor@zu.edu.ua

Received 16.09.19

UDC 517.7

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-14

©2019. S.V. Sapunov

COLLECTIVES OF AUTOMATA ON INFINITE GRID GRAPH WITH DETERMINISTIC VERTEX LABELING

Automata walking on graphs are a mathematical formalization of autonomous mobile agents with limited memory operating in discrete environments. Under this model broad area of studies of the behaviour of automata in finite and infinite labyrinths (a labyrinth is an embedded directed graph of special form) arose and intensively developing. Research in this regard received a wide range of applications, for example, in the problems of image analysis and navigation of mobile robots. Automata operating in labyrinths can distinguish directions, that is, they have a compass. This paper examines vertex labellings of infinite square grid graph thanks to these labellings a finite automaton without a compass can walk along graph in any arbitrary direction. The automaton looking over neighbourhood of the current vertex and may move to some neighbouring vertex selected by its label. We propose a minimal deterministic traversable vertex labelling that satisfies the required property. A labelling is said to be deterministic if all vertices in closed neighbourhood of every vertex have different labels. It is shown that minimal deterministic traversable vertex labelling of square grid graph uses labels of five different types. Minimal deterministic traversable labelling of subgraphs of infinite square grid graph whose degrees are less than four are developed. The key problem for automata and labyrinths is the problem of constructing a finite automaton that traverse a given class of labyrinths. We say that automaton traverse infinite graph if it visits any randomly selected vertex of this graph in a finite time. It is proved that a collective of one automaton and three pebbles can traverse infinite square grid graph with deterministic labelling and any collective with fewer pebbles cannot. We consider pebbles as automata of the simplest form, whose positions are completely determined by the remaining automata of the collective. The results regarding to exploration of an infinite deterministic square grid graph coincide with the results of A.V. Andzhan (Andzans) regarding to traversal of an infinite mosaic labyrinth without holes. It follows from above that infinite grid graph after constructing a minimal traversable deterministic labelling on it and fixing two pairs of opposite directions on it becomes an analogue of an infinite mosaic labyrinth without holes.

MSC: 68R10, 05C85, 68Q45, 68T40.

Keywords: *square grid graph, graph-walking automaton, vertex labelling, collective of automata.*

Introduction

Automata walking on graphs are a mathematical formalization of autonomous mobile agents with limited memory operating in discrete environments. Under this model broad area of studies of the behaviour of automata in finite and infinite labyrinths (a labyrinth is an embedded directed graph of special form) arose and intensively developing [1, 2]. Research in this regard received a wide range of applications, for example, in the problems of image analysis and navigation of mobile robots [3]. The results for automata and labyrinths are based on the important assumption that automata operating in labyrinths can distinguish directions, that is, they have a compass [4, 5]. This paper discusses automata without compass, that is, they do not distinguish between the

directions and relative positions of the vertices. Such restriction of capabilities makes the behaviour of automata on the graph much more complicated. For example, the problem of preserving the movement direction on the graph is trivial for an automaton with a compass, but for an automaton without a compass it requires using additional equipments and development of methods for their usage [6]. This poses the problem of enrichment of the graph model (by adding some preferably minimal properties) to ensure that the automaton could move along graph in any arbitrarily chosen direction. The most natural enhancement of a graph is to label its structural elements: vertices, edges, incidentors, etc. The automaton gets an opportunity to read labels in a local neighbourhood of the current vertex and use them for movement. This article deals with the vertex-labelled graphs.

1. Problem formulation.

This paper sets out to consider two related problems.

1) Let some labels (colours) be assigned to the vertices of the square grid graph, and let an automaton be able to receive at the input the label of the current vertex and the labels of all vertices from its neighbourhood. The automaton can move between adjacent vertices by selecting a target vertex by its label. Does there exists a vertex labelling such that using it an automaton can move along a graph in any arbitrarily chosen direction?

2) If the first is possible, then does there exists an automaton that traverse such labelled graph, having the only ability to read the vertex labels from a closed neighbourhood of the current vertex?

In addition to the question of labelling existence, there is the question of minimizing the amount of label types that is also worth studying.

2. Basic definitions.

Let $\mathbb{Z}$ denote the set of integers, and let $\mathbb{N}$ denote the set of natural numbers. We will use the symbol $\mathbb{Z}_n$ to denote the set $\{0, 1, \dots, n-1\}$ for any $n \in \mathbb{N}$.

We will use standard terminology for graphs (we refer the reader to [7]).

The path graph P_n is a tree with two nodes of vertex degree 1, and the other $n-2$ nodes of vertex degree 2. A 1-way infinite path graph (or a ray) $P^{+\infty}$ is a graph which isomorphic to the graph with vertex set $\{v_i : i = 1, 2, \dots\}$ and edge set $\{(v_i, v_{i+1}) : i = 1, 2, \dots\}$. A 2-way infinite path graph (or a double ray) P^∞ is a graph which isomorphic to the graph with vertex set $\{v_i : i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ and edge set $\{(v_i, v_{i+1}) : i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. An infinite two-dimensional grid graph G^∞ is the graph cartesian square of 2-way infinite path graph. A 2-way infinite ladder graph $G^{(\infty, 2)}$ is the graph cartesian product of P^∞ and P_2 . A rectangle graph $G^{(n, m)}$ is the graph cartesian product of P_n and P_m .

We will use the embedded square grid graph, which vertices corresponds to the distinct points of the integer lattice $\mathbb{Z}^2$ and two vertices are connected by an edge if and only if the corresponding points are at distance 1. Suppose that the name of the vertex of the embedded graph is the coordinates of the corresponding point on the plane. A half-grid graph is the subgraph of the embedded graph G^∞ induced by the set

of vertices lying on one side from an infinite straight line including vertices that are on the line. The line is called the half-grid boundary. An angle graph is the subgraph of the embedded graph G^∞ induced by the set of vertices that are between two different half-lines sharing a common starting vertex including vertices that are on half lines. Half-lines are called the sides of the angle, and their common vertex is called the vertex of the angle. The value of the angle is the value of the geometric angle between its sides. A stripe graph is the subgraph of the embedded graph G^∞ induced by the set of vertices that are between two parallel lines including vertices that are on lines. The lines are called the borders of the stripe, their direction is called the direction of the stripe, and the distance between them is called the width of the stripe. A half-stripe graph is the subgraph of a stripe graph induced by the part of the stripe vertices that are on one side from a straight line crossing the stripe borders. A segment of this line, enclosed between the borders of the stripe, is called the end of the half-stripe.

A labelled graph is a simple connected vertex-labelled graph $G = (V, E, M, \mu)$, where V is a set of vertices, E is a set of edges, M is a set of labels, $\mu : V \rightarrow M$ is a surjective labelling function. The open neighbourhood O_v of a vertex $v \in V$ is the set of all vertices adjacent to v . A neighbourhood in which v itself is included, called the closed neighbourhood and denoted by $O_{(v)}$. A multiset of labels of all vertex from $O_{(v)}$ is called the labelling of vertex v neighbourhood and denote by $\mu(O_v)$. A walk in graph G is a series of vertices $p = v_1 \dots v_k$ such that $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $i = 1, \dots, k-1$. The positive integer k (the number of vertices) is the length of p . The label $\mu(p)$ of the walk p is a word $w = \mu(v_1) \dots \mu(v_k)$ in label alphabet M . We say that the word w is defined by the vertex v_1 .

A graph-walking automaton on labelled graph G is a sextuple $A = (S, X, Y, s_0, \varphi, \psi)$, where S is a finite set of internal states, $X = \{(a_0, \{a_1, \dots, a_k\}) \mid a_i \in M, 0 \leq i \leq k\}$ is a finite input alphabet (a_0 is a current vertex label, $\{a_1, \dots, a_k\}$ is a set (or multiset) of labels of all vertices on the current neighbourhood, k is a degree of the current vertex), $Y = M$ is a finite output alphabet ($y = a$ means that the automaton moves from the current vertex to an adjacent vertex with the label a), $s_0 \in S$ is the initial state, $\varphi : S \times X \rightarrow S$ is a transition function, $\psi : S \times X \rightarrow Y$ is an output function. Automaton operates as follows: observes the labelling of current vertex neighbourhood, chooses some label, and moves to the vertex with this label. The automaton does not have a compass, that is, it does not distinguish directions and relative position of vertices. Therefore, it does not distinguish vertices with the same labels. It is shown in [6] that automaton without additional resources cannot maintain movement direction on the graph all whose vertices are unlabelled or, equivalently, are labelled with the same label. Let an automaton A at a moment of time t be at a vertex $v(t)$ of the embedded graph G^∞ . The automaton movement is called uniform and directional if there exists natural period T such that $v(t+T) - v(t) = v(t+2T) - v(t+T)$ holds for any moment of time t .

We will consider a collective of interacting automata $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_m)$. In addition to information about labelling each automaton A_i also receives information about presence of other automata from collective in the closed neighbourhood of current

vertex. We call $\mathcal{A}$ the collective of automata without a compass if any component of $\mathcal{A}$ is an automaton without a compass. Further we will consider only such collectives.

Let $J \subset \{1, \dots, m\}$. A subsystem $(A_j)_{j \in J}$ of the collective $\mathcal{A}$ of interacting automata is called the pebbles in collective $\mathcal{A}$ if for all $j \in J$ the following conditions hold: (1) A_j has a single inner state; (2) A_j can only move if there is an automaton A_i ($i \notin J$) on the same vertex, and A_j can only move to the same vertex as A_i . For non-pebble automata pebbles play the role of external memory.

We will provide more precise definitions. Here $\mathcal{P}(S)$ denotes the set of all subsets of an arbitrary set S . Let I be a set of indices, and let $\{S_i | i \in I\}$ be a family of sets. We will denote by $\mathcal{T}(\{S_i | i \in I\})$ the set of all partial transversal of this family and by definition partial transversal contains no more than one element from each S_i . Note that the empty set is also a partial transversal.

The collective $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_m)$ consisting of one automaton A_0 and m pebbles $A_1, \dots, A_m$ is called the collective of interacting automata of type $(1, m)$. Let $I = \{0, 1, \dots, m\}$. Each automaton A_i from collective $\mathcal{A}$ is a sextuple $A_i = (S_i, X_i, Y_i, s_0^i, \varphi_i, \psi_i)$, where S_i is a finite set of internal states, $X_i = \{(\alpha_0, \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}) \mid \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in M \times \mathcal{T}(\{S_j | j \in I \setminus \{i\}\})\}$ is a finite input alphabet (here α_0 denotes the label of the current vertex ($pr_1(\alpha_0)$) and automata placed on it ($pr_2(\alpha_0)$), and multiset $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ denotes the labels of vertices from neighbourhood of current vertex and automata placed on them); $Y_i = M \times \mathcal{P}(I \setminus \{i\}) \cup \{h\}$ is a finite output alphabet (here $y = h$ means "stay at the current vertex", $y \in Y_i \setminus \{h\}$ means "move to the vertex with label $pr_1(y)$, on which there are automata from the list $pr_2(y)$ and only they", $pr_2(y) = \emptyset$ means that there are no other automata in the target vertex); $s_0^i \in S_i$ is an initial state; $\varphi_i : S_i \times X_i \rightarrow S_i$ is a transition function; $\psi_i : S_i \times X_i \rightarrow Y_i$ is an output function. For any pebble A_j , $1 \leq j \leq m$ the following conditions are true: (1) $S_j = \{s_0^j\}$; (2) for any $x = (\alpha_0, \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}) \in X_j$ either $\psi_j(s_0^j, x) = h$, or if $\psi_j(s_0^j, x) = y \neq h$, then there exists $s \in S_0$ such that $s \in pr_2(\alpha_0)$ and $\psi_0(s, x') = y$, where $x' = ((pr_1(\alpha_0), (pr_2(\alpha_0) \setminus \{s\}) \cup \{s_0^j\}), \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\})$.

The behaviour of collective $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_{m+1})$ of type $(1, m)$ on graph G is the sequence $\pi(\mathcal{A}, G): (\vec{x}_0, \vec{s}_0, \vec{y}_0), \dots, (\vec{x}_t, \vec{s}_t, \vec{y}_t), (\vec{x}_{t+1}, \vec{s}_{t+1}, \vec{y}_{t+1}), \dots$, where $\vec{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^{m+1})$, $x_t^j = (\alpha_{0_t}^j, \{\alpha_{1_t}^j, \dots, \alpha_{k_t}^j\}) \in X_j$, $\vec{s}_t = (s_t^1, \dots, s_t^{m+1})$, $s_t^j \in S_j$, $\vec{y}_t = (y_t^1, \dots, y_t^{m+1})$, $y_t^j \in Y_j$ ($0 \leq j \leq m$) such that $s_{t+1}^j = \varphi_j(s_t^j, x_t^j)$, $y_{t+1}^j = \psi_j(s_t^j, x_t^j)$.

Suppose that all automata from the collective $\mathcal{A}$ are placed on the same vertex of the graph G at the initial moment of time.

3. Vertex labelling sufficient for directional movement.

Consider an embedding of graph G^∞ on the plane $\mathbb{Z}^2$. Let's choose two pairs of opposite directions on graph G^∞ corresponding to the abscissas and ordinates axes of the plane $\mathbb{Z}^2$. We call these directions basic. It easy to check that the movement of the automaton in any fixed direction different from the basic can be represented as a combination of moves in the basic ones by increasing the number of states of

the automaton. Hence we can restrict ourselves to considering automata moving only in the basic directions. A labelling is said to be periodic in direction $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ if $\mu(i + q, j + r) = \mu(i, j)$ for all $i, j \in \mathbb{Z}$. We call a labelling traversable if by using it an automaton can move along graph in any directions. A vertex labelling that minimize the number of labels needed for a given graph G is called a minimum vertex labelling of G .

We call a labelling function μ deterministic (or D-labelling) if all vertices in closed neighbourhood of any vertex have different labels. A labelling graph with deterministic labelling function is said to be deterministic (or D-graph). In [8] it is proved that following properties follow from the D-graph definition: (1) for any graph vertex any word in alphabet M defines no more than one path from this vertex; (2) the distance between two vertices with the same labels greater than or equal to 4. These properties enable targeted movement of a graph-walking automaton along D-graph. For example, if we know labels of the paths connecting the vertices of the graph with each other, then we can construct an automaton which can move along these paths.

Theorem 1. *For a minimal traversable deterministic labelling of G^∞ it is necessary and sufficient to have five types of labels.*

Proof. Consider an embedding of graph G^∞ on the plane $\mathbb{Z}^2$. For any vertex v of graph G^∞ the equality $|O_{(v)}| = 5$ holds. Therefore five types of labels needed for D-labelling of closed neighbourhood of this vertex. Let $M = \{a, b, c, d, e\}$. We will choose an arbitrary vertex (i, j) of embedded graph G^∞ and define the labelling of neighbourhood of this vertex as follows: $\mu((i, j)) = a$, $\mu((i + 1, j)) = b$, $\mu((i, j + 1)) = c$, $\mu((i - 1, j)) = d$, $\mu((i, j - 1)) = e$ (consult Fig. 1(a) for illustration). By definition of the D-labelling it follows that vertex $(i + 1, j + 1)$ must be labelled with either label d or label e . Let $\mu((i + 1, j + 1)) = e$. Then, by definition of D-labelling, it follows that $\mu((i - 1, j + 1)) = b$, $\mu((i - 1, j - 1)) = c$, and $\mu((i + 1, j - 1)) = d$. We continue labelling in this fashion obtaining $\mu((i + 2, j)) = c$, $\mu((i, j + 2)) = d$, $\mu((i - 2, j)) = c$, $\mu((i, j - 2)) = b$ (consult Fig. 1(b) for illustration).

Note that after performing these steps for each label from M there exists a vertex labelled by this label such that all vertices from its neighbourhood are already labelled. For the label a it is the vertex (i, j) , for the label b , the vertex $(i + 1, j)$, for the label c , the vertex $(i, j + 1)$, for the label d , the vertex $(i - 1, j)$, and for the label e , the vertex $(i, j - 1)$. Using labelling of the neighbourhoods of these vertices as the patterns for further labelling, we obtain a deterministic subgraph of the graph G^∞ , shown in Fig. 1(c).

For labelling of neighbourhood of vertex $(i + 2, j + 2)$, $\mu((i + 2, j + 2)) = b$, we will use corresponding pattern i.e. the labelling of the neighbourhood of the vertex $(i + 1, j)$, $\mu((i + 1, j)) = \mu((i + 2, j + 2))$. Vertex $(i + 3, j + 2)$ will be labelled by label c as a result. Note that $\mu((i + 3, j + 2)) = \mu((i - 2, j + 2))$. We will continue labelling by using corresponding patterns and obtain that $\mu((i + 3, j + 1)) = \mu((i - 2, j + 1)) = a$, $\mu((i + 3, j)) = \mu((i - 2, j)) = e$, $\mu((i + 3, j - 1)) = \mu((i - 2, j - 1)) = b$, and $\mu((i + 3, j - 2)) = \mu((i - 2, j - 2)) = d$. It is easy to check that $\mu((i, j)) = \mu((i + 5k, j))$ holds for all $i, j, k \in \mathbb{Z}$ provided that corresponding labelling patterns are used. Similarly

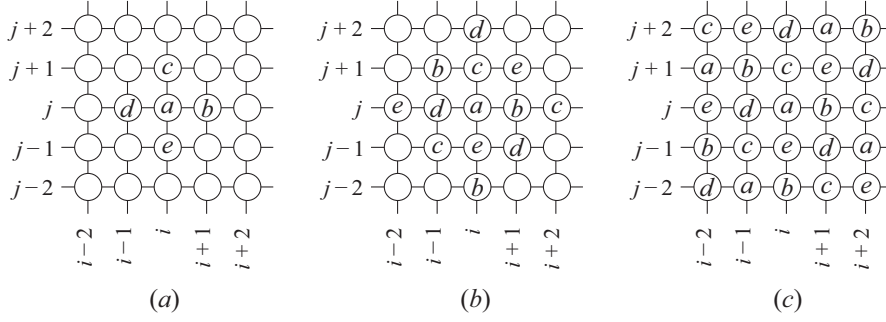


Fig. 1. A minimal D-labelling of graph G^∞ .

we obtain that $\mu((i, j)) = \mu((i, j + 5l))$ holds for all $i, j, l \in \mathbb{Z}$ provided that corresponding labelling patterns are used. It follows from above that we can construct D-labelling of graph G^∞ provided that corresponding labelling patterns are used. Thus, it is necessary and sufficient to have labels of five different types to construct a minimal D-labelling of the graph G^∞ .

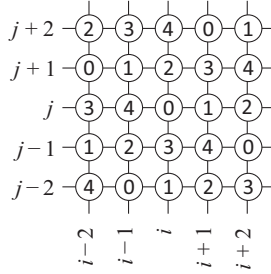


Fig. 2. A minimal traversable D-labelling of graph G^∞ .

We next prove that the minimal D-labelling described above is traversable. Without loss of generality we can assume that $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 4$, $e = 3$. We will define labelling of neighbourhood of any vertex (i, j) of embedded graph G^∞ by the following condition: if $\mu((i, j)) = x$, $x \in M$, then $\mu((i + 1, j)) = x \oplus_5 1$, $\mu((i - 1, j)) = x \oplus_5 (-1)$, $\mu((i, j + 1)) = x \oplus_5 2$, $\mu((i, j - 1)) = x \oplus_5 (-2)$, where $\oplus_5$ denote modulo 5 addition (consult Fig. 2 for illustration). Let graph G^∞ labelled in accordance with the above rule. Since the automaton "sees" only vertex labels and not their names, it follows that we must set the directions on the D-graph G^∞ in the language "understandable" to the automaton. Let the automaton is on the vertex (i, j) with label $a \in M$. We will say that the vertex with label $a \oplus_5 1$ (i.e. the vertex $(i + 1, j)$) is in the "east", the vertex with label $a \oplus_5 (-1)$ (i.e. the vertex $(i - 1, j)$) is in the "west", the vertex with label $a \oplus_5 2$ (i.e. the vertex $(i, j + 1)$) is in the "north", and the vertex with label $a \oplus_5 (-2)$ (i.e. the vertex $(i, j - 1)$) is in the "south". Then "east" denotes the direction $(1, 0)$, "west", the direction $(-1, 0)$, "north", the direction $(0, 1)$, and "south", the direction $(0, -1)$. Moving eastward the automaton every times moves to a vertex whose label is equal

to the sum modulo 5 label of the current vertex and 1. The movements to the "west", "north" and "south" are determine similarly.

If the automaton only moves in one of four basic directions ("east", "west", "north" or "south") then the equality $v(t + T) - v(t) = v(t + 2T) - v(t + T)$ holds for $T = 1$ for any time moment t . This means that directional movement of the automaton is uniform.

This finished the proof. $\square$

Corollary 1.1. *For a minimal traversable deterministic labelling of any subgraph of G^∞ with maximum degree 4 it is necessary and sufficient to have five types of labels.*

Consider minimal traversable D-labellings of subgraphs of the graph G^∞ , whose degrees are less than 4.

Theorem 2. *For a minimal traversable deterministic labelling of $G^{(\infty,2)}$ it is necessary and sufficient to have five types of labels.*

Proof. Consider an embedding of graph $G^{\infty,2}$ on the grid $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. For any vertex v of graph $G^{\infty,2}$ the equality $|O(v)| = 4$ holds. Therefore four types of labels needed for D-labelling of closed neighbourhood of this vertex.

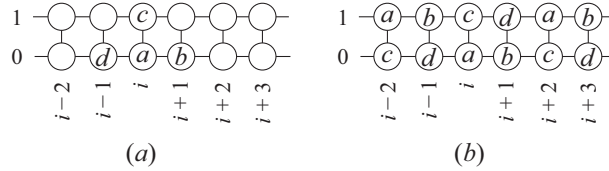


Fig. 3. A minimal D-labelling of graph $G^{(\infty,2)}$.

Let $M = \{a, b, c, d\}$. We will choose an arbitrary vertex $(i, 0)$ of embedded graph $G^{\infty,2}$ and define labelling of neighbourhood of this vertex as follows: $\mu((i, 0)) = a$, $\mu((i + 1, 0)) = b$, $\mu((i, 1)) = c$, $\mu((i - 1, 0)) = d$ (consult Fig. 3(a) for illustration). By definition of D-labelling, the vertex $(i + 1, 1)$ should be labelled by label d , the vertex $(i - 1, 1)$, by label b . After that, the vertices $(i - 2, 0)$ and $(i + 2, 0)$ should be labelled by label c , the vertices $(i - 2, 1)$ and $(i + 2, 1)$, by label a (consult Fig. 3(b) for illustration). We continue labelling in this fashion and obtain D-labelling of graph $G^{\infty,2}$ with four type of labels.

Let us check if this labelling is traversable. For the subgraph shown in Fig. 3(b), the equality $\mu((i, 0)) = \mu((i + 2, 1)) = a$ holds. Regardless of which vertex $(i, 0)$ or $(i + 2, 1)$ the automaton is on, its movement to a vertex with label b is the movement in the direction $(1, 0)$, and its movement to a vertex with label d is the movement in the direction $(-1, 0)$. But in the case of the vertex $(i, 0)$, the automaton movement to the vertex with label c is a movement in the direction $(0, 1)$, and in the case of the vertex $(i + 2, 1)$, the movement in the direction $(0, -1)$. Therefore, four different labels is not enough for a minimal traversable D-labelling of the graph $G^{\infty,2}$.

A traversable D-labelling of the graph G with five types of labels exists due to the fact that $G^{(\infty,2)}$ is a subgraph of the graph G^∞ . This finished the proof. $\square$

Theorem 3. *For a minimal traversable deterministic labelling of P^∞ it is necessary and sufficient to have three types of labels.*

Proof. Consider an embedding of graph P^∞ on the one-dimensional grid $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_1$. For any vertex v of graph P^∞ the equality $|O_{(v)}| = 3$ holds. Therefore three types of labels needed for D-labelling of closed neighbourhood of this vertex. We will choose an arbitrary vertex v of the graph P^∞ . Let $O_{(v)} = \{v, r, t\}$, $\mu(r) = a$, $\mu(v) = b$, $\mu(t) = c$, $\{a, b, c\} \subseteq M$. Next let $h \in O_{(r)}$ and $q \in O_{(t)}$, then vertex h is at a distance of 4 from vertex t and can be labelled by label c . Similarly vertex q is at a distance of 4 from vertex r and can be labelled by label a . We continue labelling in this fashion and obtain D-labelling of graph P^∞ with three type of labels. Therefore, such labelling is minimal.

Let $(i, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_1$ be an arbitrary vertex of embedded graph P^∞ with minimal D-labelling. By definition of D-graph it follows that $\mu((i, 0)) \neq \mu((i + 1, 0))$, $\mu((i, 0)) \neq \mu((i + 2, 0))$ and $\mu((i + 1, 0)) \neq \mu((i + 2, 0))$. As shown above $\mu((i, 0)) = \mu((i + 3, 0))$. Since the vertex $(i, 0)$ is chosen arbitrarily, it follows from the last equality that the minimal D-labelling of the graph P^∞ is periodic in the direction 3.

Next we prove that the minimal D-labelling of graph P^∞ is traversable. Without loss of generality we can assume $M = \{0, 1, 2\}$. In this case if $\mu(v) = a$, $a \in M$, then vertices adjacent to v have labels $b = a \oplus_3 1$ and $c = a \oplus_3 (-1)$, where $\oplus_3$ denotes addition modulo 3. Using this labelling, an automaton can move in two opposite directions, which we will nominally call "east" and "west". Let the automaton is on a vertex with label a . Moving eastward the automaton every time moves to a vertex with label b , and moving westward, to a vertex with label c .

Let the automaton only moves eastward (or only westward), then the equality $v(t + T) - v(t) = v(t + 2T) - v(t + T)$ holds for $T = 1$ for any time moment t . This means that directional movement of the automaton is uniform. This finished the proof. $\square$

4. Capabilities of a single automaton upon traversing G^∞ .

The infinite grid graph after constructing a minimal traversable deterministic labelling on it and fixing two pairs of opposite directions on it becomes an analogue of an infinite mosaic labyrinth without holes [1, 2]. The key problem for automata and labyrinths is the problem of constructing a finite automaton that traverse a given class of labyrinths, that is, an automaton in the initial state is placed at any vertex of any labyrinth from this class, and must visit all vertices of this labyrinth up to some moment of time [9]. We say that automaton traverse infinite graph G^∞ if it visits any randomly selected vertex of the graph in a finite time. In his paper [10], Andzhan prove that a collective of one automaton and three pebbles can traverse infinite mosaic labyrinth without holes and any collective with fewer pebbles cannot. We will show that methods and algorithms proposed in this work can be used to traverse infinite grid D-graph after modification associated with a changed concept of direction.

Theorem 4. *Any single automaton cannot explore D-graph G^∞ .*

Proof. Let automaton A infinitely moves along D-graph G^∞ . We first prove that there are at least two labels such that the automaton visits the vertices labelled with these labels infinitely many times whatever its trajectory. Without loss of generality we

can assume $M = \{a, b, c, d, e\}$ and graph G^∞ is marked as shown in Fig.4(a). Assume to the contrary that there is an infinite trajectory of automaton such that the number of entries in corresponding word is finite for any label. Let the automaton no longer visits vertices with label e from moment of time t_1 but visits vertices with labels a, b, c , and d (consult Fig. 4(b) for illustration). Next, let the automaton no longer visit vertices with label d from moment of time t_2 but visits vertices with labels a, b , and c (consult Fig. 4(c) for illustration). Finally, let the automaton no longer visit vertices with label c from moment of time t_3 but visits vertices with labels a and b (consult Fig. 4(d) for illustration). Since the automaton moves infinitely, we have that it will endlessly move between two adjacent vertices with labels a and b from moment of time t_3 . No further number of labels reduction possible. We have arrived at a contradiction. Hence the automaton visits the vertices with the same label infinitely many times when moving along the graph. Among them there exists vertices v_i and v_j on which the automaton A are in the same internal state. Since the behaviour of A depends only on internal state it follows that A will move from vertex $v(j)$ in the same direction as from vertex $v(i)$ i.e. $\mu(v(j+1)) = \mu(v(i+1))$. Then $v(j+1) - v(i+1) = v(j) - v(i)$. From the obvious equality $v(i + (j-i)) = v(i) + (v(j) - v(i))$ it follows that $v(t + (j-i)) = v(t) + (v(j) - v(i))$ holds for all $t > i$.

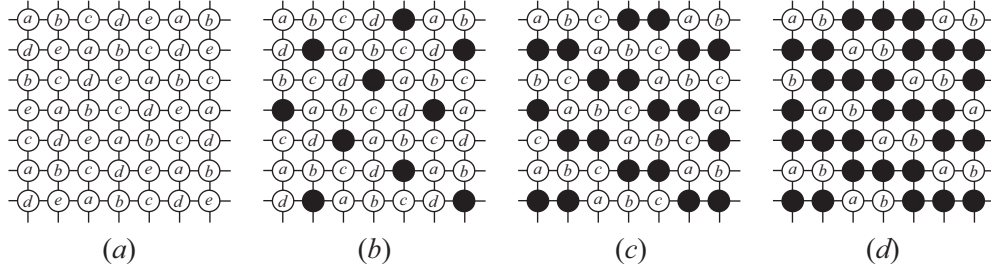


Fig. 4. Reduction of the number of labels using in automaton movement. (A) no reduction, (b) after the ban on use "e", (c) after the ban on use "d" and "e", (d) after the ban on use "c", "d", and "e".

We next prove that periodic trajectory of the automaton is inside some half-stripe. Let us draw a line l passing through the vertices v_i and v_j mentioned above. It follows from above that this line will passing through infinite amount of vertices belonging to the trajectory of the automaton A . Line l divides graph D^∞ into two half-grid subgraphs. Let us choose any of these subgraphs and find on it a vertex that belongs to the trajectory of the automaton and is the most distant from line l . We will draw a line passing through this vertex and parallel to the line l . This line is the first bound of the desired half-stripe. Since the trajectory of automaton is periodic, it follows that there are infinitely many vertices belong to both first bound and trajectory of automaton. The bound of the second half-stripe is drawn on the other subgraph in a similar way. Finally let us draw a line perpendicular to the bounds and passing through initial vertex of the trajectory of automaton. The set of vertices bounded by these lines forms desired half-stripe. From the obvious fact that any half-stripe don't cover graph 1, it

follows that the statement of the theorem is true. This finished the proof. $\square$

Corollary 4.1. *Any single automaton cannot explore D-graphs $G^{(+\infty, \infty)}$ and $G^{(\infty, n)}$.*

5. Capabilities of automaton with one pebble upon traversing G^∞ .

The impossibility to explore D-graph G^∞ by a single automaton poses the problem of possible enrichment of the automaton model which is able to solve exploration problem. Several enrichments are suggested. One of the most natural approaches is to give the automaton an ability to place additional labels on the vertices of the graph (or paint the vertices in some colours) [9]. In essence, the ability to colour vertices means that the automaton possesses an unbounded external memory, which greatly increases its possibilities. Another enhancement of a single automaton is a system of interacting automata referred to as a collective. In contrast to a single automaton a collective analyses a graph with regard for positions of its members there. If some members of the collective are automata of the simplest form whose positions are completely determined by the remaining automata of the collective then these simplest automata are called pebbles.

Theorem 5. *Any collective of one automaton and one pebble cannot explore D-graph G^∞ .*

Proof. Consider a collective of one automaton A_0 and one pebble A_1 . The proof is by case analysis. There are two cases:

1. A_0 and A_1 move together all the time.
2. A_0 can move away from A_1 .

Case 1: Suppose that automaton A_0 and pebble A_0 move together all the time. Then collective (A_0, A_1) operates like single automaton and cannot explore D-graph G^∞ by Theorem 4.

Case 2: Suppose that automaton A_0 can move away from pebble A_1 . This case splits into two subcases:

Case 2.1: A_0 and A_1 are together at the same vertex infinitely many times.

Case 2.2: A_0 and A_1 are together at the same vertex only a finite number of times.

Case 2.1: Suppose that automaton A_0 and pebble A_1 are together at the same vertex infinitely many times. Consider the infinite sequence of vertices on which A_0 and A_1 meet each other. In this sequence there is an infinite subsequence consisting of vertices with the same label. Among these vertices there are vertices $v(i)$ and $v(j)$, $i < j$, on which the automaton was in the same internal state. Since the behaviour of collective (A_0, A_1) depends only on the state of automaton A_0 it follows that collective (A_0, A_1) will move from vertex $v(j)$ in the same direction as from vertex $v(i)$. As in the proof of Theorem 4 we obtain that trajectory of collective (A_0, A_1) is periodic. Therefore this collective cannot explore D-graph G^∞ .

Case 2.2: Suppose that automaton A_0 and pebble A_1 are together at the same vertex only a finite number of times. Let $v(k)$ be the last vertex on which A_0 and A_1 were together. Then there exists two moments of time t' and t'' , $k < t' < t''$, such that automaton A_0 is in the same internal state on the vertices $v(t')$ and $v(t'')$, $\mu(v(t')) = \mu(v(t''))$. As in the proof of Theorem 4 we obtain that trajectory of automaton A_0 is periodic. Therefore collective (A_0, A_1) cannot explore D-graph G^∞ .

This finished the proof. $\square$

Corollary 5.1. *Any collective of one automaton and one pebble cannot explore any deterministic stripe graph.*

6. Capabilities of automaton with two pebbles upon traversing G^∞ .

Theorem 6. *Any collective of one automaton and two pebble cannot explore D-graph G^∞ .*

Proof. The idea of the proof is similar to that of Theorem 3 in [10]. Let automaton A_0 and pebbles A_1, A_2 are placed on the vertex $v(0)$ at the initial moment of time $t = 0$. Let predicate $R_{0,1}(t)$ denote that A_0 and A_1 are on the same vertex at the moment of time t , and predicate $R_{0,2}(t)$ denote the similar statement for A_0 and A_2 . We will denote by $s(t)$ the inner state of automaton A_0 at the moment of time t . By $D_{1,2}(t)$ denote the distance between A_1 and A_2 at the moment of time t .

If $R_{0,1}(t)$ holds only for a finite amount of natural t then after last rendezvous with A_2 the automaton A_0 and the pebble A_2 operate like a collective of one automaton and one pebble. Therefore this collective cannot explore D-graph G^∞ by Theorem 5 and the statement of the theorem is satisfied. The same reasoning applies to the case where $R_{0,2}(t)$ holds only for a finite amount of natural t . Further, we assume that $R_{0,1}(t)$ and $R_{0,2}(t)$ hold for an infinite amount of natural t .

Suppose the distance between A_1 and A_2 does not exceed a certain constant C while the collective (A_0, A_1, A_2) operates on the graph G^∞ , i.e. there exists an infinite amount of moments of time t_i , $i = 1, 2, \dots$, such that $D_{1,2}(t_i) < C$. Let $v_1(t_i)$ and $v_2(t_i)$ denote the vertices where the pebbles A_1 and A_2 are placed at the moment of time t_i . Consider the pairs $(v_2(t_i) - v_1(t_i), s(t_i))$. Since $v_2(t_i) - v_1(t_i)$ is an integer pair and $|v_2(t_i) - v_1(t_i)| = D_{1,2}(t_i)$, it follows that amount of different pairs $v_2(t_i) - v_1(t_i)$ is finite. Hence the amount of different pairs $(v_2(t_i) - v_1(t_i), s(t_i))$ is finite too and there exists two equal pairs in the infinite sequence of such pairs. This means that the trajectory of the collective (A_0, A_1, A_2) is periodic (the proof is similar to the proofs of Theorem 4 and 5). Therefore this collective cannot explore D-graph G^∞ in this case.

Suppose the distance between pebbles increases unlimitedly with increasing t . Consider the behaviour of automaton A_0 in very moment $t > T_0$ when $D_{1,2}(t)$ is greater than the number of internal states of A_0 . From the above it follows that automaton A_0 moves from the pebble A_1 to the pebble A_2 and returns back. Let $R_{0,1}(t_1)$ and $R_{0,2}(t_2)$ holds, $t_1 < t_2$, automaton A_0 moves from A_1 to A_2 and does not meet the pebbles in the time interval between t_1 and t_2 . Hence in the time interval from t_1 to t_2 automaton operates without pebbles. By Theorem 4 in this time interval trajectory of A_0 is inside some half-stripe. This half-stripe is said to be the *transition half-stripe*. The direction of transition half-stripe depends only on $s(t_i)$. Since the amount of inner states of A_0 is finite, we have the amount of transition half-stripes different in directions is finite too. The width of the half-stripes can be bounded by some constant C . The same conclusion can be drawn for the transition half-stripes from A_2 to A_1 .

Let $R_{0,1}(t_3)$ holds and A_0 does not meet A_1 in time interval between t_2 and t_3 i.e. $R_{0,1}(t_3)$ is the first rendezvous A_0 and A_1 after $R_{0,1}(t_1)$. We shall show that during the time interval from t_1 to t_3 the pebble A_2 will move a distance no more than the

amount n of inner states of A_0 . In fact, A_2 can only move with A_0 . If A_2 has moved a distance greater than n , then A_0 has moved with A_2 more than n times. Then at least twice A_0 has transited to the same inner state during the movements with A_2 . Therefore, by Theorem 5, the trajectory of the collective (A_0, A_2) is periodic and A_0 does not depart from A_2 further than the distance n . Hence at the moment of time t_3 (for which $R_{0,1}(t_3)$ holds) the pebbles A_1 and A_2 are at a distance less or equal to n from each other, which is impossible by assumption.

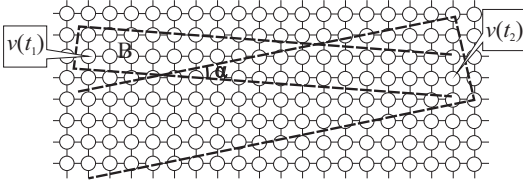


Fig. 5. A rational angle α between directions of half-stripes.

Let us prove that there exists $T_1 > T_0$ such that the directions of all arising transition half-stripes coincide with an accuracy of 180° for all $t > T_1$. Suppose the contrary, the directions of two consecutive transition half-stripes are not opposite. Let B denote the half-stripe arising from movement of A_0 from A_1 to A_2 . Assume A_1 stays on the vertex $v(t_1)$ and A_0 meets with A_2 on the vertex $v(t_2)$ for the first time after t_1 , $t_1 < t_2$. From the above it follows that automaton A_0 can move the pebble A_2 at a distance of no more than n from its current vertex $v(t_2)$. Consider all vertices at a distance of no more than n from $v(t_2)$. One of these vertices belongs to the second of the considered transition half-stripes. Since the width of all transition half-stripes is bounded by constant C , we have that trajectory of A_0 back to A_1 is entirely inside a half-stripe with a width at most $2C + 2n$ and a direction not opposite to that of the half-strip B . It is clear that this half-stripe include the vertex $v(t_1)$ iff $D_{1,2}(t_1)$ does not exceed an upper bound which depends only on a rational angle α between directions of half-stripes (consult Fig. 5 for illustration). Since automaton A_0 is finite, we have that amount of half-stripes different in direction is finite too. Hence the amount of different angles α is also finite. It follows that automaton A_0 will not return to A_1 with a sufficiently large $D_{1,2}(t_i)$. The resulting contradiction proves that directions of all transition half-stripes coincide with an accuracy of 180° from some moment of time.

Further, we will consider the behaviour of the collective (A_0, A_1, A_2) only for $t > T_1$. The only direction of the transition half-stripes at this time is called the *main direction*.

Let $R_{0,1}(t_1)$, $R_{0,2}(t_2)$, $R_{0,1}(t_3)$, $R_{0,2}(t_4)$ hold, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, and during time intervals (t_1, t_2) , (t_2, t_3) and (t_3, t_4) the automaton A_0 does not meet the pebbles A_1 and A_2 . Assume that $s(t_1) = s(t_3)$. The automaton A_0 leaves the pebble A_1 on its current vertex and moves along periodic trajectory to the pebble A_2 . A rendezvous of A_0 and A_2 can occur generally anywhere in the period of trajectory. Hence the states of the automaton can differ at time moments t_2 and t_4 . It follows that interaction of A_0 and A_2 and return to A_1 can differ too. The same departure leads to the same arrival iff the automaton trajectory differs only by an integer number of periods in both cases. Here we say that *period* is the automaton A_0 displacement vector and denote by $\vec{f}$. This vector is parallel to the main direction. Let $\vec{F}$ be a vector which connects current vertices of the pebbles A_1 and A_2 . We will subtract $\vec{f}$ from $\vec{F}$ until we get a vector

with minimal projection on the main direction. This vector we will call *the remainder of vector $\vec{F}$ from dividing by vector $\vec{f}$* and denote by $\text{rest}(t)$. Since the beginning and the end of vector $\vec{f}$ have integer coordinates, we have that the amount of remainders is finite. From the foregoing it follows that state $s(t_2)$ is completely determined by state $s(t_1)$ and the remainder of vector $\vec{F}$ from dividing by vector $\vec{f}$.

We will build a normal h to the main direction. Let us fix on h positive direction, starting point and scale coinciding with the scale on the coordinate axes. By $r(t)$ denote the difference between the numerical values of the projections of the vertices $v_1(t)$ and $v_2(t)$ on the axis h . Since for $t > T_1$ the direction of the half-stripe transition is constant, their width is bounded, the main direction forms with the coordinate axes an angle with a rational tangent, automaton A_0 moves the pebble at a distance of less than n for one approach, we have that $r(t)$ can take only a finite amount of different values.

Consider the moments of time $t_1 < t_2 < t_3 \dots$ at which $R_{0,1}(t_1), R_{0,1}(t_2), \dots$ hold. Let $P(i) = (s(t_i), r(t_i), \text{rest}(t_i))$, $i = 1, 2, \dots$. From the above it follows that $P(i+1)$ is completely determined by $P(i)$. Since every component of triple $P(i)$ takes only a finite amount of values, we have that there are a finite amount of such triples. Hence there exists two equal triples among them.

Let $P(k) = P(l)$, $k < l$, and $v_0(t)$ denote the vertex where the automaton A_0 is at moment of time t . The following two cases are possible.

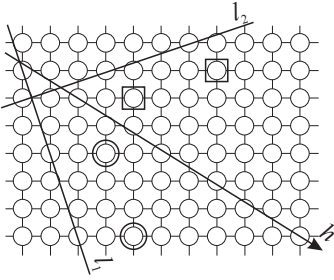


Fig. 6. An angle that automaton with two pebbles never exit. Circles indicate the vertices $v_1(t_q)$ and $v_1(t_u)$. Squares indicate the vertices $v_2(t_q)$ and $v_2(t_u)$

Case 1: the projections of the vertices $v_0(t_k)$ and $v_0(t)$ on the axis h are coincide with each other. Let us project the trajectory of automaton A_0 in the time interval from t_k to t_l on the axis h . It is clear that the trajectory will fit inside some finite segment. Let us draw lines through the ends of this segment parallel to the main direction. Since the automaton A_1 at moment of time $t_l + 1$ will move in the same direction as at moment of time $t_k + 1$, at moment of time $t_l + 2$ – in the same direction as at moment of time $t_k + 2$ etc., we have that afterwards automaton A_0 will not move outside the stripe bounded by these lines.

Case 2: the projections of the vertices $v_0(t_k)$ and $v_1(t_l)$ on the axis h are differ from each other. It is clear that $P(l + m(k - l)) = P(k)$ holds for all natural n . Hence there exists q and u , $q < u$, such that $P(q) = P(u)$ and projections of $v_0(t_q)$ and $v_0(t_u)$ are at a distance greater than $2n$. Let projection of $v_0(t_u)$ on the axis h be to the right of projection of $v_0(t_q)$. Therefore projection of $v_1(t_u)$ be to the right of projection of $v_1(t_q)$ and projection of $v_2(t_u)$ be to the right of projection of $v_2(t_q)$. This follows from the fact that automaton A_0 moves a pebble at a distance of less than n for one approach (consult Fig. 6 for illustration). Let us draw a line l_1 parallel to the line passing through the vertices $v_1(t_q)$ and $v_1(t_u)$ and another line l_2 parallel to the line passing through the vertices $v_2(t_q)$ and $v_2(t_u)$ so that all vertices visited by A_0 until t_v are inside angle formed by lines l_1 and l_2 . Automaton A_0 will never exit from this angle.

This finished the proof. $\square$

Corollary 6.1. *For every deterministic stripe graph, there exists a collective of one automaton and one pebble, which explores this graph.*

Corollary 6.2. *For every deterministic angle graph provided that its value less than 180° , there exists a collective of one automaton and one pebble, which explores this graph.*

7. Capabilities of automaton with three pebbles upon traversing G^∞ .

Theorem 7. *There exists a collective of one automaton and three pebbles which explore D-graph G^∞ .*

Proof. As the proof, we present algorithm for D-graph G^∞ exploration by automaton with three pebbles. The algorithm works as follows. In lines 1-5 automaton places pebbles to initial locations (consult Fig. 1(a) for illustration). During infinite loop of lines 6-27 automaton moves from pebble to pebble and places pebbles to new locations.

Algorithm 1. D-graph G^∞ exploration by automaton with three pebbles.

Require: A_0, A_1, A_2, A_3 are placed on arbitrary vertex of D-graph G^∞

Ensure: the trail of A_0 visiting every vertex of G^∞ at least once

```

1:  $A_0, A_1, A_2, A_3$  move to the 'northern' vertex
2:  $A_0, A_2, A_3$  move to the 'southern' vertex
3:  $A_0, A_2, A_3$  move to the 'western' vertex
4:  $A_0, A_3$  move to the 'eastern' vertex
5:  $A_0, A_3$  move to the 'eastern' vertex
6: loop
7:   while  $A_1$  isn't found on the current vertex do
8:      $A_0$  moves to the 'northern' vertex
9:      $A_0$  moves to the 'western' vertex
10:  end while
11:   $A_0, A_1$  move to the 'northern' vertex
12:   $A_0$  moves to the 'southern' vertex
13:  while  $A_2$  isn't found on the current vertex do
14:     $A_0$  moves to the 'western' vertex
15:     $A_0$  moves to the 'southern' vertex
16:  end while
17:   $A_0, A_2$  move to the 'western' vertex
18:   $A_0, A_2$  move to the 'southern' vertex
19:   $A_0, A_2$  move to the 'western' vertex
20:  while  $A_3$  isn't found on the 'northern' vertex do
21:     $A_0$  moves to the 'eastern' vertex
22:  end while
23:   $A_0$  moves to the 'northern' vertex
24:   $A_0, A_3$  move to the 'eastern' vertex
25:   $A_0, A_3$  move to the 'southern' vertex
26:   $A_0, A_3$  move to the 'eastern' vertex

```

27: end loop

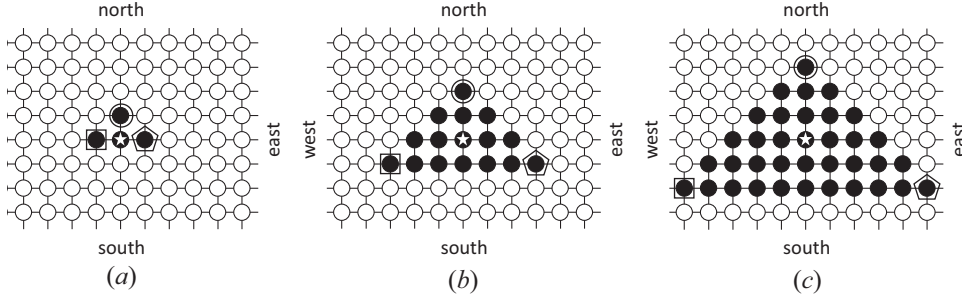


Fig. 7. The operation of Algorithm 1 on D-graph G^∞ . (A) after lines 1-5, (b) after first iteration, (c) after second iteration. Star indicates the initial vertex. Circle, square and pentagon indicate the current locations of A_1 , A_2 , A_3 , respectively.

To analyse the algorithm we need some notation. We will denote by $v_1(i)$, $v_2(i)$ and $v_3(i)$ the vertices on which the pebbles A_1 , A_2 and A_2 are placed after the algorithm's i iteration. Also we will denote by $[v_1(i), v_2(i)]$ the segment of the line passing through the vertices $v_1(i)$ and $v_2(i)$. The line segments $[v_1(i), v_3(i)]$ and $[v_2(i), v_3(i)]$ are defined similarly.

The main idea of the algorithm is to maintain an explored subgraph to which the newly explored parts of the graph are merged. After some iteration of algorithm let the automaton has already explored a connected subgraph of G^∞ such that its inner faces do not contain unvisited vertices. The set of all not-visited neighbours of visited vertices is called the fringe. In the next iteration the automaton should visit all vertices in the fringe and add them to explored subgraph. Not-visited neighbours of visited vertices form a new fringe etc. It is clear that an arbitrary fixed vertex of the graph will be visited over time proportional to the distance from this vertex to the initial vertex.

We proceed by induction on the number of algorithm's iterations. As a base case observe that after the first iteration all vertices inside and on the sides of the triangle bounded by $[v_1(i), v_2(i)]$, $[v_1(i), v_3(i)]$ and $[v_2(i), v_3(i)]$ are already visited by automaton A_0 (consult Fig. 7(b) for illustration). For the inductive step, let $k > 1$ be an integer, and assume that after the k iteration all vertices inside and on the sides of the triangle bounded by $[v_1(k), v_2(k)]$, $[v_1(k), v_3(k)]$ and $[v_2(k), v_3(k)]$ are already visited by automaton A_0 . We want to show that the similar statement holds for $k + 1$ iteration. All vertices on the line segment $[v_1(k + 1), v_3(k + 1)]$ are 'northern' neighbours of vertices on the line segment $[v_1(k), v_3(k)]$ except the vertex $v_3(k + 1)$ and 'eastern' neighbour of the vertex $v_3(k)$. A_0 visits all these vertices due to the lines 7-11 and 24-26. All vertices on the line segment $[v_1(k + 1), v_2(k + 1)]$ are 'northern' neighbours of vertices on the line segment $[v_1(k), v_2(k)]$ except the vertex $v_2(k + 1)$ and 'western' neighbour of the vertex $v_2(k)$. The vertex $v_1(k + 1)$ has been visited earlier. A_0 visits all remaining vertices due to the lines 13-19. All vertices on the line segment $[v_2(k + 1), v_3(k + 1)]$ are 'southern' neighbours of vertices on the line segment $[v_2(k), v_3(k)]$. The vertex $v_2(k + 1)$

has been visited earlier. A_0 visits all remaining vertices due to the lines 20-26. This completes the proof. $\square$

8. Conclusion.

This work proposes the vertex labelling of the infinite square grid graph, due to which the graph-walking automaton can move along it in any arbitrarily chosen direction. It is shown that a collective of one automaton and three pebbles can explore infinite square grid graph with such labelling and any collective with fewer pebbles cannot. The results regarding to exploration of the infinite square grid graph coincide with the results of A.V. Andzhan (Andzans) regarding to traversal of the infinite mosaic labyrinth without holes. It is shown that infinite grid graph after constructing this labelling and fixing two pairs of opposite directions on it becomes an analogue of an infinite mosaic labyrinth without holes. For further investigation, the question of the minimum amount of different label types needed for the labeled square grid graph to be traversable by graph-walking automaton is of interest.

Цитированная литература

1. Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Ušćumlić Š. Independent systems of automata in labyrinths // *Discrete Mathematics and Applications*. – 2003. – Vol. 13, Is. 3. – P. 221–255.
2. Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Ušćumlić Š. Collectives of automata in labyrinths // *Discrete Mathematics and Applications*. – 2003. – Vol. 13, Is. 5. – P. 429–466.
3. Dudek G., Jenkin M. *Computational Principles of Mobile Robotics*. – Cambridge University Press, 2010.
4. Blum F., Kozen D. On the power of the compass (or, why mazes are easier to search than graphs) // *Proceedings of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (SFCS '78)*. IEEE Computer Society, Washington, DC, USA. 1978. –P. 132–142.
5. Donald B.R. The Compass That Steered Robotics. *Logic and Program Semantics*. – Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7230. Springer, 2012. – P. 50–65.
6. Курганский А.Н., Сапунов С.В. О направленном перемещении коллектива автоматов без компаса на одномерной целочисленной решетке // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. – 2016. – Т. 16, вып. 3. – С. 356–365.
7. Bondy J.A., Murty U.S.R. *Graph Theory*. – Springer-Verlag London, 2008. – 663 p.
8. Грунский И.С., Сапунов С.В. Восстановление графа операционной среды мобильного робота путем разметки вершин, пригодной для дальнейшей навигации // *Искусственный интеллект*. – 2012. – № 4. – С. 420–428.
9. Голубев Д.В. Об обходе графов автоматами с одной нестираемой краской // *Интеллектуальные системы*. – 1999. – Т. 4, вып. 1–2. – С. 243–272.
10. Анджан А.В. Возможности автоматов при обходе плоскости // *Проблемы передачи информации*. – 1983. – Т. 19, вып. 3. – С. 78–89.

References

1. Kilibarda, G., Kudryavtsev, V.B., Ušćumlić, Š. (2003) Independent systems of automata in labyrinths. *Discrete Mathematics and Applications*, 13(3), 221-255.
2. Kilibarda, G., Kudryavtsev, V.B., Ušćumlić, Š. (2003) Collectives of automata in labyrinths. *Discrete Mathematics and Applications*, 13(5), 429-466.

3. Dudek, G., Jenkin, M. (2010). *Computational Principles of Mobile Robotics*. Cambridge University Press.
4. Blum, F., Kozen, D. (1978). On the power of the compass (or, why mazes are easier to search than graphs). In *Proceedings of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (SFCS '78)* (pp. 132–142). IEEE Computer Society, Washington, DC, USA.
5. Donald, B.R. (2012). The Compass That Steered Robotics. In *Logic and Program Semantics* (pp. 50–65). Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7230. Springer.
6. Kurgansky, O.M., Sapunov, S.V. (2016). On the directional movement of a collective of automata without a compass on a one-dimensional integer lattice. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 16(3), 356–365 (in Russian).
7. Bondy, J.A., Murty, U.S.R. (2008). *Graph Theory*. Springer-Verlag London.
8. Grunsky, I.S., Sapunov, S.V. (2012). Reconstruction of the Graph of Operating Environment of Mobile Robot by Vertex Labeling Sufficient for Further Navigation. *Iskusstvennyy intellekt*, 4, 420–428 (in Russian).
9. Golubev, D.V. (1999). On graph traversal by automata with single indelible paint. *Intellektualnye sistemy*, 4(1–2), 243–272 (in Russian).
10. Andzhan, A.V. (1983). Capabilities of Automata upon Traversing a Plane. *Problems of Information Transmission*, 19(3), 235–244.

С.В. Сапунів

Колективи автоматів на детермінованому нескінченному графі решітки.

Автомати, які пересуваються по графах, є математичною формалізацією автономних мобільних агентів з обмеженою пам'яттю, що функціонують у дискретних середовищах. В рамках цієї моделі виникла та інтенсивно розвивається велика область досліджень поведінки автоматів в лабіринтах (лабіринти є орієнтованими графами спеціального виду, які укладено на двовимірній цілочисловій решітці). Дослідження з цього напрямку отримали великий спектр застосувань, наприклад, в задачах аналізу зображень та навігації мобільних роботів. Автомати, що функціонують у лабіринтах, можуть розрізняти напрямки, тобто вони мають компас. У цій роботі розглядається вершинна розмітка графу квадратної решітки, завдяки якій скінчений автомат без компаса може пересуватися по графі у довільному напрямку. Автомат отримує на свій вхід позначки усіх вершин із замкненого околу поточної вершини та пересувається поміж суміжними вершинами, обираючи цільову вершину за її позначкою. У роботі запропоновано так звану мінімальну детерміновану прохідну розмітку, яка задовольняє шуканій властивості. Розмітка називається детермінованою, якщо усі вершини із замкненого околу будь-якої вершини графу мають різні позначки. Доведено, що мінімальна детермінована прохідна вершинна розмітка графу квадратної решітки потребує п'ять різних типів позначок. Також мінімальні детерміновані прохідні розмітки підграфів графу квадратної решітки, ступінь яких менше чотирьох. Основною задачею про автомати та лабіринти є задача про побудову скінченого автомата, який обходить заданий клас лабіринтів. Казатимемо, що автомат обходить нескінчений граф, якщо він відвідує будь-яку довільно обрану вершину графу за скінчений час. Доведено, що колектив, який складається з одного автомата та трьох каменів, обходить нескінчений граф квадратної решітки з заданою на ньому мінімальною детермінованою прохідною розміткою, а ніякий колектив з меншим числом каменів цього зробити не може. Каміння розглядається як автомати найпростішого виду, пересування яких цілком визначається іншими автоматами колективу. Результати стосовно обходу нескінченного позначеного графу квадратної решітки збігаються з результатами

А.В. Анджана стосовно обходу нескінченного мозаїчного лабіринту без дірок. Таким чином граф квадратної решітки після побудови на ньому мінімальної детермінованої прохідної розмітки та фіксації двох пар протилежних напрямків стає аналогом нескінченного мозаїчного лабіринту без дірок.

Ключові слова: граф квадратної решітки, графовідний автомат, розмітка вершин, колектив автоматів.

*Institute of Applied Mathematics and Mechanics
of the NAS of Ukraine, Slavyansk
sapunov_sv@yahoo.com*

Received 19.06.19

УДК 517.5

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-15

©2019. Є.О. Севостьянов, С.О. Скворцов, Н.С. Ількевич

ПРО ПОВЕДІНКУ ОБЕРНЕНИХ ГОМЕОМОРФІЗМІВ В ТЕРМІНАХ ПРОСТИХ КІНЦІВ

В даній роботі доведено результати стосовно неперервного межового продовження одного класу відображень в термінах так званих простих кінців. Як відомо, навіть конформні відображення не мають неперервного евклідового продовження на межу довільної однозв'язної області, проте, прості кінці в сенсі Каратеодорі є одним з можливих підходів при розгляді даного питання. Аналогічна ситуація і з відображеннями більш загальної природи, що вивчаються в тексті даної статті. Тут розглянуто клас гомеоморфізмів областей евклідового простору, обернені до яких спотворюють модуль сімей кривих по типу нерівності Полецького з інтегрованою мажорантою. Для областей, що не є локально зв'язними на своїх межах, отримано теореми про одностайну неперервність вказаних класів в замиканні області, яке слід розуміти в термінах простих кінців.

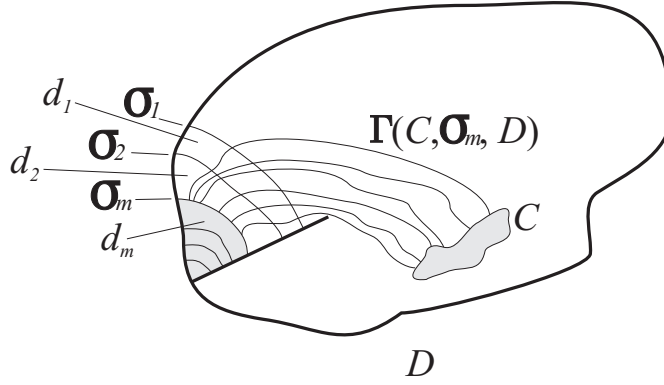
MSC: 30C65, 30D40, 31A15.

Ключові слова: квазіконформні відображення, модулі сімей кривих.

1. Вступ.

У нещодавніх роботах [1–2] отримані результати, що стосуються межової поведінки класів Орліча–Соболева і гомеоморфізмів, визначених шляхом спотворення модуля сімей кривих (поверхонь). Тут розглядалася ситуація, коли відображення визначені в областях зі складною межею. Серед іншого, у вказаних роботах було встановлено можливість неперервного продовження відповідних обернених відображень в межові точки, якщо мажоранта, що відповідає за оцінки модуля, інтегровна (див. [1, теорема 6.1], [2, теорема 1]). Під «межевими точками» слід розуміти прості кінці, оскільки в областях складної структури навіть конформні відображення можуть виявитись розривними на межі в звичайному сенсі. У цій статті ми покажемо, що вказаний клас обернених гомеоморфізмів є одностайно неперервним в замиканні заданої області, яке визначається додаванням до неї усіх її простих кінців. Зауважимо, що в [3] були опубліковані деякі частинні випадки наведених нижче тверджень, проте, в даній роботі ми розглядаємо значно більш загальний випадок. Означення і позначення, що присутні далі, але не наведені в тексті, можна знайти, напр., в монографії [4].

Нагадаємо деякі означення (див., напр., [2]). Нехай ω – відкрита множина в $\mathbb{R}^k$, $k = 1, \dots, n - 1$. Неперервне відображення $\sigma: \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ називається k -вимірною поверхнею в $\mathbb{R}^n$. Поверхнею будемо називати довільну $(n - 1)$ -вимірну поверхню σ в $\mathbb{R}^n$. Поверхня σ називається жордановою поверхнею, якщо $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ при $x \neq y$. Далі ми іноді будемо використовувати σ для позначення всього образу $\sigma(\omega) \subset \mathbb{R}^n$ при відображенні σ , $\bar{\sigma}$ замість $\overline{\sigma(\omega)}$ в $\mathbb{R}^n$ і $\partial\sigma$ замість $\overline{\sigma(\omega)} \setminus \sigma(\omega)$. Жорданова поверхня $\sigma: \omega \rightarrow D$ в області D називається розрізом області D , якщо σ розділяє



Мал. 1. Простий кінець в області

D , тобто $D \setminus \sigma$ має більше однієї компоненти, $\partial\sigma \cap D = \emptyset$ і $\partial\sigma \cap \partial D \neq \emptyset$.

Послідовність $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$ розрізів області D називається *ланцюгом*, якщо:

(i) множина σ_{m+1} міститься в точності в одній компоненті d_m множини $D \setminus \sigma_m$, при цьому, $\sigma_{m-1} \subset D \setminus (\sigma_m \cup d_m)$; (ii) $\bigcap_{m=1}^{\infty} d_m = \emptyset$.

Два ланцюги розрізів $\{\sigma_m\}$ і $\{\sigma'_k\}$ називаються *еквівалентними*, якщо для кожного $m = 1, 2, \dots$ область d_m містить всі області d'_k за виключенням скінченної кількості, і для кожного $k = 1, 2, \dots$ область d'_k також містить всі області d_m за виключенням скінченної кількості.

Кінець області D – це клас еквівалентних ланцюгів розрізів області D . Нехай K – кінець області D в $\mathbb{R}^n$, тоді множина $I(K) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}$ називається *тілом кінця* K .

Скрізь далі, як зазвичай, $\Gamma(E, F, D)$ позначає сім'ю всіх таких кривих $\gamma: [a, b] \rightarrow D$, що $\gamma(a) \in E$ і $\gamma(b) \in F$, крім того, $M(\Gamma)$ позначає модуль сім'ї кривих Γ в $\mathbb{R}^n$, а запис $\rho \in \text{adm } \Gamma$ означає, що функція ρ борелева, невід'ємна і має довжину, не меншу ніж одиницю, в метриці ρ (див. [5–7]). Слідуючи [5], будемо говорити, що кінець K є *простим кінцем*, якщо K містить ланцюг розрізів $\{\sigma_m\}$, такий, що $M(\Gamma(\sigma_m, \sigma_{m+1}, D)) < \infty$ при всіх $m \in \mathbb{N}$ і $\lim_{m \rightarrow \infty} M(\Gamma(C, \sigma_m, D)) = 0$ для деякого континууму C в D (див. малюнок 1). Далі використовуються наступні позначення: множина простих кінців, що відповідають області D , позначається символом E_D , а поповнення області D її простими кінцями позначається $\overline{D}_P$.

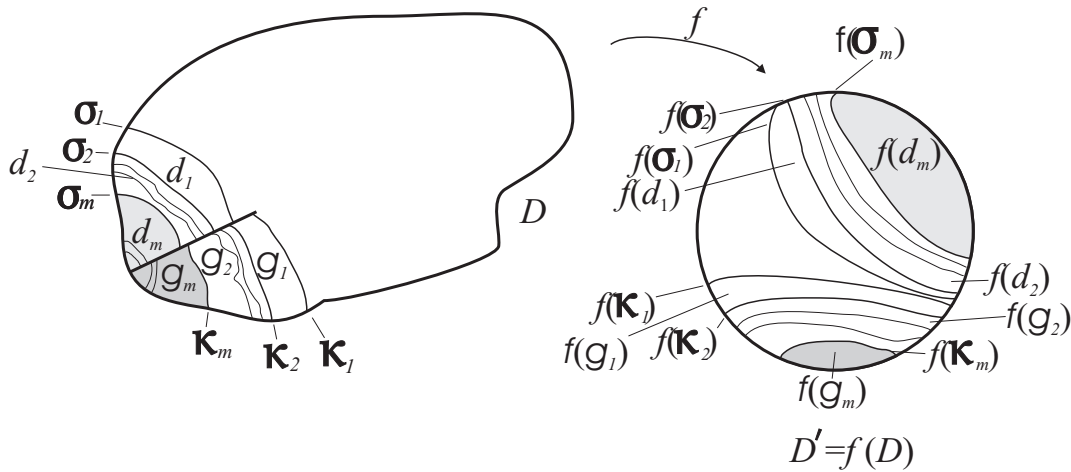
Будемо говорити, що межа області D в $\mathbb{R}^n$ є *локально квазіконформною*, якщо кожна точка $x_0 \in \partial D$ має окіл U в $\mathbb{R}^n$, який може бути відображений квазіконформним відображенням φ на одиничну кулю $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ так, що $\varphi(\partial D \cap U)$ є перетином $\mathbb{B}^n$ з координатною гіперплощиною. Розглянемо також наступне означення (див. [2]). Для множин $E \subset \mathbb{R}^n$ і $A, B \subset \mathbb{R}^n$ покладемо

$$d(E) := \sup_{x, y \in E} |x - y|, \quad d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|.$$

Будемо називати ланцюг розрізів $\{\sigma_m\}$ *регулярним*, якщо $\overline{\sigma_m} \cap \overline{\sigma_{m+1}} = \emptyset$ при кожному $m \in \mathbb{N}$ і, крім того, $d(\sigma_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Якщо кінець K містить принаймні один регулярний ланцюг, то K будемо називати *регулярним*. Говоримо, що обмежена область D в $\mathbb{R}^n$ *регулярна*, якщо D може бути квазіконформно відображена на область з локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом в $\mathbb{R}^n$. Зауважимо, що у просторі $\mathbb{R}^n$ кожний простий кінець регулярної області містить ланцюг розрізів з властивістю $d(\sigma_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, і навпаки, якщо у кінця є вказана властивість, то він – простий (див. [5, теорема 5.1]). Крім того, замикання $\overline{D}_P$ регулярної області D є *метризовним*, при цьому, якщо $g : D_0 \rightarrow D$ – квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D , то для $x, y \in \overline{D}_P$ покладемо:

$$\rho(x, y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|, \quad (1)$$

де для $x \in E_D$ елемент $g^{-1}(x)$ розуміється як деяка (єдина) точка межі D_0 , коректно визначена з огляду на [5, теорема 4.1]. Зокрема, будемо говорити, що послідовність $x_m \in D$, $m = 1, 2, \dots$, *збігається* до простого кінця $P \in E_D$ при $m \rightarrow \infty$, якщо для будь-якого натурального $k \in \mathbb{N}$ всі елементи послідовності x_m , крім скінченної кількості, належать області d_k (де d_k , $k = 1, 2, \dots$ – послідовність вкладених областей з означення простого кінця P). Якщо f – гомеоморфізм області D на D' , то не важко переконатись, що між кінцями областей D і $D' = f(D)$ є взаємно однозначна відповідність (див. малюнок 2).



Мал. 2. Відповідність простих кінців при відображенні

Відображення $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ будемо називати *Q-відображенням*, якщо f задовольняє співвідношення

$$M(f(\Gamma)) \leq \int_D Q(x) \cdot \rho^n(x) dm(x) \quad (2)$$

для будь-якої сім'ї кривих Γ в області D і кожної допустимої функції $\rho \in \text{adm } \Gamma$.

Нехай (X, d) і (X', d') – метричні простори з метриками d і d' , відповідно. Сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f : X \rightarrow X'$ називається *одностайно неперервною в точці $x_0 \in X$* , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, таке, що $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всіх $f \in \mathfrak{F}$ і для всіх $x \in X$ таких, що $d(x, x_0) < \delta$. Кажуть, що $\mathfrak{F}$ *одностайно неперервна*, якщо $\mathfrak{F}$ є одностайно неперервною в кожній точці з $x_0 \in X$. Скрізь далі, якщо не сказано протилежне, d – одна з метрик в $\overline{D}_P$, згаданих вище, а d' – одна з метрик в $\overline{D}'_P$.

Для числа $\delta > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, континууму $A \subset D$ і довільної вимірної за Лебегом функції $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$, $Q(x) \equiv 0$ при $x \notin D$, позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(D, D')$ сім'ю всіх відображень $h : D' \rightarrow D$ таких, що $f = h^{-1}$ – гомеоморфізм області D на D' з умовою (2), при цьому, $d(f(A)) \geq \delta$. Виконується наступне твердження.

Теорема 1.1. *Нехай області D і $D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, регулярні і будь-яка компонента зв'язності $\partial D'$ є невідокремленим континуумом. Якщо $Q \in L^1(D)$, то кожне відображення $h \in \mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(D, D')$ продовжується за неперервністю до відображення $\bar{h} : \overline{D}'_P \rightarrow \overline{D}_P$, $\bar{h}|_{D'} = h$, при цьому, $\bar{h}(\overline{D}'_P) = \overline{D}_P$ і сім'я $\mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(\overline{D}_P, \overline{D}'_P)$, що складається із всіх продовжених відображень $\bar{h} : \overline{D}'_P \rightarrow \overline{D}_P$, є одностайно неперервною в $\overline{D}'_P$.*

2. Допоміжні твердження.

Нехай I – відкритий, замкнений, або напіввідкритий інтервал в $\mathbb{R}$. Як зазвичай, для кривої $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ покладемо:

$$|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] : \gamma(t) = x\},$$

при цьому, $|\gamma|$ називається *носієм (образом) γ* . Будемо говорити, що крива γ лежить в області D , якщо $|\gamma| \subset D$, крім того, будемо говорити, що криві γ_1 і γ_2 не перетинаються, якщо не перетинаються їх носії.

За означенням, простому кінцю $P \in E_D$ відповідає послідовність вкладених одна в одну областей d_m , $m \geq 1$, при цьому, якщо $P \in D$, то будемо вважати, що P відповідає послідовність куль $B(P, r_m)$ з радіусами $r_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, $r_m > 0$, що лежать в області D разом із своїм замиканням. (Взагалі кажучи, така послідовність куль не відповідає деякому простому кінцю в тому сенсі слова, що ми використовуємо).

Наступне твердження було встановлене в статті [6, пропозиція 1].

Пропозиція 2.1. *Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, локально зв'язна на своїй межі. Тоді будь-які дві пари точок $a \in D, b \in \overline{D}$, і $c \in D, d \in \overline{D}$ можна з'єднати непересічними кривими $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \overline{D}$ і $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \overline{D}$, такими, що $\gamma_i(t) \in D$ при всіх $t \in (0, 1)$, $i = 1, 2$, $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b$, $\gamma_2(0) = c$, $\gamma_2(1) = d$.*

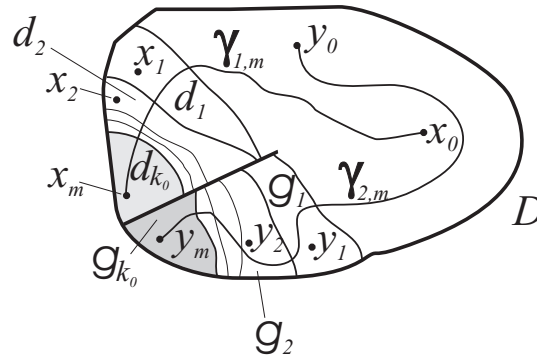
Межа області D називається *слабко плоскою* в точці $x_0 \in \partial D$, якщо для кожного $P > 0$ і для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ цієї ж точки такий, що $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ для довільних континуумів $E, F \subset D$, що

перетинають ∂U і ∂V . Межа області D називається слабо плоскою, якщо відповідна властивість виконується в кожній точці межі D . Доведення наступного твердження дослівно повторює доведення [7, теорема 17.10], і тому не наводиться.

Пропозиція 2.2. Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – область з локально квазіконформною межею, тоді межа цієї області є слабо плоскою. Крім того, окіл U в означенні локально квазіконформної межі може бути взятий як завгодно малим, при цьому, в означенні можна вважати $\varphi(x_0) = 0$.

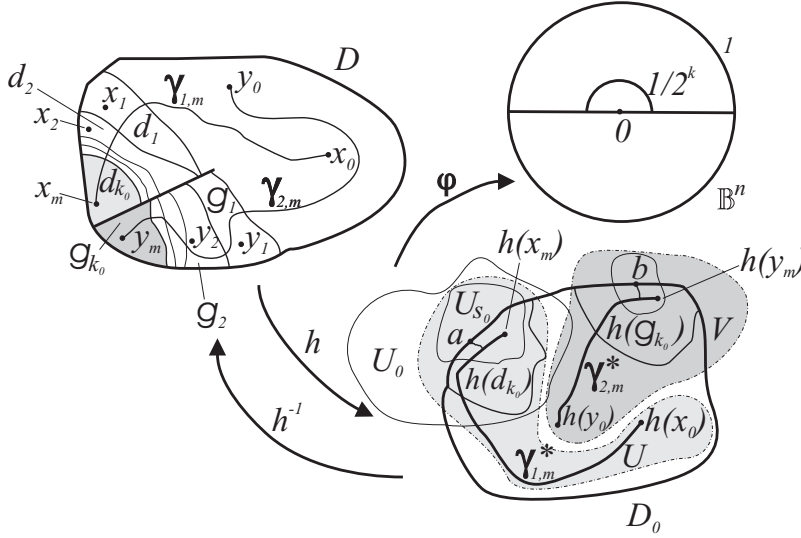
Наступне твердження вказує на можливість «зручного» з'єднання кривими точок регулярної області.

Лема 2.1. Нехай область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, регулярна, і нехай послідовності $x_m, y_m \in D$, $m = 1, 2, \dots$, збігаються при $m \rightarrow \infty$ до різних елементів $P_1, P_2 \in \overline{D}_P$. Припустимо, що d_m, g_m , $m = 1, 2, \dots$, – послідовності спадних областей, що відповідають P_1 і P_2 , $d_1 \cap g_1 = \emptyset$ і $x_0, y_0 \in D \setminus (d_1 \cup g_1)$. Тоді існують k_0 і $M_0 \in \mathbb{N}$, такі що при всіх $m \geq M_0$ виконується наступна умова: знайдуться непересічні криві $\gamma_{i,m} : [0, 1] \rightarrow D$, $i = 1, 2$, $\gamma_{1,m}(0) = x_0$, $\gamma_{1,m}(1) = x_m$, $\gamma_{2,m}(0) = y_0$, $\gamma_{2,m}(1) = y_m$, такі що $|\gamma_{1,m}| \cap \overline{g_{k_0}} = \emptyset = |\gamma_{2,m}| \cap \overline{d_{k_0}}$ (див. малюнок 3).



Мал. 3. До твердження леми 2.1

Доведення. Оскільки за умовою D – регулярна область, вона може бути відображена на деяку область D_0 з локально квазіконформною межею за допомогою (деякого) квазіконформного відображення $h : D \rightarrow D_0$. Зауважимо, що область D_0 локально зв'язна на своїй межі, що впливає безпосередньо з означення локальної квазіконформності. Крім того, якщо P_1 і P_2 – різні прості кінці в D , то $h(P_1)$ і $h(P_2)$ – прості кінці в D_0 , при цьому, тілами цих кінців $I(h(P_1))$ і $I(h(P_2))$ є деякі різні точки a і b межі D_0 (див. [5, теорема 4.1]). Якщо ж P_1 (або P_2) – внутрішні точки D , то $h(P_1)$ (або $h(P_2)$) – внутрішні точки області D_0 , які позначимо через a і b , відповідно. Оскільки за умовою $x_0, y_0 \in D \setminus (d_1 \cup g_1)$, то, зокрема, $P_1 \neq x_0 \neq P_2$, $P_1 \neq y_0 \neq P_2$. Звідси випливає, що $a, b, h(x_0), h(y_0)$ – чотири різні точки в $\overline{D_0}$, із яких не менше двох є внутрішніми відносно D_0 . Див. ілюстрацію до проведених тут міркувань на малюнку 4. За твердженням 2.1 можна з'єднати точки a і $h(x_0)$ і точки b і $h(y_0)$ непересічними кривими $\alpha : [0, 1] \rightarrow \overline{D_0}$ і $\beta : [0, 1] \rightarrow \overline{D_0}$ так, що



Мал. 4. До доведення лема 2.1

$|\alpha| \cap |\beta| = \emptyset$, $\alpha(t), \beta(t) \in D$ при всіх $t \in (0, 1)$, $\alpha(0) = h(x_0)$, $\alpha(1) = a$, $\beta(0) = h(y_0)$ і $\beta(1) = b$. Так як $\mathbb{R}^n$ є нормальним топологічним простором, образи $|\alpha|$ і $|\beta|$ кривих α і β мають непересічні відкриті околи

$$U \supset |\alpha|, \quad V \supset |\beta|. \quad (3)$$

Можливі два випадки: або $h(P_1)$ – простий кінець в E_{D_0} , або точка в D_0 . Нехай $h(P_1)$ – простий кінець в E_{D_0} . Оскільки $I(h(P_1)) = a$, то знайдеться номер $k_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $\overline{h(d_k)} \subset U$ при $k \geq k_1$. Якщо ж $h(P_1)$ – точка області D , то також знайдеться номер $k_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $\overline{h(d_k)} \subset U$ при всіх $k \geq k_1$, де $d_k := B(P_1, r_k)$, $r_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $r_k > 0$. В обох випадках $\overline{h(d_k)} \subset U$ при $k \geq k_1$. Аналогічно, знайдеться номер $k_2 \in \mathbb{N}$ такий, що $\overline{h(g_k)} \subset V$ при всіх $k \geq k_2$. Тоді при $k_0 := \max\{k_1, k_2\}$ маємо:

$$\overline{h(d_k)} \subset U, \quad \overline{h(g_k)} \subset V, \quad U \cap V = \emptyset, \quad k \geq k_0. \quad (4)$$

Оскільки послідовність x_m збігається до P_1 , то послідовність $h(x_m)$ збігається до a , отже, знайдеться номер $m_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $h(x_m) \in h(d_{k_0})$, $m \geq m_1$. Аналогічно, оскільки послідовність y_m збігається до кінця P_2 , то послідовність $h(y_m)$ збігається до b , отже, знайдеться номер $m_2 \in \mathbb{N}$ такий, що $h(y_m) \in h(g_{k_0})$, $m \geq m_2$. Покладемо $M_0 := \max\{m_1, m_2\}$. Покажемо, що

$$|\alpha| \cap h(d_{k_0}) \neq \emptyset, \quad |\beta| \cap h(g_{k_0}) \neq \emptyset. \quad (5)$$

Досить встановити перше із цих співвідношень, оскільки друге співвідношення можна довести аналогічно. Якщо $a = h(P_1)$ – внутрішня точка D_0 , то дане включення очевидне. Нехай тепер $h(P_1)$ – простий кінець в E_{D_0} . Оскільки область

D_0 має локально квазіконформну межу, знайдеться послідовність сфер $S(0, 1/2^k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, спадна послідовність околів U_k точки a і деяке квазіконформне відображення $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{B}^n$, для яких $\varphi(U_k) = B(0, 1/2^k)$, $\varphi(\partial U_k \cap D_0) = S(0, 1/2^k) \cap \mathbb{B}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : |x| < 1, x_n > 0\}$ (див. роздуми при доведенні [5, лема 3.5]). Зауважимо, що $U_k \cap D_0$ є областю, так як $U_k \cap D_0 = \varphi^{-1}(B_+(0, 1/2^k))$, $B_+(0, 1/2^k) = \{x = (x_1, \dots, x_n) : |x| < 1/2^k, x_n > 0\}$, і φ – гомеоморфізм. Крім того, послідовність областей $U_k \cap D_0$ відповідає деякому простому кінцю, тілом якого є точка a , а відповідними розрізами є множини $\sigma_k := \partial U_k \cap D_0$. За [5, теорема 4.1] точка $a \in D_0$ відповідає лише одному простому кінцю, отже, будь-яка область $h(d_m)$ містить всі області $U_k \cap D_0$, за виключенням скінченної кількості, і навпаки. Зокрема, знайдеться $s_0 \in \mathbb{N} : U_k \cap D_0 \subset h(d_{k_0})$ при всіх $k \geq s_0$. Оскільки $a \in |\alpha|$, знайдеться $t_0 \in (0, 1)$ таке, що $p := \alpha(t_0) \in U_{s_0} \cap D_0$. Але тоді також $p \in h(d_{k_0})$, так як $U_{s_0} \cap D_0 \subset h(d_{k_0})$. Перше із співвідношень в (5) встановлене.

Отже, нехай $p := \alpha(t_0) \in |\alpha| \cap h(d_{k_0})$. Зафіксуємо $m \geq M_0$ і з'єднаємо точку p з точкою $h(x_m)$ кривою $\alpha_m : [t_0, 1] \rightarrow h(d_{k_0})$ так, що $\alpha_m(t_0) = p$, $\alpha_m(1) = h(x_m)$, що можливо, тому що $h(d_{k_0})$ – область. Покладемо

$$\gamma_{1,m}^*(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in [0, t_0], \\ \alpha_m(t), & t \in [t_0, 1] \end{cases}. \quad (6)$$

Зауважимо, що крива $\gamma_{1,m}^*$ повністю лежить в U .

Аналогічно міркуючи, маємо точку $t_1 \in (0, 1)$ і точку $q := \beta(t_1) \in |\beta| \cap h(g_{k_0})$. Зафіксуємо $m \geq M_0$ і з'єднаємо точку q з точкою $h(y_m)$ кривою $\beta_m : [t_1, 1] \rightarrow h(g_{k_0})$ так, що $\beta_m(t_1) = q$, $\beta_m(1) = h(y_m)$, що можливо, тому що $h(g_{k_0})$ – область. Покладемо

$$\gamma_{2,m}^*(t) = \begin{cases} \beta(t), & t \in [0, t_1], \\ \beta_m(t), & t \in [t_1, 1] \end{cases}. \quad (7)$$

Зауважимо, що крива $\gamma_{2,m}^*$ повністю лежить в V . Покладемо

$$\gamma_{1,m} := h^{-1}(\gamma_{1,m}^*), \quad \gamma_{2,m} := h^{-1}(\gamma_{2,m}^*). \quad (8)$$

Зауважимо, що криві $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ задовольняють всі умови, перераховані в висновку леми 2.1, $m \geq M_0$. Справді, ці криві за означенням з'єднують точки x_m і x_0 , y_m і y_0 , відповідно. Криві $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ не перетинаються, оскільки їх образи при відображенні h належать непересічним околам U і V , відповідно. Зауважимо також, що $|\gamma_{1,m}| \cap \overline{g_{k_0}} = \emptyset$ при $m \geq M_0$. Справді, якщо $x \in |\gamma_{1,m}| \cap g_{k_0}$, то $h(x) \in |\gamma_{1,m}^*| \cap h(g_{k_0}) \subset U \cap h(g_{k_0})$, що неможливо з огляду на співвідношення (4). Якщо ж $x \in |\gamma_{1,m}| \cap \partial g_{k_0}$, то $h(x) \in \overline{h(g_{k_0})} \cap |\gamma_{1,m}^*|$, що також суперечить (4).

Аналогічно, $|\gamma_{2,m}| \cap g_{k_0} = \emptyset$ при $m \geq M_0$. Лема доведена. $\square$

Розглянемо сім'ю кривих, що з'єднують образи кривих $\gamma_{1,m}$ і $\gamma_{2,m}$ з попередньої леми. Наступне твердження містить в собі верхню оцінку модуля перетвореної сім'ї кривих при відображенні f з нерівністю (2).

Лема 2.2. *Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – регулярна область в $\mathbb{R}^n$ і $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – неперервне відображення, що задовольняє оцінку (2) з деякою $Q \in L^1(D)$. Тоді в*

умовах і позначеннях лема 2.1 знайдеться стала $0 < N < \infty$, що не залежить від параметру m і відображення f , така що $M(f(\Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D))) \leq N$ при всіх $m \geq M_0$, де M_0 – номер із формулювання лема 2.1.

Доведення. Нехай $l(\gamma)$ означає довжину кривої γ , а $|\gamma|$ – носій (образ) кривої γ . Покладемо $\Gamma_m := \Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D)$. Покажемо, що знайдеться $L_0 > 0$ такий, що $l(\gamma) > L_0$ для всіх $\gamma \in \Gamma_m$ і всіх $m \geq M_0$. Зафіксуємо таке m і криву $\gamma \in \Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D)$. Нехай $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$, $\gamma(0) \in |\gamma_{1,m}|$, $\gamma(1) \in |\gamma_{2,m}|$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in (0, 1)$. Можливі дві ситуації: **1)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$; **2)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$, див. співвідношення (6) і (8).

Розглянемо ситуацію **1)**. Нехай $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$. Можливі два підвипадки: **1.1)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta|)$; **1.2)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|)$.

Нехай виконується **1.1)**, тобто, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta|)$. Тоді, очевидно, що

$$l(\gamma) \geq d(h^{-1}(|\alpha|), h^{-1}(|\beta|)) > 0, \quad (9)$$

оскільки h – гомеоморфізм, криві α і β не перетинаються за побудовою, а крива γ з'єднує $|\alpha|$ і $|\beta|$. Нехай тепер виконується **1.2)**, тобто, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|)$. Тоді $|\gamma| \cap |g_{k_0}| \neq \emptyset \neq |\gamma| \cap (D \setminus |g_{k_0}|)$, оскільки $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha|) \subset D \setminus g_{k_0}$ і $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|) \subset h^{-1}(g_{k_0})$. В такому випадку, з огляду на [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46] маємо: $|\gamma| \cap \partial g_{k_0} \neq \emptyset$. Зауважимо, що $\partial g_{k_0} \cap h^{-1}(|\alpha|) = \emptyset$ з огляду на (3)–(4). Таким чином, оскільки γ з'єднує точки множин ∂g_{k_0} і $h^{-1}(|\alpha|)$, то її довжина не менша ніж відстань між ними, тобто,

$$l(\gamma) \geq d(\partial g_{k_0}, h^{-1}(|\alpha|)) > 0. \quad (10)$$

Розглянемо ситуацію **2)**. Нехай $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$. Як вище, можливі два підвипадки: **2.1)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta|)$; **2.2)** $\gamma(0) \in h^{-1}(|\alpha_m|)$, $\gamma(1) \in h^{-1}(|\beta_m|)$.

Випадок **2.1)** зводиться до випадку **1.2)** заміною $\alpha_m \mapsto \beta_m$, $\alpha \mapsto \beta$ і перепараметризацією кривої γ у вигляді $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$. У цьому випадку ми маємо:

$$l(\gamma) \geq d(\partial d_{k_0}, h^{-1}(|\beta|)) > 0. \quad (11)$$

Нехай виконується **2.2)**, тоді, оскільки $|\beta_m| \subset h(g_{k_0})$ і $|\alpha_m| \subset h(d_{k_0})$ за побудовою, то $|\gamma| \cap \partial g_{k_0} \neq \emptyset \neq |\gamma| \cap \partial d_{k_0}$ з огляду на [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46]. За (3)–(4) маємо: $d(\partial g_{k_0} \cap D, \partial d_{k_0} \cap D) > 0$. Таким чином,

$$l(\gamma) \geq d(\partial g_{k_0} \cap D, \partial d_{k_0} \cap D) > 0. \quad (12)$$

Виходячи з розглянутих ситуацій **1)** і **2)**, на основі (9), (10), (11) і (12), маємо:

$$l(\gamma) \geq S_0, \quad (13)$$

$$S_0 := \min\{d(h^{-1}(|\alpha|), h^{-1}(|\beta|)), d(\partial g_{k_0}, h^{-1}(|\alpha|)), \\ d(\partial d_{k_0}, h^{-1}(|\beta|)), d(\partial g_{k_0} \cap D, \partial d_{k_0} \cap D)\}.$$

З (13) випливає, що функція $\rho(x) = 1/S_0$ при $x \in D$ і $\rho(x) = 0$ при $x \notin D$ допустима для Γ_m при $m \geq M_0$. Отже, за означенням відображень f в (2), маємо:

$$M(f(\Gamma_m)) \leq \frac{1}{S_0^n} \int_D Q(x) dm(x) = N = N(S_0, Q, D) < \infty,$$

оскільки за умовою $Q \in L^1(D)$. Лема доведена. $\square$

Наступне твердження вказує на те, що для деякого широкого класу відображень, що фіксують по діаметру деякий невироджений континуум, образ цього континууму при цих відображеннях не може наближатись до межі відповідної області.

Лема 2.3. *Припустимо, що область D регулярна, $\overline{D'}$ – компакт в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, D' має локально квазіконформну межу і $Q \in L^1(D)$. Якщо $f_m : D \rightarrow D'$ – послідовність Q -гомеоморфізмів області D на область D' , що задовольняють для деякого (фіксованого) континууму $A \subset D$ умову $d(f_m(A)) \geq \delta > 0$ при всіх $m = 1, 2, \dots$, то знайдеться $\delta_1 > 0$ таке, що $d(f_m(A), \partial D') > \delta_1 > 0$ для всіх $m \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Підемо від супротивного, тобто, припустимо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує $m = m_k : d(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$, де m_k , $k = 1, 2, \dots$ – деяка зростаюча послідовність номерів. За умовою $\overline{D'}$ – компакт, тому і $\partial D'$ також компакт як замкнута підмножина компакту $\overline{D'}$. Крім того, $f_{m_k}(A)$ компакт як неперервний образ компакту A . Тоді знайдуться $x_k \in f_{m_k}(A)$ і $y_k \in \partial D'$ такі, що $d(f_{m_k}(A), \partial D') = |x_k - y_k| < 1/k$. Так як $\partial D'$ – компакт, можна вважати, що $y_k \rightarrow y_0 \in \partial D'$, $k \rightarrow \infty$; тоді також

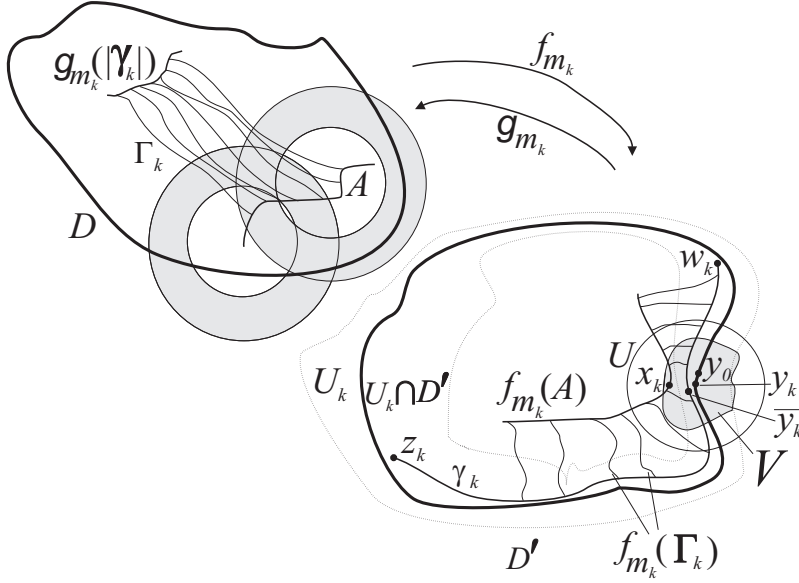
$$x_k \rightarrow y_0 \in \partial D', \quad k \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Нехай K_0 – зв'язна компонента $\partial D'$, що містить точку y_0 (див. малюнок 5). Оскільки D' має локально квазіконформну межу, то K_0 – невироджений континуум в $\mathbb{R}^n$. Зауважимо що, при кожному $k \in \mathbb{N}$ відображення $g_{m_k} := f_{m_k}^{-1}$ продовжується до неперервного відображення $g_{m_k} : \overline{D'_P} \rightarrow \overline{D_P}$, де $\overline{D'_P}$ і $\overline{D_P}$ – відповідні замикання у просторі простих кінців (див. [1, теорема 6.1] і [3, теорема 2]). З огляду на [5, теорема 4.1] прості кінці області D' можна ототожнювати з точками D' , при цьому, для двох простих кінців $P_1, P_2 \in E_{D'}$ за означенням маємо: $\rho_*(P_1, P_2) := |p_1 - p_2|$, де $p_i := I(P_i)$, $i = 1, 2$. Таким чином, далі ми можемо вважати, що $\overline{D'_P} = \overline{D'}$. Зауважимо, що g_{m_k} рівномірно неперервне на $\overline{D'}$, як відображення простору $\overline{D'}$ на $\overline{D_P}$, неперервне на компакт $\overline{D'}$. Нехай ρ – одна з метрик в E_D , визначена в (1). Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta_k = \delta_k(\varepsilon) < 1/k$ таке, що

$$\rho(g_{m_k}(x), g_{m_k}(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x, x_0 \in \overline{D'}, \quad |x - x_0| < \delta_k, \quad \delta_k < 1/k, \quad (15)$$

Нехай далі $\varepsilon > 0$ – довільне число з умовою

$$\varepsilon < (1/2) \cdot d(\partial D_0, g^{-1}(A)), \quad (16)$$



Мал. 5. До доведення леми 2.3

де A – континуум з умов леми, а $g : D_0 \rightarrow D$ – квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D , що відповідає означенню метрики ρ в (1). При кожному фіксованому $k \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$B_k := \bigcup_{x_0 \in K_0} B(x_0, \delta_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що B_k – відкрита множина, що містить K_0 , іншими словами, B_k – деякий окіл континууму K_0 . З огляду на [9, лема 2.2] існує окіл $U_k \subset B_k$ континууму K_0 , такий, що $U_k \cap D'$ зв'язний. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що U_k – відкрита множина, тоді $U_k \cap D'$ також лінійно зв'язна (див. [4, пропозиція 13.1]). Нехай $d(K_0) = m_0$, тоді знайдуться $z_0, w_0 \in K_0$ такі, що $d(K_0) = |z_0 - w_0|$. Отже, можна вибрати послідовності $\overline{y}_k \in U_k \cap D'$, $z_k \in U_k \cap D'$ і $w_k \in U_k \cap D'$ так, що $z_k \rightarrow z_0$, $\overline{y}_k \rightarrow y_0$ і $w_k \rightarrow w_0$ при $k \rightarrow \infty$. Можна вважати, що

$$|z_k - w_k| > m_0/2, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

З'єднаємо послідовно точки $z_k, \overline{y}_k$ і w_k кривою γ_k в $U_k \cap D'$ (це можливо, оскільки $U_k \cap D'$ лінійно зв'язна). Нехай $|\gamma_k|$ – як зазвичай, носій (образ) кривої γ_k в D' . Тоді $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ – компакт в D . Нехай $x \in |\gamma_k|$, тоді знайдеться $x_0 \in K_0 : x \in B(x_0, \delta_k)$. Зафіксуємо $\omega \in A \subset D$. З (15) і (16), з огляду на нерівність трикутника, маємо:

$$\begin{aligned} \rho(g_{m_k}(x), \omega) &\geq \rho(\omega, g_{m_k}(x_0)) - \rho(g_{m_k}(x_0), g_{m_k}(x)) \geq \\ &\geq d(\partial D_0, g^{-1}(A)) - (1/2) \cdot d(\partial D_0, g^{-1}(A)) = (1/2) \cdot d(\partial D_0, g^{-1}(A)) > \varepsilon. \end{aligned} \quad (18)$$

Переходячи до $\inf$ по всіх $x \in |\gamma_k|$ і $\omega \in A$, з (18) отримуємо, що

$$\rho(g_{m_k}(|\gamma_k|), A) \geq \varepsilon, k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

де, як зазвичай, $\rho(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$ – відстань між множинами $A, B \subset \mathbb{R}^n$ в метриці ρ . Покажемо тепер, що знайдеться $\varepsilon_1 > 0$ таке, що

$$d(g_{m_k}(|\gamma_k|), A) > \varepsilon_1, \quad \forall k = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

де $d(A, B)$, як зазвичай, позначає евклідову відстань між множинами $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Справді, нехай (20) порушується, тоді для числа $\varepsilon_l = 1/l$, $l = 1, 2, \dots$ знайдуться $\xi_l \in |\gamma_{k_l}|$ і $\zeta_l \in A$ такі, що

$$|g_{m_{k_l}}(\xi_l) - \zeta_l| < 1/l, \quad l = 1, 2, \dots. \quad (21)$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що послідовність номерів k_l , $l = 1, 2, \dots$, зростаюча. Оскільки A – компакт, то можна вважати, що послідовність ζ_l збігається до $\zeta_0 \in A$ при $l \rightarrow \infty$. За нерівністю трикутника і з (21) випливає, що

$$|g_{m_{k_l}}(\xi_l) - \zeta_0| \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty. \quad (22)$$

З іншого боку, нагадаємо, що $\rho(g_{m_k}(x), \omega) = |g^{-1}(g_{m_k}(x)) - g^{-1}(\omega)|$, де $g : D_0 \rightarrow D$ – деяке квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на D (див. (1)). Зокрема, g^{-1} – неперервне відображення в D , тому за нерівністю трикутника і з (22) маємо:

$$\begin{aligned} & |g^{-1}(g_{m_{k_l}}(\xi_l)) - g^{-1}(\zeta_l)| \leq \\ & \leq |g^{-1}(g_{m_{k_l}}(\xi_l)) - g^{-1}(\zeta_0)| + |g^{-1}(\zeta_0) - g^{-1}(\zeta_l)| \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

Однак, за означенням ρ і з (23) випливає, що

$$\rho(g_{m_{k_l}}(|\gamma_{k_l}|), A) \leq \rho(g_{m_{k_l}}(\xi_l), \zeta_l) = |g^{-1}(g_{m_{k_l}}(\xi_l)) - g^{-1}(\zeta_l)| \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty,$$

що суперечить (19). Отримане протиріччя вказує на вірність (20).

У такому випадку, довжина довільної кривої, що з'єднує компакт $g_{m_k}(|\gamma_k|)$ і A в D , не менша ніж ε_1 . Покладемо $\Gamma_k := \Gamma(g_{m_k}(|\gamma_k|), A, D)$, тоді функція $\rho(x) = 1/l$ при $x \in D$, $\rho(x) = 0$ при $x \notin D$, допустима для Γ_k . За означенням відображень f_{m_k} в (2) маємо:

$$M(f_{m_k}(\Gamma_k)) \leq \frac{1}{\varepsilon_1^n} \int_D Q(x) dm(x) = c = c(\varepsilon_1, Q) < \infty, \quad (24)$$

оскільки за умовою $Q \in L^1(D)$.

Покажемо тепер, що ми отримали протиріччя з (24) з огляду на локальну квазіконформність межі $\partial D'$. Перш за все, зауважимо, що $\partial D'$ – слабо плоска

за твердженням 2.2. Виберемо в точці $y_0 \in \partial D'$ кулю $U := B(y_0, r_0)$, $0 < r_0 < \min\{\delta/4, m_0/4\}$, де δ – число з умов леми, а $d(K_0) = m_0$. Зауважимо, що $|\gamma_k| \cap U \neq \emptyset \neq |\gamma_k| \cap (D' \setminus U)$ при досить великих $k \in \mathbb{N}$, оскільки $d(|\gamma_k|) \geq m_0/2 > m_0/4$ і $\overline{y_k} \in |\gamma_k|$, $\overline{y_k} \rightarrow y_0$ при $k \rightarrow \infty$. Міркуючи аналогічно, ми отримаємо, що $f_{m_k}(A) \cap U \neq \emptyset \neq f_{m_k}(A) \cap (D' \setminus U)$. Так як $|\gamma_k|$ і $f_{m_k}(A)$ – континууми, то

$$f_{m_k}(A) \cap \partial U \neq \emptyset, \quad |\gamma_k| \cap \partial U \neq \emptyset, \quad (25)$$

див. [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46]. Для фіксованого $P > 0$, нехай далі $V \subset U$ – окіл точки y_0 , що відповідає означенню слабо плоскої межі, тобто такий, що для будь-яких континуумів $E, F \subset D'$ з умовою $E \cap \partial U \neq \emptyset \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U \neq \emptyset \neq F \cap \partial V$ виконується нерівність

$$M(\Gamma(E, F, D')) > P. \quad (26)$$

Зауважимо, що при досить великих $k \in \mathbb{N}$

$$f_{m_k}(A) \cap \partial V \neq \emptyset, \quad |\gamma_k| \cap \partial V \neq \emptyset. \quad (27)$$

Справді, $\overline{y_k} \in |\gamma_k|$, $x_k \in f_{m_k}(A)$, де $x_k, \overline{y_k} \rightarrow y_0 \in V$ при $k \rightarrow \infty$, тому $|\gamma_k| \cap V \neq \emptyset \neq f_{m_k}(A) \cap V$ при великих $k \in \mathbb{N}$. Крім того, $d(V) \leq d(U) = 2r_0 < m_0/2$ і, оскільки $d(|\gamma_k|) > m_0/2$ з огляду на (17), то $|\gamma_k| \cap (D' \setminus V) \neq \emptyset$. Тоді $|\gamma_k| \cap \partial V \neq \emptyset$ (див. [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46]). Аналогічно, $d(V) \leq d(U) = 2r_0 < \delta/2$ і, оскільки $d(f_{m_k}(A)) > \delta$ за умовою леми, то $f_{m_k}(A) \cap (D' \setminus V) \neq \emptyset$. Оскільки, згідно з встановленим вище $f_{m_k}(A) \cap V \neq \emptyset$, то за [8, теорема 1.I, розд. 5, § 46] маємо: $f_{m_k}(A) \cap \partial V \neq \emptyset$. Отже, співвідношення в (27) встановлені.

Таким чином, згідно з (26) ми маємо, з огляду на (25) і (27), що

$$M(\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D')) > P. \quad (28)$$

Зауважимо, що $\Gamma(f_{m_k}(A), |\gamma_k|, D') = f_{m_k}(\Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D)) = f_{m_k}(\Gamma_k)$, так що нерівність (28) може бути переписана у вигляді

$$M(f_{m_k}(\Gamma(A, g_{m_k}(|\gamma_k|), D))) = M(f_{m_k}(\Gamma_k)) > P,$$

що суперечить нерівності (24). Отримане протиріччя вказує на хибність початкового припущення $d(f_{m_k}(A), \partial D') < 1/k$. Лема доведена. $\square$

3. Доведення теореми 1.1.

Неперервне продовження відображення $h \in \mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(D, D')$ на межу області D' встановлене в [1, теорема 6.1] при $n = 2$ і [3, теорема 2] при $n \geq 3$. Одностайна неперервність сім'ї відображень $\mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(D, D')$ у внутрішніх точках області D' доведена в [10, теорема 1.1]. Рівність $\overline{h}(\overline{D'}_P) = \overline{D}_P$ для $h \in \mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(D, D')$ встановлюється так, як і при доведенні [1, теорема 6.1], тому докладні міркування, пов'язані з цим фактом, не наводяться.

Покажемо одностаїну неперервність $\mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(D, D')$ на $E_{D'}$. Можна вважати, що D' має локально квазіконформну межу. З огляду на [5, теорема 4.1] ми можемо вважати, що $\overline{D'} = \overline{D'}_P$, зокрема, можна вважати, що $E_{D'} = \partial D'$.

Здійснимо доведення від супротивного. Нехай, знайдеться точка $z_0 \in \partial D'$, число $\varepsilon_0 > 0$ і послідовності $z_m \in \overline{D}'$, $z_m \rightarrow z_0$ при $m \rightarrow \infty$ і $\bar{h}_m \in \mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(\overline{D}, \overline{D}')$ такі, що

$$\rho(\bar{h}_m(z_m), \bar{h}_m(z_0)) \geq \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

де ρ – одна з метрик в $\overline{D}_P$, визначена формулою (1). Так як $\bar{h}_m$ за неперервністю продовжується на межу $\overline{D}'$, можна вважати, що $z_m \in D$ і, крім того, знайдеться ще одна послідовність $z'_m \in \overline{D}'$, $z'_m \rightarrow z_0$ при $m \rightarrow \infty$, така, що $\rho(h_m(z_m), \bar{h}_m(z_0)) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, де $h_m = \bar{h}_m|_{D'}$. Тоді з (29) випливає, що

$$\rho(h_m(z_m), h_m(z'_m)) \geq \varepsilon_0/2, \quad m \geq m_0. \quad (30)$$

Так як область D регулярна, то простір $\overline{D}_P$ є компактом. Отже, ми можемо вважати, що послідовності $h_m(z_m)$ і $\bar{h}_m(z_0)$ є збіжними при $m \rightarrow \infty$ до деяких елементів $P_1, P_2 \in \overline{D}_P$, $P_1 \neq P_2$. Нехай d_m, g_m – послідовності спадних областей, що відповідають простим кінцям P_1, P_2 , відповідно. Виберемо $x_0, y_0 \in A$ так, щоб $x_0 \neq y_0$ і $P_1 \neq x_0 \neq P_2$, $P_1 \neq y_0 \neq P_2$, де континуум $A \subset D$ – з умов теореми 1.1. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $d_1 \cap g_1 = \emptyset$ і $x_0, y_0 \notin d_1 \cup g_1$. За лемою 2.1 існують k_0 і $M_0 \in \mathbb{N}$, такі що при всіх $m \geq M_0$ виконується наступна умова: знайдуться непересічні криві $\gamma_{i,m}(t) : [0, 1] \rightarrow D$, $i = 1, 2$, $\gamma_{1,m}(0) = x_0$, $\gamma_{1,m}(1) = h_m(z_m)$, $\gamma_{2,m}(0) = y_0$, $\gamma_{2,m}(1) = h_m(z'_m)$, такі що $|\gamma_{1,m}| \cap g_{k_0} = \emptyset = |\gamma_{2,m}| \cap d_{k_0}$. Крім того, за лемою 2.2 знайдеться стала $0 < N < \infty$, що не залежить від параметру m , така що

$$M(f_m(\Gamma_m)) \leq N, \quad m \geq M_0, \quad (31)$$

де $f_m := h_m^{-1}$, $\Gamma_m := \Gamma(|\gamma_{1,m}|, |\gamma_{2,m}|, D)$. З іншого боку, за лемою 2.3 знайдеться число $\delta_1 > 0$ таке, що $d(f_m(A), \partial D') > \delta_1 > 0$, $m = 1, 2, \dots$. Звідси отримуємо, що

$$d(f_m(|\gamma_{1,m}|)) \geq |z_m - f_m(x_0)| \geq (1/2) \cdot d(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2,$$

$$d(f_m(|\gamma_{2,m}|)) \geq |z'_m - f_m(y_0)| \geq (1/2) \cdot d(f_m(A), \partial D') > \delta_1/2 \quad (32)$$

при великих $m = 1, 2, \dots$. Виберемо в точці $z_0 \in \partial D'$ кулю $U := B(z_0, r_0)$, де $r_0 > 0$ і $r_0 < \delta_1/4$, де δ_1 – число зі співвідношень в (32). Зауважимо, що $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap U \neq \emptyset \neq f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap (D' \setminus U)$ при досить великих $m \in \mathbb{N}$, оскільки $d(f_m(|\gamma_{1,m}|)) \geq \delta_1/2$ і $z_m \in f_m(|\gamma_{1,m}|)$, $z_m \rightarrow z_0$ при $m \rightarrow \infty$. Аналогічно міркуючи, $f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap U \neq \emptyset \neq f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap (D' \setminus U)$. Так як $f_m(|\gamma_{1,m}|)$ і $f_m(|\gamma_{2,m}|)$ – континууми, то

$$f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial U \neq \emptyset, \quad f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap \partial U \neq \emptyset, \quad (33)$$

див. [8, теорема 1.І, розд. 5, § 46]. Для фіксованого $P > 0$, нехай далі $V \subset U$ – окіл точки z_0 , що відповідає означенню слабо плоскої межі, тобто такий, що для будь-яких континуумів $E, F \subset D'$ з умовою $E \cap \partial U \neq \emptyset \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U \neq \emptyset \neq F \cap \partial V$ виконується нерівність

$$M(\Gamma(E, F, D')) > P. \quad (34)$$

Зауважимо, що при досить великих $m \in \mathbb{N}$

$$f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial V \neq \emptyset, \quad f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap \partial V \neq \emptyset. \quad (35)$$

Справді, $z_m \in f_m(|\gamma_{1,m}|)$, $z'_m \in f_m(|\gamma_{2,m}|)$, де $z_m, z'_m \rightarrow z_0 \in V$ при $m \rightarrow \infty$, тому $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap V \neq \emptyset \neq f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap V$ при великих $m \in \mathbb{N}$. Крім того, $d(V) \leq d(U) = 2r_0 < \delta_1/2$ і, оскільки $d(f_m(|\gamma_{1,m}|)) > \delta_1/2$ з огляду на (32), то $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap (D' \setminus V) \neq \emptyset$. Тоді $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial V \neq \emptyset$ (див. [8, теорема 1.1, розд. 5, § 46]). Аналогічно, $d(V) \leq d(U) = 2r_0 < \delta_1/2$ і, оскільки $d(f_m(|\gamma_{2,m}|)) > \delta_1/2$ з огляду на (32), то $f_m(|\gamma_{2,m}|) \cap (D' \setminus V) \neq \emptyset$. Тоді за [8, теорема 1.1, розд. 5, § 46] маємо: $f_m(|\gamma_{1,m}|) \cap \partial V \neq \emptyset$. Таким чином, співвідношення (35) доведені.

Згідно з (34) і враховуючи (33) і (35), ми отримуємо, що

$$M(f_m(\Gamma_m)) = M(\Gamma(f_m(|\gamma_{1,m}|), f_m(|\gamma_{2,m}|), D')) > P,$$

що суперечить нерівності (31). Отримане протиріччя вказує на хибність початкового припущення, зробленого в (29). Теорема доведена. $\square$

Зауваження 3.1. Зауважимо, що означення простого кінця по Няккі (див. розділ 4 в [5] дещо відрізняється від означення, запропонованого вище. Проте, для областей з локально квазіконформними межами (а, отже, і регулярних областей) ці класи співпадають, див., напр., теорему 4.1 в [5] і теорему 2.1 в [11]).

Цитована література

1. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yakubov E. The Beltrami equations and prime ends // Укр. мат. вісник. – 2015. – Т. 12, № 1. – С. 27–66.
2. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И. К теории простых концов для пространственных отображений // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 4. – С. 467–479.
3. Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. О равностепенной непрерывности одного семейства обратных отображений в терминах простых концов // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 9. – С. 1264–1273.
4. Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
5. Näkki R. Prime ends and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1979. – 35. – Р. 13–40.
6. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 7. – С. 952–967.
7. Väisälä J. Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
8. Куратовский К. Топология, т. 2. – Мир, Москва. – 1969.
9. Herron J. and Koskela P. Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains // Compl. Var. Theor. Appl. – 1990. – 15. – Р. 167–179.
10. Севостьянов Е.А., Скворцов С.А. О локальном поведении отображений метрических пространств // Укр. мат. вісник. – 2019. – Т. 16, № 2. – С. 215–227.
11. Илютко Д.П., Севостьянов Е.А. О простых концах на римановых многообразиях // Укр. мат. вісник. – 2018. – Т. 15, № 3. – С. 358–392.

References

1. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yakubov, E. (2015). The Beltrami equations and prime ends. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 210(1), 22-51.
2. Kovtonyuk, D.A., Ryazanov, V.I. (2015). On the theory of prime ends for space mappings. *Ukr. Math. J.*, 67(4), 528-541.
3. Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2018). On equicontinuity of one class of inverse mappings in terms of prime ends. *Ukr. Math. J.*, 70(9), 1264-1273.
4. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory*. Springer Monographs in Mathematics. New York, Springer.
5. Näkki, R. (1979). Prime ends and quasiconformal mappings. *J. Anal. Math.*, 35, 13-40.
6. Sevost'yanov, E. A., Skvortsov, S. A. (2018). On the convergence of mappings in metric spaces with direct and inverse modulus conditions. *Ukr. Math. J.*, 70(7), 1097-1114.
7. Väisälä, J. (1971). *Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings*. Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer-Verlag.
8. Kuratovskij, K. (1969). *Topologiya, t. 2*. Mir, Moskva (in Russian).
9. Herron, J., Koskela P. (1990). Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains. *Compl. Var. Theor. Appl.*, 15, 167-179.
10. Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.A. (2019). On the local behavior of mappings of metric spaces. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 244(1), 44-55.
11. Il'yutko, D.P., Sevost'yanov, E.A. (2018). On prime ends on Riemannian manifolds. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 241(1), 47-63.

E.A. Sevost'yanov, S.A. Skvortsov, N.S. Ilkevych

On behavior of inverse homeomorphisms in terms of prime ends.

As is known, even conformal mappings of plane simply connected domains do not, generally speaking, have continuous boundary extension in the Euclidean sense. One of the minimum requirements necessary for such an extension is the local connectedness of the definition domain of the corresponding map on its boundary. Of course, quite a lot of simply connected domains do not have this property. For example, the unit disk with a cut along the positive part of the real axis is not locally connected at the boundary. In the same way, the mapped domain must also satisfy certain conditions necessary for the continuous extension of a mapping. The situation changes significantly if we are not talking about the Euclidean boundary behavior of mappings, but about extension in terms of the so-called prime ends. In this case, the domain of definition of mappings should be only regular, that is, this domain should be the image of a domain with a locally quasiconformal boundary under some quasiconformal mapping. A similar requirement also applies to the mapped domain. In this article, we study the equicontinuous families of maps at inner and boundary points in the case where the prime ends of the domain serve as boundary points. Relatively speaking, the paper consists of two parts, one of which contains a number of auxiliary statements, and the second, the final part of the work, contains the formulation of the main theorem and its proof. We consider a class of homeomorphisms of Euclidean space, inverse of which distort moduli of families of paths by the Poletsky type inequality. Note that these classes include most well-known mappings, such as conformal mappings, quasiconformal mappings, mappings with finite length and area distortion, and so on. It should be noted that under conformal mappings, distortion of the modulus of families of paths does not occur, therefore, when passing to inverse mappings, we remain in the class under study. A similar situation is in the case of quasiconformal mappings, since, as is known, the inverse mapping to a quasiconformal is also quasiconformal. In more general situations,

the studied configurations can turn out to be much more complicated, in particular, the transition to inverse mappings can significantly change their properties (this is confirmed by specific examples of mappings, which are rather easy to construct in this case). This article is actually devoted to the study of this particular case, that is, when we are dealing with a certain family of homeomorphisms with an unbounded characteristic, in addition, mappings inverse to them are studied. In more detail, we consider mappings whose inverse satisfy the upper distortion estimate of the modulus of families of paths with integrable majorant. In the article, we proved that the families of the indicated mappings are equicontinuous both at the inner and boundary points of the domain, provided that the majorant responsible for the distortion of the modulus of the families of paths is integrable, besides that, the definition and mapped domains are regular, and the boundary points are prime ends of the definition domain. The results obtained in the paper are applicable to well-known classes of mappings, such as mappings with bounded and finite distortion, as well as to the Sobolev and Orlicz–Sobolev classes.

Keywords: *quasiconformal mappings, moduli of families of paths.*

Житомирський державний університет імені Івана Франка
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
esevostyanov2009@gmail.com, serezha.skv@gmail.com,
ilkevych@list.ru

Отримано 22.10.19

УДК 517.9

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-16

©2019. С.М. Чуйко, Я.В. Калініченко, М.В. Попов

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ВИРОДЖЕНОЇ НЕТЕРОВОЇ РІЗНИЦЕВО-АЛГЕБРАЇЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

У статті запропоновано оригінальні умови розв'язності, а також схему знаходження розв'язків лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі, при цьому істотно використовується техніка псевдообернення матриць за Муром-Пенроузом. Поставлена в статті задача продовжує дослідження умов розв'язності лінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях А.М. Самойленка, М.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматулліної і О.А. Бойчука. Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням крайових задач для різницевих рівнянь, започаткованим у роботах А.А. Маркова, С.Н. Бернштейна, Я.С. Безиковича, О.О. Гельфонда, С.Л. Соболева, В.С. Рябенського, В.Б. Демідовича, А. Халая, Г.І. Марчука, О.А. Самарського, Ю.О. Митропольського, Д.І. Мартинюка, Г.М. Вайніко, А.М. Самойленка та О.А. Бойчука. З іншого боку, дослідження крайових задач для різницевих рівнянь пов'язане з вивченням диференціально-алгебраїчних крайових задач, започаткованим у роботах К. Вейерштрасса, М.М. Лузіна та Ф.Р. Гантмахера. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, Ю.Є. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука, А. Ілчманна та Т. Рейса. Вивчення диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане також із численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху. Досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, відповідний до однорідної частини лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі, не має оберненого. У статті побудовано узагальнений оператор Гріна лінійної різницево-алгебраїчної крайової задачі. Актуальність дослідження умов розв'язності, а також знаходження розв'язків лінійних нетерових різницево-алгебраїчних крайових задач пов'язана з широким використанням різницево-алгебраїчних крайових задач, одержуваних при лінеаризації нелінійних нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних і різницевих рівнянь. Запропоновані умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків лінійних нетерових різницево-алгебраїчних крайових задач детально проілюстровані на прикладах.

MSC: 34B15.

Ключові слова: лінійна нетерова крайова задача, системи різницевих рівнянь, псевдообернення матриць по Муру-Пенроузу.

1. Постановка задачі.

Досліджуємо задачу про знаходження обмежених розв'язків

$$z(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \Omega := \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$$

лінійної нетерової ($n \neq v$) крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь [1, 2]

$$A(k)z(k+1) = B(k)z(k) + f(k), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^v; \quad (1)$$

Робота виконана за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р/н 0118U003390.

тут $A(k), B(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – прямокутні матриці і $f(k)$ – дійсні вектор-стовпці, $\ell z(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^v$ – лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі обмежених функцій [1]. Поставлена різницево-алгебраїчна задача (1) є узагальненням задачі, розв'язаної О.А. Бойчуком [1]. За умови обмеженості матриць $A^+(k)B(k), A^+(k)f(k)$, а також

$$P_{A^*(k)} = 0, \quad k \in \Omega \quad (2)$$

система (1) приводиться до традиційної системи лінійних різницевих рівнянь

$$z(k+1) = A^+(k)B(k)z(k) + \mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)). \quad (3)$$

Тут

$$\mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)) := A^+(k)f(k) + P_{A_{\rho_0}}(k)\nu_0(k), \quad \text{rank } A(k) := \sigma_0 = m < n,$$

$A^+(k)$ – псевдообернена (за Муром–Пенроузом) матриця, $P_{A^*}(k)$ – матриця-ортопроектор:

$$P_{A^*}(k) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(A^*(k)),$$

$P_{A_{\rho_0}}(k)$ – $(n \times \rho_0)$ –матриця, складена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ –матриці-ортопроектора

$$P_A(k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(A(k)),$$

$\nu_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$ – довільна обмежена вектор-функція. Загальний розв'язок задачі Коші $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для однорідної частини системи різницевих рівнянь (3)

$$z(k) = X_0(k)c, \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

визначає нормальна фундаментальна матриця:

$$X_0(k+1) = A^+(k)B(k)X_0(k), \quad X_0(0) = I_n.$$

За умови (2) нормальна фундаментальна матриця $X_0(k)$ однорідної частини системи різницевих рівнянь (3) є, взагалі кажучи, виродженою:

$$\det X_0(k) = 0,$$

отже, для побудови загального розв'язку задачі Коші $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднорідної виродженої системи різницевих рівнянь (3) схема [1] не може бути застосована. У той же час оператор Гріна задачі Коші для виродженої системи різницевих рівнянь (3) може бути знайдений в такий спосіб:

$$K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](0) := 0, \quad K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](1) := \mathfrak{F}_0(1, \nu_0(1)), \quad \dots,$$

$$K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k+1) := A^+(k)B(k)K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k) + \mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)), \quad \dots$$

За аналогією з класифікацією диференційно-алгебраїчних рівнянь [3] за умови (2), у разі обмеженості матриць $A^+(k)B(k), A^+(k)f(k)$, будемо казати, що система

лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1) є невиродженою. Зауважимо, що, на відміну від традиційної системи лінійних різницевих рівнянь, розв'язок системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1) за умови (2) залежить від довільної обмеженої вектор-функції.

Досліджуємо далі задачу про знаходження обмежених розв'язків системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1) за умови $P_{A^*(k)} \neq 0$. Припустимо, що матриця $A(k)$ має постійний ранг, а саме:

$$1 \leq \text{rank } A(k) = \sigma_0, \quad k \in \Omega.$$

Як відомо, будь-яка $(m \times n)$ -матриця $A(k)$ може бути зображена у вигляді розвинення

$$A(k) = R_0(k) \cdot J_\sigma \cdot S_0(k);$$

тут $R_0(k)$ и $S_0(k)$ — невироджені матриці. Невироджена заміна змінної [3]

$$y(k+1) = S_0(k)z(k+1)$$

приводить систему (1) до вигляду

$$J_{\sigma_0} y(k+1) = C_0(k)y(k) + R_0^{-1}(k)f(k), \quad k \in \Omega; \quad (4)$$

тут

$$C_0(k) := R_0^{-1}(k)B(k)S_0^{-1}(k-1) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(0)}(k) & C_{12}^{(0)}(k) \\ C_{21}^{(0)}(k) & C_{22}^{(0)}(k) \end{pmatrix}.$$

Заміна змінної

$$y(k) = \text{col } (u(k), v(k)) \in \mathbb{R}^n, \quad u(k) \in \mathbb{R}^{\sigma_0}, \quad v(k) \in \mathbb{R}^{n-\sigma_0}$$

приводить систему (4) до вигляду

$$u(k+1) = C_{11}^{(0)}(k)u(k) + C_{12}^{(0)}(k)v(k) + g_1^{(0)}(k), \quad (5)$$

$$C_{21}^{(0)}(k)u(k) + C_{22}^{(0)}(k)v(k) + g_2^{(0)}(k) = 0; \quad (6)$$

тут

$$R_0^{-1}(k)f(k) := \text{col } (g_1^{(0)}(k), g_2^{(0)}(k)).$$

Крім того $P_{D_0^*}(k)$ — матриця-ортопроектор:

$$P_{D_0^*}(k) : \mathbb{R}^{m-\sigma_0} \rightarrow \mathbb{N}(D_0^*(k)).$$

Рівняння (6) розв'язне тоді й тільки тоді, коли [4]

$$P_{D_0^*}(k)g_2^{(0)}(k) = 0;$$

при цьому загальний розв'язок рівняння (6)

$$y(k) = P_{D_{\rho_0}} \varphi(k) - D_0^+(k) g_2^{(0)}(k), \quad D_0(k) := \begin{bmatrix} C_{21}^{(0)}(k); C_{22}^{(0)}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-\sigma_0) \times n}, \quad \varphi(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$$

визначає $P_{D_{\rho_0}}(k)$ – $(n \times \rho_0)$ -матриця, складена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $P_{D_0}(k)$ -матриці-ортопроектора:

$$P_{D_0}(k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(D_0(k)).$$

Позначаючи блоки матриці $P_{D_{\rho_0}}(k)$ і добутки $D_0^+(k) g_2^{(0)}(k)$

$$P_{D_{\rho_0}}(k) := \text{col} (P_1^{(0)}(k), P_2^{(0)}(k)), \quad D_0^+(k) g_2^{(0)}(k) = - \text{col} \left(f_1^{(1)}(t), f_2^{(1)}(t) \right),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\varphi(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$ лінійної різницево-алгебраїчної системи

$$A_1(k) \varphi(k+1) = B_1(k) \varphi(k) + f_1(k); \quad (7)$$

тут

$$A_1(k) := P_1^{(0)}(k) \in \mathbb{R}^{\sigma_0 \times \rho_0}, \quad \sigma_1 = \sigma_0 \leq \rho_0,$$

$$B_1(k) := C_{11}^{(0)}(k) P_1^{(0)}(k) + C_{12}^{(0)}(k) P_2^{(0)}(k), \quad \text{rank } A_1(k) := \sigma_1,$$

крім того

$$f_1(k) := C_{11}^{(0)}(k) f_1^{(1)}(k) + C_{12}^{(0)}(k) f_2^{(1)}(k) + g_1^{(0)}(k) - f_1^{(1)}(k+1).$$

За умови [3] обмеженості матриць $A_1^+(k) B_1(k)$ і вектор-стовпців

$$A_1^+(k) f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1) D_0^+(k) g_2^{(0)}(k),$$

а також

$$P_{A^*}(k) \neq 0, \quad P_{A_1^*}(k) \equiv 0, \quad P_{D_0^*}(k) g_2^{(0)}(k) = 0, \quad (8)$$

система (7) приводить до традиційної системи лінійних різницевих рівнянь

$$\varphi(k+1) = A_1^+(k) B_1(k) \varphi(k) + \mathfrak{F}_1(k, \nu_1(k)), \quad \nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}; \quad (9)$$

тут

$$\mathfrak{F}_1(k, \nu_1(k)) := A_1^+(k) f_1(k) + P_{A_{e_1}}(k) \nu_1(k),$$

$\nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}$ – довільна обмежена вектор-функція. Крім того $P_{A_1^*}(k)$ – матриця-ортопроектор [4]:

$$P_{A_1^*}(k) : \mathbb{R}^{\sigma_0} \rightarrow \mathbb{N}(A_1^*(k)),$$

$P_{A_{\rho_1}}(k)$ – $(\rho_0 \times \rho_1)$ -матриця, утворена з ρ_1 лінійно-незалежних стовпців $(\rho_0 \times \rho_0)$ -матриці-ортопроектора: $P_{A_1}(k) : \mathbb{R}^{\rho_0} \rightarrow \mathbb{N}(A_1(k))$. Позначимо $U_1(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$U_1(k+1) = A_1^+(k) B_1(k) U_1(k), \quad U_1(0) = I_{\rho_0}$$

отриманої традиційної системи лінійних різницевих рівнянь (9). Використовуючи рівняння

$$z(k) = S_0^{-1}(k-1) \left[P_{D_{\rho_0}} \varphi(k) - D_0^+(k) g_2^{(0)}(k) \right],$$

робимо висновок, що за умови (8) система (1) має розв'язок вигляду

$$\begin{aligned} z(k, c_{\rho_1}) = S_0^{-1}(k-1) P_{D_{\rho_0}} U_1(k) c_{\rho_0} + S_0^{-1}(k-1) P_{D_{\rho_0}} K \left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s)) \right] (k) - \\ - S_0^{-1}(k-1) D_0^+(k) g_2^{(0)}(k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](0) &:= 0, \quad K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](1) := \mathfrak{F}_1(0, \nu_1(0)), \quad \dots, \\ K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](k+1) &:= A_1^+(k) B_1(k) K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](k) + \mathfrak{F}_1(k, \nu_1(k)), \quad \dots. \end{aligned}$$

За аналогією з класифікацією імпульсних крайових задач [4, 6, 7] у випадку (8), за умови обмеженості матриць $A_1^+(k) B_1(k)$ і вектор-стовпців

$$A_1^+(k) f_1(k), \quad S_0^{-1}(k) D_0^+(k) g_2^{(0)}(k)$$

будемо говорити, що для лінійної різницево-алгебраїчної системи (1) має місце виродження першого порядку. Таким чином, доведена наступна лема.

Лема. У разі виродження першого порядку, за умови (8), у разі обмеженості матриці $A_1^+(k) B_1(k)$ і вектор-стовпців

$$A_1^+(k) f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1) D_0^+(k) g_2^{(0)}(k)$$

лінійна різницево-алгебраїчна система (1) має розв'язок вигляду

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k) c_{\rho_0} + K[f(j), \nu_1(j)](k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0};$$

тут

$$X_1(k) := S_0^{-1}(k-1) P_{D_{\rho_0}} U_1(k)$$

– фундаментальна матриця, $\nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}$ – довільна обмежена вектор-функція,

$$K[f(j), \nu_1(j)](k) := S_0^{-1}(k-1) P_{D_{\rho_0}} K \left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(j)) \right] (k) - S_0^{-1}(k-1) D_0^+(k) g_2^{(0)}(k)$$

– узагальнений оператор Гріна задачі Коші для виродженої різницево-алгебраїчної системи (1).

За умови

$$P_{A^*}(k) \neq 0, \quad P_{A_1^*}(k) = 0, \quad P_{D_0^*} g_2^{(0)}(k) = 0,$$

у разі необмеженість матриць $A_1^+(k) B_1(k)$, або вектор-стовпців

$$A_1^+(k) f_1(k), \quad S_0^{-1}(k) D_0^+(k) g_2^{(0)}(k)$$

система (1) розв'язна, але розв'язок не є обмеженим.

Приклад 1. Знайдемо розв'язок системи різницево-алгебраїчних рівнянь першого порядку

$$Az(k+1) = B(k)z(k) + f(k), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

де

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(k) := \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умову $P_{A^*(k)} = 0$ не виконано, остільки дана система різницево-алгебраїчних рівнянь вироджена, при цьому матриця $A(k)$ має постійний ранг, а саме: $\text{rank } A(k) := \sigma_0 = 2$. Матриця $A(k)$ може бути представлена у вигляді стандартного розвинування:

$$A(k) = R(k) \cdot J_\sigma \cdot S(k), \quad R(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тут $R(k)$ и $S(k)$ – невироджені матриці, крім того

$$J_\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У даному випадку матриця

$$A_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– матриця повного рангу, при цьому $P_{A_1}(k) \neq 0$, $P_{A_{\rho_1}}(k) \neq 0$, тому шуканий розв'язок

$$z(k, c_3) = X_1(k)c_3 + K[f(j), \nu_1(j)](k), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3$$

залежить від довільної неперервної функції $\nu_1(k)$; тут

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_1(1) = X_1(2) = X_1(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\nu_1(k) := 0$, при цьому

$$K[f(j), \nu_1(j)](0) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K[f(j), \nu_1(j)](1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$K[f(j), \nu_1(j)](2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad K[f(j), \nu_1(j)](0) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2. Крайові задачі для систем лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь.

Досліджуємо далі задачу про знаходження обмежених розв'язків лінійної нетерової ($n \neq v$) крайової задачі для системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1). Зауважимо, що, на відміну від традиційної системи лінійних різницевих рівнянь, розв'язок системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1), взагалі кажучи, залежить від довільної обмеженої вектор-функції $\nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}$, при цьому розв'язність лінійної нетерової крайової задачі для системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1) також залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_1(k) := \Psi_1(k)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^\theta;$$

тут

$$\Psi_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1 \times \theta}$$

– довільна обмежена матриця повного рангу. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1) зобразимо у вигляді

$$K[f(j), \nu_1(j)](k) = K[f(j)](k) + K[\Psi_1(j)](k)\gamma;$$

тут

$$K[\Psi_1(j)](k) := S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}\mathcal{K}[\Psi_1(s)](k),$$

де

$$\mathcal{K}[\Psi_1(j)](0) := 0, \quad \mathcal{K}[\Psi_1(j)](1) := P_{A_{\rho_1}}(0)\Psi_1(0),$$

$$\mathcal{K}[\Psi_1(j)](2) := A_1^+(1)B_1(1)\mathcal{K}[\Psi_1(j)](1) + P_{A_{\rho_1}}(1)\Psi_1(1), \quad \dots,$$

$$\mathcal{K}[\Psi_1(j)](k+1) := A_1^+(k)B_1(k)\mathcal{K}[\Psi_1(j)](k) + P_{A_{\rho_1}}(k)\Psi_1(k).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D}_1 := \left\{ Q_1 ; \ell K[\Psi_1(j)](\cdot) \right\} \in \mathbb{R}^{v \times (\rho_0 + \theta)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k) c_{\rho_0} + K[f(j), \nu_1(j)](k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0};$$

системи лінійних різницево-агебраїчних рівнянь (1) у крайову умову (1), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}_1 \check{c} = \alpha - \ell K \left[A^+(j) f(j) \right] (\cdot), \quad \check{c} := \text{col}(c_{\rho_0}, \gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_0 + \theta}. \quad (10)$$

Рівняння (10) розв'язне тоді й тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}_1^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(j) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (11)$$

Тут $P_{\mathcal{D}_1^*}$ – ортопроектор:

$$\mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}_1^*).$$

За умови (11) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (10)

$$\check{c} = \mathcal{D}_1^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(j) \right] (\cdot) \right\} + P_{\mathcal{D}_1} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0 + \theta}$$

визначає загальний розв'язок крайової задачі (1)

$$\begin{aligned} z(k, \delta) = & \left\{ X_1(k); K \left[\Psi_1(j) \right] (k) \right\} \mathcal{D}_1^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(j) \right] (\cdot) \right\} + \\ & + K \left[f(j) \right] (k) + \left\{ X_1(k); K \left[\Psi_1(j) \right] (k) \right\} P_{\mathcal{D}_1} \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0 + \theta}. \end{aligned}$$

Тут $P_{\mathcal{D}_1}$ – матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_0 + \theta} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}_1)$. Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема. *Задача про знаходження обмежених розв'язків системи лінійних різницево-агебраїчних рівнянь (1) у разі виродження першого порядку, за умови (8), у разі обмеженості матриці $A_1^+(k)B_1(k)$ і вектор-стовпців*

$$A_1^+(k)f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

для фіксованої обмеженої матриці $\Psi_1(k)$ повного рангу має розв'язок вигляду

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k)c_{\rho_0} + K[f(j), \nu_1(j)](k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0}.$$

За умови (11) і тільки за неї загальний розв'язок різницево-агебраїчної крайової задачі (1)

$$z(k, c_r) = X_r(k)c_r + G \left[f(j); \Psi_1(j); \alpha \right] (k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна лінійної різницево-алгебраїчної крайової задачі (1)

$$G \left[f(j); \Psi_1(j); \alpha \right] (k) := K \left[f(j) \right] (k) +$$

$$+ \left\{ X_1(k); K \left[\Psi_1(j) \right] (k) \right\} \mathcal{D}_1^+ \left\{ \alpha - \ell K \left[f(j) \right] (\cdot) \right\}.$$

Матриця $X_r(k)$ утворена з r лінійно незалежних стовпців матриці

$$\left\{ X_1(k); K \left[\Psi_1(j) \right] (k) \right\} P_{\mathcal{D}_1}.$$

За умови $P_{\mathcal{D}_1^*} \neq 0$ будемо говорити, що різницево-агебраїчна крайова задача (1) в разі виродження першого порядку представляє критичний випадок.

Приклад 2. Знайдемо розв'язок лінійної крайової задачі для системи різницево-агебраїчних рівнянь першого порядку

$$A z(k+1) = B(k) z(k) + f(k), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

де матриці A, B і вектор-функція $f(k)$ визначені в прикладі 1, крім того

$$\ell z(\cdot) := M z(3), \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (2) не виконано, остільки система різницево-агебраїчних рівнянь (12) вироджена, при цьому має місце виродження першого порядку. Покладемо

$$\nu_1(k) := \Psi_1(k)\gamma, \quad \Psi_1(k) := \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^3,$$

при цьому для матриці

$$Q_1 = M X_1(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

мають місце нерівності

$$P_{Q_1^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad P_{Q_1^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(j) \right] (\cdot) \right\} \neq 0,$$

отже для фіксованої функції $\nu_1(k) := 0$ різницево-агебраїчна крайова задача (12) не розв'язна. Оскільки виконана умова

$$P_{Q_1^*} \neq 0, \quad P_{\mathcal{D}_1^*} = 0,$$

остільки різницево-агебраїчна крайова задача (12) приведена до некритичного випадку, отже, згідно з доведеною теоремою крайова задача (12) розв'язна; тут

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_1^+ = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 21 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок крайової задачі (12)

$$z(k, c_r) = X_r(k)c_r + G\left[f(j); \Psi_1(j); \alpha\right](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^2$$

визначає

$$X_r(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_r(1) = X_r(2) = X_r(3) = 0$$

– фундаментальна матриця розв'язків однорідної частини крайової задачі (12), а також

$$G\left[f(j); \Psi_1(j); \alpha\right](0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G\left[f(j); \Psi_1(j); \alpha\right](1) = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ -84 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G\left[f(j); \Psi_1(j); \alpha\right](2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad G\left[f(j); \Psi_1(j); \alpha\right](3) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

– оператор Гріна крайової задачі (12).

За умови

$$P_{Q_1^*} \neq 0, \quad P_{D_1^*} = 0$$

будемо говорити, що різницево-агебраїчна крайова задача (1) приведена до некритичного випадку. У некритичному випадку умова (11) виконується для будь-яких неоднорідностей лінійної різницево-агебраїчної крайової задачі (1).

Наслідок. *Задача про знаходження обмежених розв'язків системи лінійних різницево-агебраїчних рівнянь (1) у разі виродження першого порядку, за умови (8), у разі обмеженості матриці $A_1^+(k)B_1(k)$ і вектор-стовпців*

$$A_1^+(k)f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

для фіксованої обмеженою матриці $\Psi_1(k)$ повного рангу має розв'язок вигляду

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k)c_{\rho_0} + K[f(j), \nu_1(j)](k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0}.$$

У некритичному випадку загальний розв'язок лінійної різницево-агебраїчної крайової задачі (1)

$$z(k, c_r) = X_r(k)c_r + G\left[f(j); \Psi_1(j); \alpha\right](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна лінійної різницево-агебраїчної крайової задачі (1)

$$G\left[f(j); \Psi_1(j); \alpha\right](k) := K\left[f(j)\right](k) + \\ + \left\{X_1(k); K\left[\Psi_1(j)\right](k)\right\} \mathcal{D}_1^+ \left\{\alpha - \ell K\left[f(j)\right](\cdot)\right\}.$$

Приклад 3. Знайдемо розв'язок лінійної крайової задачі для системи різницево-агебраїчних рівнянь першого порядку (12), де матриці A, B і вектор-функція $f(k)$ визначені в прикладі 1, крім того

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(3) = \alpha, \quad \alpha := \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 & 8 \end{pmatrix}^*.$$

Оскільки умову (2) не виконано, остільки система різницево-агебраїчних рівнянь (12) вироджена, при цьому має місце виродження першого порядку. Покладемо

$$\Psi_1(k) := \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^3,$$

при цьому для матриці

$$Q_1 = \ell X_1(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

має місце рівність

$$P_{Q_1^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad P_{Q_1^*} \left\{\alpha - \ell K\left[f(j)\right](\cdot)\right\} = 0,$$

отже різницево-агебраїчна крайова задача (12) представляє критичний випадок. Крім того, для фіксованої функції $\nu_1(k) := 0$ має місце рівність, отже різницево-агебраїчна крайова задача (12) розв'язна. Розв'язок крайової задачі (12)

$$z(k, c_r) = X_r(k)c_r + G\left[f(j); 0; \alpha\right](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^2$$

визначає

$$G\left[f(j); 0; \alpha\right](k) = K\left[f(j)\right](k), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

– оператор Гріна крайової задачі (12).

Запропонована в статті схема дослідження різницево-алгебраїчних крайових задач аналогічно [13,14] може бути перенесена на дифференціально-алгебраїчні крайові задачі в частинних похідних. З іншого боку, запропонована в статті схема дослідження різницево-алгебраїчних крайових задач аналогічно [15, 16] може бути перенесена на матричні різницево-алгебраїчні крайові задачі.

Цитована література

1. Бойчук А.А. Краевые задачи для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, № 6. – С. 832–835.
2. Campbell S.L. Limit behavior of solutions of singular difference equations // Linear algebra and its appl. – 1979. – 23. – P. 167–178.
3. Chuiko S.M. On a reduction of the order in a differential-algebraic system // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – 235, № 1. – P. 2–18.
4. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
5. Чуйко С.М., Калиниченко Я.В. Краевые задачи для систем невырожденных разностно-алгебраических уравнений // Праці ІПММ НАН України. – 32. – 2018. – С. 133–148.
6. Самоїленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк, 1987. – 287 с.
7. Chuiko S.M. A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action // Differential Equations. – 2001. – 37, № 8. – P. 1189–1193.
8. Chuiko S.M. Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – 38 (2). – P. 236–244.
9. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 1. – М.: Высшая школа, 1988. – 712 с.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.
11. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
12. Chuiko S.M. On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – 197, № 1. – P. 138–150.
13. Gutlyanskiĭ V., Ryazanov V., Yefimushkin A. On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – 214. – P. 200–219.
14. Skrypnik I.I. Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption // Israel Journal of Mathematics. – 2016. – 215, № 1. – P. 163–179.
15. Chuiko S.M. On the solvability of a matrix boundary-value problem // Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya “Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory”. – 2017. – 132. – P. 139–143.
16. Chuiko S.M. To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – 227, № 1. – P. 13–25.

References

1. Boichuk, A.A. (1997). Boundary value problems for systems of difference equations. *Ukr. mat. zhurn.*, 49(6), 832–835 (in Russian).
2. Campbell, S.L. (1979). Limit behavior of solutions of singular difference equations. *Linear algebra and its appl.*, 23, 167–178.
3. Chuiko, S.M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *Journal of Mathematical Sciences*, 235(1), 2–18.
4. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2004). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. Utrecht; Boston: VSP, 317 p.
5. Chuiko, S.M., Kalinichenko, Ya.V. (2018). Boundary value problems for systems of non-degenerate difference-algebraic equations. *Praci IPMM*, 32, 133–148 (in Russian).

6. Samoilenko, A.M., Perestyuk, M.O. (1995). *Impulsive differential equations*. Singapore: World Scientific.
7. Chuiko, S.M. (2001). A generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action. *Differential Equations*, 37(8), 1189-1193.
8. Chuiko, S.M. (2017). Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 38(2), 236-244.
9. Kudryavtsev, L.D. (1988). *Course of mathematical analysis. Volume 1*. M.: Vysshaya shkola (in Russian).
10. Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Ya. (1977–1986). *Solution of Ill-Posed Problems*. Winston, Washington, DC, 288 p.
11. Krein, S.G. (1971). *Linear equations in Banach space*. M.: Nauka (in Russian).
12. Chuiko, S.M. (2014). On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action. *Journal of Mathematical Sciences*, 197(1), 138-150.
13. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2016). On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*, 214(2), 200-219.
14. Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics*, 215(1), 163-179.
15. Chuiko, S.M. (2017). On the solvability of a matrix boundary-value problem. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory"*, 132, 139-143.
16. Chuiko, S.M. (2017). To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 227(1), 13-25.

S.M. Chuiko, Ya.V. Kalinichenko, N.V. Popov

On the solvability of the degenerate Noetherian difference-algebraic boundary value problem.

The original conditions of solvability and the scheme of finding solutions of a linear Noetherian difference-algebraic boundary-value problem are proposed in the article, while the technique of pseudo-inversion of matrices by Moore–Penrose is substantially used. The problem posed in the article continues to study the conditions for solvability of linear Noetherian boundary value problems given in the monographs of A.M. Samoilenko, A.V. Azbelev, V.P. Maximov, L.F. Rakhmatullina and A.A. Boichuk. The study of differential-algebraic boundary-value problems is closely related to the investigation of boundary-value problems for difference equations, initiated in the works of A.A. Markov, S.N. Bernstein, Y.S. Bezikovych, O.O. Gelfond, S.L. Sobolev, V.S. Ryabenkyi, V.B. Demidovych, A. Halanai, G.I. Marchuk, A.A. Samarskyi, Yu.A. Mytropolskyi, D.I. Martyniuk, G.M. Vainiko, A.M. Samoilenko and A.A. Boichuk. On the other hand, the study of boundary-value problems for difference equations is related to the study of differential-algebraic boundary-value problems initiated in the papers of K. Weierstrass, N.N. Lusin and F.R. Gantmacher. Systematic study of differential-algebraic boundary value problems is devoted to the works of S. Campbell, Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko, N.A. Perestiyk, V.P. Yakovets, A.A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis. The study of differential-algebraic boundary value problems is also associated with numerous applications of such problems in the theory of nonlinear oscillations, in mechanics, biology, radio engineering, control theory, motion stability theory. The general case of a linear bounded operator corresponding to the homogeneous part of a linear Noetherian difference-algebraic boundary value problem has no inverse is investigated. The generalized Green operator of a linear difference-algebraic boundary value problem is constructed in the article. The relevance of the study of solvability conditions, as well as finding solutions of linear Noetherian difference-algebraic boundary-value problems, is associated with

the widespread use of difference-algebraic boundary-value problems obtained by linearizing nonlinear Noetherian boundary-value problems for systems of ordinary differential and difference equations. Solvability conditions are proposed, as well as the scheme of finding solutions of linear Noetherian difference-algebraic boundary value problems are illustrated in detail in the examples.

Keywords: *linear Noether boundary value problem, systems of difference equations, pseudoinversion of matrices by Moore–Penrose.*

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
chujko-slav@inbox.ru, chujko-slav@ukr.net

Отримано 20.11.19

УДК 517.9

DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-17

©2019. С.М. Чуйко, О.В. Нєсмєлова

ПРО ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ МАТРИЧНОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

У статті знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна лінійної нетерової матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. Отримано достатні умови приведення матричного диференціально-алгебраїчного рівняння до традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння з невідомою у вигляді вектор-стовпця. Поставлена в статті задача продовжує дослідження умов розв'язності лінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях М.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуліної, А.М. Самойленка та О.А. Бойчука. Досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, що відповідає однорідній частині лінійної задачі Коші для матричної диференціально-алгебраїчної системи, не має оберненого. Для розв'язання матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі введено визначення положень рівноваги матричної диференціально-алгебраїчної системи та матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. Запропоновано достатні умови існування та конструктивні схеми знаходження положень рівноваги матричної диференціально-алгебраїчної системи та матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. Окремо розглянуто випадки положень рівноваги матричної диференціально-алгебраїчної системи, які представляють собою сталі матриці, та положення рівноваги, що залежать від незалежної змінної. Для розв'язання матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі використані оригінальні умови розв'язності, а також конструкція загального розв'язку матричного рівняння типу Сильвестра, при цьому істотно використано техніку псевдообернення матриць за Муром-Пенроузом. У статті побудовано узагальнений оператор Гріна лінійної нетерової матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. Запропоновані умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна лінійної нетерової матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі детально проілюстровано на прикладах.

MSC: 34B15.

Ключові слова: положення рівноваги, матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача, узагальнений оператор Гріна.

1. Постановка задачі.

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [1–3]

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z^{(i,j)}(t) \end{pmatrix}, \quad Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \in \mathbb{C}^1[a; b], \quad i = 1, 2, \dots, \beta, \quad j = 1, 2, \dots, \gamma$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad (1)$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (2)$$

Робота виконана за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р/н 0118U003390.

Тут

$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{i=1}^p S_i(t)Z'(t)R_i(t), \quad \mathcal{A}Z(t) := \sum_{j=1}^q \Phi_j(t)Z(t)\Psi_j(t),$$

– лінійні матричні оператори, $S_i(t), \Phi_i(t) \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, $R_i(t), \Psi_j(t) \in \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$ і $F(t)$ – неперервні матриці; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ – лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \mathbb{C}^1[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{\mu \times \nu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \mu \neq \nu$ – довільні натуральні числа. Матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) узагальнює традиційні постановки задач, як для матричних диференціальних рівнянь [1–3], так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь [4–7]. З іншого боку, матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) узагальнює традиційні постановки нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь [8–10, 12].

Позначимо $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$, $j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma$ – базис простору $\mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$, при цьому задача про знаходження розв’язків рівняння (1) приводить до задачі про знаходження вектора $y(t) \in \mathbb{R}^{\beta \gamma}$, компоненти якого $y_j(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$ визначають розвинення матриці

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\beta \gamma} \Xi^{(j)} y_j(t), \quad y_j(t) \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma$$

по векторах $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$ базиса простору $\mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$. Визначимо оператор [14, 15]

$$\mathcal{M}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{\beta \times \gamma} \rightarrow \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma},$$

який ставить у відповідність матриці $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$ – вектор-стовпець $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}$, складений з γ стовпців матриці $\mathcal{B}$, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{M}[\mathcal{B}] \right\} : \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{R}^{\beta \times \gamma},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}$ матрицю $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$. У нових позначеннях лінійний матричний оператор $\mathcal{D}Z(t)$ набуває вигляду

$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{i=1}^p S_i(t)Z'(t)R_i(t) = \sum_{j=1}^{\beta \gamma} \sum_{i=1}^p S_i(t)\Xi^{(j)} R_i(t)y_j'(t),$$

при цьому

$$\mathcal{M} \left[\mathcal{D}Z(t) \right] = Q(t) \cdot y'(t), \quad Q(t) := \left[Q_i(t) \right]_{i=1}^{\beta \cdot \gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha \delta \times \beta \cdot \gamma},$$

де

$$Q_j(t) = \mathcal{M} \left[\sum_{i=1}^p S_i(t)\Xi^{(j)} R_i(t) \right], \quad j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\left[\mathcal{A}Z(t)\right] = \Omega(t) \cdot y(t), \quad \Omega(t) := \left[\Omega_i(t)\right]_{i=1}^{\beta \cdot \gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha\delta \times \beta \cdot \gamma},$$

де

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\sum_{i=1}^q \Phi_i(t) \Xi^{(j)} \Psi_i(t)\right], \quad j = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma.$$

Таким чином, задача про побудову розв'язків матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) приведена до задачі про знаходження розв'язків

$$y(t) = \text{col} \left(y_i(t) \right) \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma}, \quad y_i(\cdot) \in C^1[a; b], \quad i = 1, 2, \dots, \beta \cdot \gamma$$

традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [4–7]

$$Q(t) \cdot y'(t) = \Omega(t) \cdot y(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}\left[F(t)\right]. \quad (3)$$

2. Стаціонарні положення рівноваги.

За умови

$$\mathcal{D}Z(t) = 0, \quad \mathcal{A}Z(t) + F(t) = 0$$

будемо казати, що матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) має положення рівноваги $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$. Якщо ж положення рівноваги матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) задовольняє крайову умову (2), будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) має положення рівноваги $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$. Зокрема, матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) може мати стаціонарні положення рівноваги $Z(t) \equiv C \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$, для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$. Оскільки задача про побудову розв'язків матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) приведена до задачі про знаходження розв'язків традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння (3), то для знаходження стаціонарних положень рівноваги $Z(t) \equiv C \in \mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$, для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$, достатньо знайти вектор $y(t) \equiv c \in \mathbb{R}^{\beta \gamma}$, для якого

$$\Omega(t) \cdot y(t) + \mathcal{F}(t) = 0.$$

Остання рівність має місце тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\Omega^*(t)} \mathcal{F}(t) = 0. \quad (4)$$

За умови (4) знаходимо вектор

$$y(t) = P_{\Omega_r}(t) c_r - \Omega^+(t) \mathcal{F}(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $\Omega^+(t) \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \alpha \delta}$ – псевдообернена (по Муру–Пенроузу) матриця, $P_{\Omega^*(t)} - (\alpha \delta \times \alpha \delta)$ – матриця-ортопроектор $P_{\Omega^*(t)} : \mathbb{R}^{\alpha \delta} \rightarrow \mathbb{N}(\Omega^*(t))$; матриця P_{Ω_r} складена з

r лінійно-незалежних стовпців $(\beta \cdot \gamma \times \beta \cdot \gamma)$ – ортопроектора $P_\Omega : \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(\Omega)$, які представляють із себе константи. В тому випадку, коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ – вектор, складений із констант, за умови (4) узагальнене матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) має положення рівноваги

$$Z(t) = W(t, c_r) + K \left[F(t) \right], \quad W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1} \left[P_{\Omega_r} c_r \right], \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де

$$K \left[F(t) \right] := \mathcal{M}^{-1} \left[\Omega^+(t)\mathcal{F}(t) \right]$$

– узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1). Таким чином, доведена наступна достатня умова розв’язності задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1).

Лема. *За умови (4), у випадку, коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ – вектор, складений із констант, матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) має положення рівноваги*

$$Z(t) = W(t, c_r) + K \left[F(t) \right], \quad W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1} \left[P_{\Omega_r} c_r \right], \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де

$$K \left[F(t) \right] := -\mathcal{M}^{-1} \left[\Omega^+(t)\mathcal{F}(t) \right]$$

– узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1).

Позначимо $\Theta^{(j)} \in \mathbb{R}^r$, $j = 1, 2, \dots, r$ – базис простору $\mathbb{R}^r$. Підставляючи розв’язок матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) в крайову умову (2), приходимо до задачі про знаходження розв’язків

$$c_r = \sum_{j=1}^r \Theta^{(j)} \xi_j \in \mathbb{R}^r, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

матричного рівняння типу Сильвестра [14]

$$\mathcal{L}W(\cdot, c_r) + \mathcal{L}K \left[F(\cdot) \right] = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (5)$$

У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умови (4), у випадку, коли

$$P_{Q_d^*} \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}K \left[F(\cdot) \right] \right\} = 0, \quad (6)$$

і $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ — вектор, складений із констант, розв'язок матричного рівняння (5) визначає вектор [14, 15]

$$c_r = \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}K \left[F(\cdot) \right] \right\} + P_{\mathcal{Q}_\rho} c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*} - (\mu \cdot \nu \times \mu \cdot \nu)$ — матриця-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu} \rightarrow N(\mathcal{Q}^*)$, де

$$\mathcal{Q} := \left[\mathcal{Q}_i \right]_{i=1}^r \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times r}, \quad \mathcal{Q}_i := \mathcal{M} \left\{ \mathcal{L} \mathcal{M}^{-1} \left[P_{\Omega_r} \Theta_i \right] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, r;$$

матриця $P_{\mathcal{Q}_\rho}$ складена із ρ лінійно-незалежних стовпців ($r \times r$) — матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^r \rightarrow N(\mathcal{Q})$. Матриця $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ складена з d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. Таким чином, у критичному випадку, за умови (4) і (6), коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ — вектор, складений із констант, розв'язок узагальненого матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1), який задовольняє крайову умову (2)

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G \left[F(t); \mathfrak{A} \right], \quad W(t, c_\rho) := \mathcal{M}^{-1} \left[P_{\Omega_r} c_\rho \right], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[F(t); \mathfrak{A} \right] = \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}K \left[F(\cdot) \right] \right\} \right\} + K \left[F(t) \right]$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2). Таким чином, доведена наступна достатня умова розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2).

Теорема 1. У критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$), за умови (4) і (6), коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ — вектор, складений із констант, положення рівноваги матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1), яке задовольняє крайову умову (2)

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G \left[F(t); \mathfrak{A} \right], \quad W(t, c_\rho) := \mathcal{M}^{-1} \left[P_{\Omega_r} c_\rho \right], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[F(t); \mathfrak{A} \right] = \mathcal{M}^{-1} \left\{ \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - \mathcal{L}K \left[F(\cdot) \right] \right\} \right\} + K \left[F(s) \right]$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2), де

$$K \left[F(t) \right] := \mathcal{M}^{-1} \left[\Omega^+(t)\mathcal{F}(t) \right]$$

узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1).

Приклад 1. Вимогам теореми 1 задовольняє задача про побудову 2π -періодичних розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad (7)$$

де

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 := \Phi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Psi_1 := R_2, \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{3 \times 2}$, при цьому

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже умову (4) виконано і

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

– вектор, складений із констант, отже матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (7) має положення рівноваги

$$Z(t) = W(t, c_r) + K[F(t)], \quad W(t, c_r) = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ 2c_3 & -c_3 \end{pmatrix},$$

де

$$K[F(t)] := -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (7); тут

$$P_{\Omega^*(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\Omega_r(t)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матричної крайової задачі (7) має місце критичний випадок ($P_{\Omega^*} \neq 0$), при цьому

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathcal{L}K[F(\cdot)] = 0,$$

відповідно, умову (6) виконано; таким чином, положення рівноваги матричної крайової задачі (7)

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G[F(t); \mathfrak{A}], \quad W(t, c_\rho) = W(t, c_r), \quad c_r \in \mathbb{R}^5$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G[F(t); \mathfrak{A}] = K[F(t)]$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (7).

3. Нестационарні положення рівноваги.

Зокрема, матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) може мати нестационарні положення рівноваги

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1[a; b],$$

для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$. Оскільки задача про побудову розв'язків матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) приведена до задачі про знаходження розв'язків традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння (3), отже для знаходження нестационарних положень рівноваги, для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$, достатньо

знайти вектор $y(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$, для якого

$$Q(t) \cdot y'(t) \equiv 0, \quad \Omega(t) \cdot y(t) + \mathcal{F}(t) = 0.$$

Перша рівність має місце за умови $P_{Q(t)} \neq 0$, наприклад, для вектора

$$y(t) = P_{Q_r}(t)x(t), \quad x(t) \in \mathbb{C}^1[a; b].$$

Позначимо матрицю $\mathcal{B}(t) := \Omega(t) \cdot P_{Q_r}(t)$; за умови

$$P_{Q(t)} \neq 0, \quad P_{\mathcal{B}^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \quad \mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t) \in C^1[a; b]. \quad (8)$$

для знаходження нестационарних положень рівноваги достатньо знайти вектор

$$x(t) = -\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t), \quad \varphi_\rho(t) \in \mathbb{R}^\rho,$$

при цьому

$$y(t) = P_{Q_r}(t)P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t) - P_{Q_r}(t)\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t).$$

За умови (8) і

$$\mathcal{L}\mathfrak{W}(\cdot, \varphi_\rho(\cdot)) + \mathcal{L}\mathcal{K}\left[F(\cdot)\right] = \mathfrak{A} \quad (9)$$

знайдене нестационарне положення рівноваги

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}\left[F(t)\right], \quad \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) = \mathcal{M}^{-1}\left[P_{Q_r}(t)P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t)\right]$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) задовольняє крайову умову (2) і залежить від довільної вектор-функції $\varphi_\rho(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$; тут

$$\mathcal{G}\left[F(t)\right] := \mathcal{K}\left[F(t)\right] := -\mathcal{M}^{-1}\left[P_{Q_r}(t)\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t)\right].$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2).

Теорема 2. *За умов (8) і (9) нестационарне положення рівноваги*

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}\left[F(t)\right], \quad \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) = \mathcal{M}^{-1}\left[P_{Q_r}(t)P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t)\right]$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) задовольняє крайову умову (2) і залежить від довільної вектор-функції $\varphi_\rho(t) \in \mathbb{C}^1[a; b]$; тут

$$\mathcal{G}\left[F(t)\right] := -\mathcal{M}^{-1}\left[P_{Q_r}(t)\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t)\right]$$

– узагальнений оператор Гріна матричної крайової задачі (1), (2).

Відмітимо, що рівняння (7), досліджене в прикладі 1, не має нестационарних положень рівноваги, отже не виконано умову (8), а саме: $P_{\mathcal{B}^*(t)}\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(t)$, відносно $\mathcal{B}(t) \equiv 0$.

Приклад 2. Вимогам доведеної теореми 2 задовольняє задача про побудову розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad (10)$$

які задовольняють крайову умову

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \int_0^{2\pi} \Lambda(t)Z(t)\Pi(t)dt = 0. \quad (11)$$

де

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Psi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Pi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи природний базис

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

простору $\mathbb{R}^{3 \times 2}$ знаходимо

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ортопроектори

$$P_{\mathcal{B}^*(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матриці

$$\mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

гарантують виконання умови (8), при цьому

$$\mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}[F(t)] = K[F(t)] = \begin{pmatrix} -\sin t & \sin t - \cos t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (9) виконано, тоді знайдене нестационарне положення рівноваги

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}[F(t)], \quad \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) = \mathcal{M}^{-1} \left[P_{Q_r}(t) P_{B_\rho(t)} \varphi_\rho(t) \right]$$

диференціально-алгебраїчного рівняння (10) задовольняє крайову умову (11) і залежить від довільної неперервної скалярної функції $\varphi_\rho(t)$.

Припустимо далі, що матрична диференціально-алгебраїчна задача (1), (2) задовольняє вимогам і теореми 1 і теореми 2 і, отже, має і стаціонарні

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G[F(t); \mathfrak{A}], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

і нестационарні положення рівноваги

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}[F(t)].$$

В цьому випадку однорідна частина диференціально-алгебраїчної задачі (1), (2) має розв'язок

$$Z(t, c_\rho, \varphi_\rho(t)) = W(t, c_\rho) + \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

який залежить від довільної неперервної функції $\varphi_\rho(t)$; при цьому частинний розв'язок неоднорідної диференціально-алгебраїчної задачі (1), (2) визначає довільний: $G[F(t); \mathfrak{A}]$, або $\mathcal{G}[F(t)]$ – узагальнений оператор Гріна матричної крайової задачі (1), (2).

Приклад 3. Вимогам і теореми 1 і теореми 2 задовольняє задача про побудову розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи (10), які задовольняють крайову умову (11), досліджену в прикладі 2.

У прикладі 2 показано, що задача про побудову розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної задачі (10), (11), задовольняє вимогам теореми 2. Для матричної диференціально-алгебраїчної системи (10) виконується вимога (4), при цьому

$$\Omega^+(t) \mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 & 0 & \cos t - \sin t & 0 & 0 \end{pmatrix}^*$$

– вектор, складений із констант, отже матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (10) має положення рівноваги

$$Z(t) = W(t, c_r) + K[F(t)], \quad W(t, c_r) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & -2c_2 \end{pmatrix},$$

де

$$K \begin{bmatrix} F(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & \sin t - \cos t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вимоги і теореми 1 і теореми 2 виконані, то знайдене положення рівноваги

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G} \begin{bmatrix} F(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} \begin{bmatrix} F(t) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} F(t) \end{bmatrix}$$

диференціально-алгебраїчного рівняння (10) задовольняє крайову умову (11) і залежить від довільної неперервної скалярної функції $\varphi_\rho(t)$.

Запропонована в статті схема дослідження матричних диференційно-алгебраїчних задач аналогічно [8, 17] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, в тому числі, в частинних похідних [18–20].

Цитована література

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
2. Деревенский В.П. Матричные уравнения Бернулли // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 2. – Р. 14–23.
3. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – 37, № 4. – Р. 464–471.
4. Campbell S.L. Singular Systems of differential equations. – San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. – 178 p.
5. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск: Наука, 1996. – 280 с.
6. Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
7. Чистяков В.Ф., Шеглова А.А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.
8. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
9. Бойчук А.А., Шегда Л.М. Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007. – 10, № 3. – С. 303–312.
10. Чуйко С.М. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исследов. и моделирование. – 2013. – 5, №5. – С. 769–783.
11. Boichuk A.A., Krivosheya S.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – 50, № 8. – Р. 1162–1169.
12. Чуйко С.М. Линейная нетерова краевая задача для вырожденной дифференциально-алгебраической системы // Spectral and Evolution Problems. – 2013. – 23. – С. 148–157.
13. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F. Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – 53, №6. – Р. 777–788.
14. Чуйко С.М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. – 2014. – 19, Вип. 1(21). – С. 49–57.
15. Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2014. – № 1120. – С. 85–94.
16. Чуйко С.М., Чистяков В.Ф. О положениях равновесия вырожденной дифференциально алгебраической системы // Міжнародна наукова конференція “Крайові задачі, теорія функцій

та їх застосування” з нагоди 60 – річчя В.І. Рукасова, Слов’янськ, 21–24 травня 2014 р. Тези доп. – С. 79.

17. Chuiko S. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // *Miskolc Mathematical Notes*. – 2016. – 17, № 1. – P. 139–150.
18. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Yakubov E.H. The Beltrami equations and prime ends // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2015. – 210. – P. 22–51.
19. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A. On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2016. – 214. – P. 200–219.
20. Skrypnik I.I. Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption // *Israel Journal of Mathematics*. – 2016. – 215, № 1. – P. 163–179.

References

1. Bellman, R. (1969). *Vvedenie v teoriyu matrits*. M.: Nauka (in Russian).
2. Derevenskiy, V.P. (2008). Matrichnyie uravneniya Bernulli. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2, 14-23 (in Russian).
3. Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A. (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations. *Differential Equations*, 37(4), 464-471.
4. Campbell, S.L. (1980). *Singular Systems of differential equations*. San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program.
5. Chistyakov, V.F. (1996). *Algebro-differentsialnyie operatoryi s konechnomernym yadrom*. Novosibirsk: Nauka (in Russian).
6. Chistyakov, V.F. (1998). *Algebro-differentsialnyie sistemyi. Metodyi resheniya i issledovaniya*. Novosibirsk: Nauka (in Russian).
7. Chistyakov, V.F., Scheglova, A.A. (2003). *Izbrannyye glavyyi teorii algebro-differentsialnyih sistem*. Novosibirsk: Nauka Novosibirsk: Nauka (in Russian).
8. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2004). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. Utrecht; Boston: VSP.
9. Boichuk, A.A., Shegda, L.M. (2007). Virodzeni neterovi krayovi zadachi. *Nelineyni kolivannya*, 10(3), 303-312 (in Ukrainian).
10. Chuiko, S.M. (2013). Lineynyye neterovyy kraevyye zadachi dlya differentsialno-algebraicheskikh sistem. *Komp. issledov. i modelirovanie*, 5(5), 769-783 (in Russian).
11. Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A. (1998). Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. *Ukrainian Mathematical Journal*, 50(8), 1162-1169.
12. Chuiko, S.M. (2013). Lineynaya neterova kraevaya zadacha dlya vyirozhdennoy differentsialno-algebraicheskoy sistemyi. *Spectral and Evolution Problems*, 23, 148-157 (in Russian).
13. Boichuk, A.A., Pokutnyi, A.A., Chistyakov, V.F. (2013). Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 53(6), 777-788.
14. Chuiko, S.M. (2014). O reshenii matrichnogo uravneniya Silvestra. *Vestnik Odesskogo natsionalnogo universiteta. Ser. matematika i mehanika*, 19, 1(21), 49-57 (in Russian).
15. Chuiko, S.M. (2014). O reshenii matrichnyih uravneniy Lyapunova. *Visnik Harkivskogo natsionalnogo universitetu imeni V.N. Karazina. Seriya: Matematika, prikladna matematika i mehanika*, 1120, 85-94 (in Russian).
16. Chuiko, S.M., Chistyakov, V.F. (2014). O polozheniyah ravnovesiya vyirozhdennoy differentsialno-algebraicheskoy sistemyi. *Mizhnarodna naukova konferentsiya “Krayovi zadachi, teoriya funktsiy ta yih zastosuvannya” z nagodi 60–richchya V.I. Rukasova, Slov’yansk*, p. 79 (in Russian).
17. Chuiko, S. (2016). Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation. *Miskolc Mathematical Notes*, 17(1), 139-150.
18. Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov V.I., Yakubov E.H. (2015). *The Beltrami equations and prime ends*. *Journal of Mathematical Sciences*, 210(1), 22-51.
19. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2016). On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*, 214(2), 200-219.

20. Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics*, 215(1), 163-179.

S.M. Chuiko, O.V. Nesmelova

About the equilibrium positions of a matrix differential-algebraic boundary value problem.

In the article we found the solvability conditions and the construction of the generalized Green operator of the linear Noetherian matrix differential-algebraic boundary value problem. We obtained sufficient conditions of transformations of the matrix differential-algebraic equation to a traditional differential-algebraic equation with an unknown in the form of a column vector. The problem that reviewed in the article continues the study of solvability conditions for the linear Noetherian boundary value problems given in the monographs of M.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, A.M. Samoilenko and A.A. Boichuk. We investigated the general case when the linear bounded operator corresponding to the homogeneous part of the linear Cauchy problem for the matrix differential-algebraic system does not have the reverse operator. We introduced the definition of the equilibrium positions of the matrix differential-algebraic system and the matrix differential-algebraic boundary-value problem to solve the matrix differential-algebraic boundary-value problem. We proposed sufficient conditions of existence and constructive schemes for finding the equilibrium positions of the matrix differential-algebraic system and the matrix differential-algebraic boundary value problem. The cases of equilibrium positions of the matrix differential-algebraic system, which are constant matrices, and equilibrium positions depending on an independent variable are considered separately. To solve the matrix differential-algebraic boundary-value problem, we used the original solvability conditions and the construction of the general solution of the Sylvester-type matrix equation, while the Moore–Penrose matrix pseudoinverse technique was essentially used. In the article we constructed the generalized Green operator of the linear Noetherian matrix differential-algebraic boundary value problem. The proposed solvability conditions and the construction of the generalized Green operator of the linear Noetherian matrix differential-algebraic boundary value problem, were illustrated in detail with examples.

Keywords: *equilibrium position, matrix differential-algebraic boundary value problem, generalized Green operator.*

Донбаський державний педагогічний університет,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
chuiko-slav@ukr.net, star-o@ukr.net

Отримано 11.10.19